

DOI: 10.11779/CJGE201802005

# 非饱和土条形地基梅耶霍夫极限承载力统一解

张常光<sup>1,2</sup>, 晏青<sup>1</sup>, 吴礼舟<sup>2</sup>, 曹雪叶<sup>1</sup>, 张成林<sup>1</sup>

(1. 长安大学建筑工程学院, 陕西 西安 710061; 2. 成都理工大学地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室, 四川 成都 610059)

**摘 要:** 基于非饱和土的抗剪强度统一解, 综合考虑中间主应力、基质吸力和强度非线性, 建立非饱和土条形地基的梅耶霍夫极限承载力统一解, 对比文献滑移线法解答、上限法解答验证所得统一解的正确性和适用性, 讨论与太沙基极限承载力的差异及基底粗糙程度效应, 并得出中间主应力、高/低基质吸力以及有效强度参数的影响规律。研究结果表明: 太沙基极限承载力将旁侧土的抗剪强度简化为均布荷载, 夸大了旁侧土的真实作用, 计算结果偏大; 基底粗糙程度对承载力系数的确定起关键性作用, 梅耶霍夫极限承载力随中间主应力效应的增大而显著增加, 不考虑中间主应力影响的 Mohr-Coulomb 解答过于保守; 基质吸力具有双重影响, 即在低吸力范围内极限承载力线性增加, 而在高吸力范围内却逐渐减小并趋于稳定, 这是由非饱和土的强度非线性造成的; 有效强度参数的影响亦很重要, 且有效内摩擦角较有效黏聚力的影响更明显。由于考虑了中间主应力效应、非饱和特性与旁侧土抗剪强度等工程实际情况, 本文结果可为地基优化设计与施工提供有益的参考。

**关键词:** 非饱和土; 条形地基; 中间主应力; 梅耶霍夫理论; 极限承载力

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2018)02-0252-10

**作者简介:** 张常光(1982-), 男, 山东菏泽人, 博士, 副教授, 从事非饱和土与地下工程研究。E-mail: zcg1016@163.com。

## Unified solution of Meyerhof's ultimate bearing capacity for strip foundation resting on unsaturated soils

ZHANG Chang-guang<sup>1,2</sup>, YAN Qing<sup>1</sup>, WU Li-zhou<sup>2</sup>, CAO Xue-ye<sup>1</sup>, ZHANG Cheng-lin<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China; 2. State Key Laboratory of Geohazard Prevention and Geoenvironment Protection, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

**Abstract:** Based on the unified solution of shear strength for unsaturated soils, a unified solution of Meyerhof's ultimate bearing capacity for strip foundation is obtained by considering the effects of intermediate principal stress, matric suction and strength nonlinearity. The validity and applicability of the obtained unified solution are demonstrated by comprising it with the results of the slip-line theory and upper-bound theory available in literatures. The differences of the ultimate bearing capacity between the Terzaghi's theory and Meyerhof's theory and the roughness effect of foundation base are discussed. The influences of the intermediate principal stress, high/low matric suction and effective strength parameters are investigated. The findings show that the Terzaghi's ultimate bearing capacity simplifies the shear strength of lateral soils as uniform load, which exaggerates the real effect of lateral soils and leads to a larger result. The roughness of foundation base is critical for determining the bearing capacity factors. Meyerhof's ultimate bearing capacity increases significantly with the intermediate principal stress effect, and the results of Mohr-Coulomb criterion are too conservative due to no consideration of the intermediate principal stress. The matric suction has a dual-effect: the ultimate bearing capacity increases linearly in the low suction region, meanwhile it gradually decreases and eventually stabilizes in the high suction region, which is caused by the nonlinear strength of unsaturated soils. The effects of the effective strength parameters are also important, and furthermore the effect of the effective internal friction angle is more obvious than that of the effective cohesion. Due to considering many practical engineering conditions, such as the intermediate principal stress effect, unsaturated characteristics as well as shear strength of lateral soils, this study can provide useful references for the optimization of foundation design and construction.

**Key words:** unsaturated soil; strip foundation; intermediate principal stress; Meyerhof's theory; ultimate bearing capacity

## 0 引 言

地基承载力是经典土力学及岩土工程的一个重要

基金项目: 中国博士后科学基金项目(2016T90879); 陕西省博士后科研项目(2015年); 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室开放基金项目(SKLG2017K025); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(310828173402, 310828150018)

收稿日期: 2016-11-18

课题, 合理确定地基承载力对工程的安全性和经济性均具有重要意义。以往对条形地基承载力的研究多是对饱和土<sup>[1-2]</sup>, 并采用 Mohr-Coulomb 强度准则, 未考虑中间主应力对地基承载力的显著影响<sup>[3-6]</sup>。同时, 由于采用防排水措施, 使地基土常年处于非饱和状态<sup>[7-11]</sup>, 假定为饱和土来研究实际非饱和土的地基承载力, 则忽略了基质吸力对地基承载力的贡献。张常光等<sup>[9-10]</sup>基于统一强度理论<sup>[12]</sup>和 Fredlund 双应力状态变量理论<sup>[13]</sup>建立了非饱和土的抗剪强度统一解, 并研究了非饱和土条形地基的太沙基极限承载力, 但未考虑非饱和土强度非线性即高吸力的影响。地基承载力的太沙基理论用基础两侧无限大均布荷载  $\gamma D$  (其中,  $\gamma$  为地基土的重度,  $D$  为基础的埋置深度) 替代旁侧土的抗剪强度, 一定程度上简化了推导过程及计算难度, 但其结果偏于危险; 另外, 太沙基理论假定滑动面仅扩展到与基底同位置的水平面, 而没有延伸到地表, 这与条形基础的整体破坏情形不符<sup>[14]</sup>。梅耶霍夫理论<sup>[15]</sup>对这两方面都进行了很好的修正, 它假定滑动面延伸到地表, 并用“等代自由面”上的法向应力和切向应力来反映基础侧面上的合力及附近土块的重力, 从而合理地考虑了旁侧土的抗剪强度, 与真实的地基破坏机制较为符合<sup>[14-15]</sup>。值得注意的是, 梅耶霍夫极限承载力公式对浅基础与深基础均适用, 是各国规范常推荐使用的地基极限承载力公式之一<sup>[14]</sup>, 但针对非饱和土的条形地基承载力至今还未开展相关研究。

因此, 本文基于非饱和土的抗剪强度统一解, 综合考虑中间主应力、高/低基质吸力和旁侧土的抗剪强度等影响, 推导了非饱和土条形地基的梅耶霍夫极限承载力统一解, 对比滑移线法解答、上限法解答进行正确性和适用性验证, 分析与太沙基地基极限承载力的差异及基底粗糙程度效应, 并探讨了各因素的影响特性。

## 1 非饱和土抗剪强度统一解

张常光等<sup>[9-10]</sup>基于拓展类比法提出了适用于非饱和土的抗剪强度统一解, 其表达式为

$$\begin{cases} \tau_f = c'_t + (\sigma - u_a) \tan \varphi'_t + (u_a - u_w) \tan \varphi^b_t, \\ \sin \varphi'_t = \frac{b(1-m) + (2+b+bm) \sin \varphi'}{2+b(1+\sin \varphi')}, \\ c'_t = \frac{2(1+b)c' \cos \varphi' - 1}{2+b(1+\sin \varphi') \cos \varphi'_t}, \sin \varphi^b_t = \frac{2(1+b) \sin \varphi^b}{2+b(1+\sin \varphi^b)}. \end{cases} \quad (1)$$

式中  $c'$  为有效黏聚力;  $c'_t$  为统一有效黏聚力;  $\varphi'$  为有效内摩擦角;  $\varphi'_t$  为统一有效内摩擦角;  $\varphi^b$  为与基质吸力有关的吸力角;  $\varphi^b_t$  为统一吸力角;  $u_a$  为孔隙气

压力;  $u_w$  为孔隙水压力,  $(u_a - u_w)$  为基质吸力;  $\sigma$  为总法向应力,  $(\sigma - u_a)$  为净法向应力;  $m$  为中间主应力系数,  $0 \leq m \leq 2$ ;  $b$  为统一强度理论参数,  $0 \leq b \leq 1$ 。

在超过进气值  $(u_a - u_w)_b$  的高吸力范围内, 非饱和土的强度具有明显的非线性特征<sup>[8-9]</sup>, 即吸力角  $\varphi^b$  不再为常数而是基质吸力的减函数, 可表示为

$$\varphi^b = \varphi' \quad ((u_a - u_w) \leq (u_a - u_w)_b), \quad (2a)$$

$$\varphi^b = \varphi' - \frac{(u_a - u_w) - (u_a - u_w)_b}{\lambda_m + \lambda_n [(u_a - u_w) - (u_a - u_w)_b]} \quad ((u_a - u_w) > (u_a - u_w)_b). \quad (2b)$$

式中,  $\lambda_m$ ,  $\lambda_n$  为式 (2b) 变形为直线方程后相应的截距和斜率, 且  $\lambda_n$  可由  $1/\lambda_n = -2.4598 + 1.0225\varphi'$  来确定<sup>[9]</sup>。

由式 (2) 可知: 吸力角  $\varphi^b$  在  $(u_a - u_w) \leq (u_a - u_w)_b$  的低吸力范围内为常数; 而在  $(u_a - u_w) > (u_a - u_w)_b$  的高吸力范围内, 吸力角  $\varphi^b$  随基质吸力的增大非线性减小, 并最终趋于某一稳定值。

式 (1) 通过统一强度理论参数  $b$  来反映非饱和土强度的中间主应力效应, 且参数  $b$  取不同值对应不同的强度准则。当参数  $b=0$  时, 式 (1) 退化为基于 Mohr-Coulomb 强度准则的非饱和土双应力状态变量抗剪强度公式<sup>[13]</sup>; 当参数  $b=1$  时, 式 (1) 退化为基于双剪应力强度准则的非饱和土抗剪强度公式; 当  $0 < b < 1$  时, 式 (1) 为一系列新的非饱和土抗剪强度公式。同时, 结合式 (2) 的分段吸力角  $\varphi^b$ , 式 (1) 可以反映非饱和土强度非线性即高吸力的影响, 进而由式 (1)、(2) 所建立的相关岩土工程解答, 可以合理考虑中间主应力、高/低吸力的共同影响。

设  $c_u = c'_t + (u_a - u_w) \tan \varphi^b_t$  为统一总黏聚力, 将式 (1) 写成类似饱和土抗剪强度公式的形式, 则有

$$\tau_f = c_u + (\sigma - u_a) \tan \varphi'_t. \quad (3)$$

## 2 条形地基极限承载力统一解

图 1 为处于平面应变状态的某条形浅基础, 其宽度为  $B$ 、埋深为  $D$ , 且满足  $D \leq B$ ; 达到极限承载力  $q_u$  时, 均质条形地基的破坏模式如图 1 所示<sup>[14-15]</sup>, 其中左侧符号标注对应考虑土体自重时的分析, 右侧对应不考虑土体自重的分析。

### 2.1 梅耶霍夫理论假定

(1) 基础底面完全粗糙, 条形地基为整体剪切破坏, 对称半滑动面为图 1 中的曲线  $ACDE$ , 其中  $CD$  为对数螺旋线,  $AC$  与水平面  $AB$  的夹角为  $45^\circ + \varphi'_t/2$ 。

(2) 地基土为均质非饱和土, 且地下水位处于地基滑动面以下, 基质吸力  $(u_a - u_w)$  沿深度均匀不变; 滑动面上的土体处于塑性极限平衡状态, 满足平面应



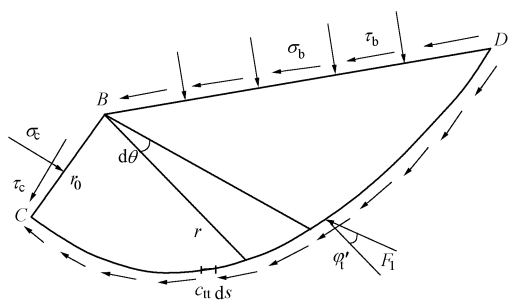


图4 隔离体BCD受力分析

Fig. 4 Force analysis of isolator BCD

图5为三角楔体ABC的受力分析, 此时仅考虑地基土的黏聚力与基础旁侧荷载, 而不考虑土体自重, 进而由竖向力的平衡求得

$$q_u^1 = \sigma_c + \tau_c \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'_1}{2}\right) \quad (16)$$

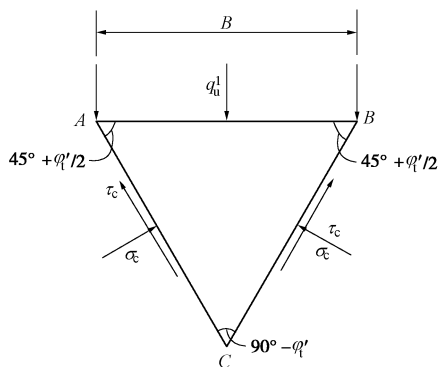


图5 考虑地基土黏聚力与基础旁侧荷载时ABC受力分析

Fig. 5 Force analysis of ABC considering cohesion of soils and lateral load of foundation

将式(13)~(15)代入式(16), 整理得

$$\left. \begin{aligned} q_u^1 &= c_u N_c^M + \sigma_0 N_q^M, \\ N_c^M &= (N_q^M - 1) \cot \varphi'_1, \\ N_q^M &= \frac{(1 + \sin \varphi'_1) \exp(2\theta \tan \varphi'_1)}{1 - \sin \varphi'_1 \sin(2\eta + \varphi'_1)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中,  $q_u^1$  为由地基土黏聚力与基础旁侧荷载所提供的极限承载力,  $N_c^M$ ,  $N_q^M$  为梅耶霍夫理论的黏聚力承载力系数、超载承载力系数。

(2) 滑动土体自重和被动土压力提供的地基承载力

在求由土体的自重提供的地基承载力时, 以图1中左侧的ACHK为分析对象, 通过对O点取矩, 可求得AC面上的被动土压力为

$$p_p = \frac{p_1 L_1 + W_1 L_2}{L_3} \quad (18)$$

式中  $p_p$  为AC面上的被动土压力, 其作用点位于AC线的三等分点处;  $W_1$  为土体自重, 其作用点为ACHJ

体的重心;  $p_1$  为HJ面上的被动土压力, 其作用点位于HJ线上的三等分点处;  $L_1$  为  $p_1$  作用点到O点的力臂,  $L_2$  为  $W_1$  作用点到O点的力臂,  $L_3$  为  $p_p$  作用点到O点的力臂。

图6为考虑滑动土体自重和被动土压力时ABC体的受力分析, 并假定地基土的黏聚力和基础旁侧荷载为零, 即  $c_u = 0$ ,  $\sigma_0 = \tau_0 = 0$ , 对数螺旋线中心需移到O点, 且应通过试算确定。

由图6中ABC体的竖向力平衡, 求得由土体自重和被动土压力所提供的地基承载力  $q_u^2$  为

$$\left. \begin{aligned} q_u^2 &= \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma^M, \\ N_\gamma^M &= \frac{4 p_p \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi'_1\right)}{\gamma^2 B} - \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi'_1\right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中,  $N_\gamma^M$  为梅耶霍夫理论的重度承载力系数。

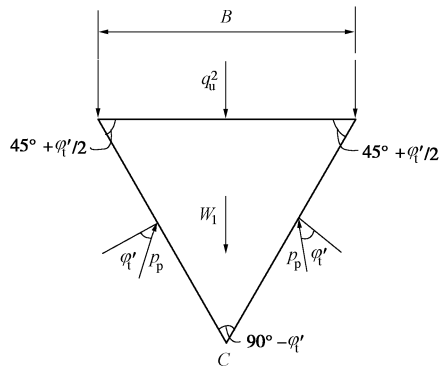


图6 考虑土体自重和被动土压力时ABC受力分析

Fig. 6 Force analysis of ABC considering weight of soils and passive earth pressure

(3) 梅耶霍夫极限承载力统一解

叠加式(17)、(19), 即得均质非饱和土条形基础在中心荷载作用下的梅耶霍夫地基极限承载力, 其表达式为

$$q_u = [c'_1 + (u_a - u_w) \tan \varphi_t^b] N_c^M + \sigma_0 N_q^M + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma^M \quad (20)$$

式中,  $N_q^M$ ,  $N_c^M$ ,  $N_\gamma^M$  为基于非饱和土抗剪强度统一解的梅耶霍夫地基承载力系数, 均与  $\varphi'$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  有关, 而  $\eta$  又与“等代自由面”BE上抗剪强度的发挥系数  $n$  有关。由图3中的几何条件, 可得  $\eta$  和  $n$  的关系为

$$\cos(2\eta + \varphi'_1) = \frac{n(c_u + \sigma_0 \tan \varphi'_1) \cos \varphi'_1}{c_u + \sigma_b \tan \varphi'_1} \quad (21)$$

另外, 由梅耶霍夫建议的半经验公式确定  $N_\gamma^M$  为<sup>[15]</sup>

$$N_\gamma^M = (N_q^M - 1) \tan(1.4 \varphi'_1) \quad (22)$$

式(20)即为本文所建立的非饱和土条形地基的梅耶霍夫极限承载力统一解, 综合考虑了中间主应力效应、基质吸力和有效强度参数等因素影响, 能更好

地预测地基的极限承载力。式(20)的形式虽与太沙基极限承载力公式相似,但其承载力系数与太沙基理论不同,这是因为梅耶霍夫理论的土体滑动面与太沙基理论不同,且前者合理考虑了旁侧土抗剪强度的影响。统一强度理论参数 $b$ 代表中间主应力效应与强度准则的选取,参数 $b=0$ 时式(20)退化为基于Mohr-Coulomb强度准则的非饱和土梅耶霍夫极限承载力公式,参数 $b=1$ 时退化为基于双剪应力强度准则的非饱和土梅耶霍夫极限承载力公式;当 $0 < b < 1$ 时,式(20)为一系列新的非饱和土条形地基极限承载力公式。基质吸力 $(u_a - u_w) > 0$ 对应非饱和土,当 $(u_a - u_w) = 0$ 时为饱和土,式(20)退化为饱和土条形地基梅耶霍夫的极限承载力统一解<sup>[6]</sup>;当参数 $b=0$ , $(u_a - u_w) = 0$ 时,式(20)退化为传统的饱和土条形地基梅耶霍夫极限承载力公式<sup>[14]</sup>。

### 2.3 计算步骤

对于某一给定的均质非饱和土条形基础,已知基础宽度与埋深、非饱和地基土的各项力学指标等参数。利用式(20)求解地基极限承载力 $q_u$ 时,需先通过试算、作图确定 $\beta$ 值。具体过程为:先假定某一 $\beta$ 值,由式(6)、(7)计算 $\sigma_0$ 和 $\tau_0$ ,继而由图3莫尔应力圆求解 $\eta$ 值,再代入式(8)、(9)计算 $\beta$ 值,直至计算的 $\beta$ 与所假定 $\beta$ 之间的差值满足精度要求。在此过程中还可得到 $\eta$ 、 $\sigma_0$ 和 $\tau_0$ ,用于确定梅耶霍夫的承载力系数 $N_q^M$ ,  $N_c^M$ ,  $N_\gamma^M$ ,进而由式(20)确定非饱和土条形地基的梅耶霍夫极限承载力 $q_u$ 。

## 3 公式验证及对比

本文采用假定滑动面的刚塑性极限平衡法,考虑地基土三向应力状态及非饱和特性,建立了非饱和土条形地基的梅耶霍夫极限承载力统一解式(20),故式(20)属于极限平衡法解答,且重度承载力系数 $N_\gamma^M$ 继续使用半经验公式。常用的地基极限承载力计算方法还有:滑移线法、多块体上限法,极限分析法等。将本文所得极限平衡法式(20)与同等条件下文献中已有的滑移线法解答<sup>[16]</sup>、多块体上限法解答<sup>[17]</sup>进行综合对比,以验证所得公式的正确性与适用性。

### 3.1 公式验证

范文等<sup>[16]</sup>基于饱和土的统一强度理论<sup>[12]</sup>,获得了基底完全粗糙时饱和土条形地基极限承载力的滑移线法解答,比较此滑移线法解答与本文极限平衡法式(20)相应饱和土即基质吸力 $(u_a - u_w) = 0$ 时的结果,如图7所示。条形地基尺寸及土体参数为<sup>[16]</sup>:  $B=3$  m,  $D=1$  m;  $\gamma=19$  kN/m<sup>3</sup>,  $c'=10$  kPa,  $\phi'=10^\circ$ ,  $K_0=0.45$ ,  $\delta=6^\circ$ 。

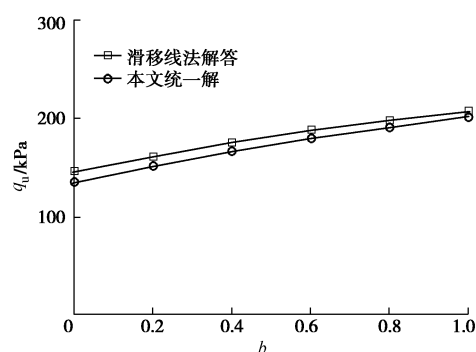


图7 与滑移线法解答比较

Fig. 7 Comparison between calculated and slip-line results

由图7可知:对于饱和土条形地基的极限承载力,本文极限平衡法式(20)和文献[16]滑移线法解答随统一强度理论参数 $b$ 增大而增加的变化规律一致,虽前者小于后者,但二者相差较小,最大相对误差为参数 $b=0$ 时的8.9%,最小相对误差为参数 $b=1$ 时的2.6%,平均相对误差为5.3%,一定程度上验证了本文极限平衡法式(20)的正确性与适用性。

赵炼恒等<sup>[17]</sup>基于Mohr-Coulomb强度准则,获得了基底完全粗糙时3种情况下非饱和土条形地基极限承载力的多块体上限法解答,并采用序列二次规划法进行最优化求解。因本文假设基质吸力沿深度为均匀分布,且文献[17]采用的是不考虑中间主应力影响的Mohr-Coulomb强度准则,对应式(1)中的参数 $b=0$ ,故比较文献[17]均匀基质吸力上限法解答与本文极限平衡法式(20)中参数 $b=0$ 时的结果,如图8所示。条形地基尺寸及土体参数为<sup>[17]</sup>:  $B=0.5$  m,  $D=0.5$  m;  $\gamma=18.3$  kN/m<sup>3</sup>,  $c'=5$  kPa,  $\phi'=20^\circ$ ,  $\phi^b=15^\circ$ ,  $K_0=0.45$ ,  $\delta=10^\circ$ 。

由图8可知:当基质吸力 $(u_a - u_w)$ 为0即饱和土时,本文极限平衡法式(20)大于文献[17]的上限法解答;随着基质吸力的不断增加,二者之间的差异不断减小,基质吸力为100 kPa时二者相等;当基质吸力大于100 kPa时,本文极限平衡法式(20)小于文献[17]的上限

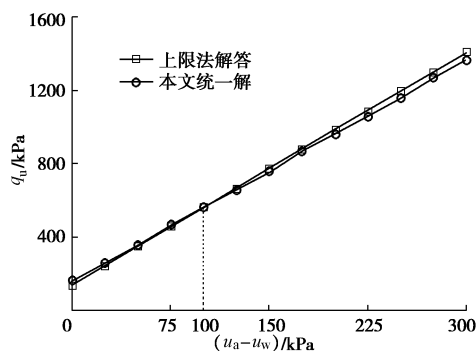


图8 与上限法解答比较

Fig. 8 Comparison between calculated and upper-bound results

法解答, 因上限法解答是极限荷载的上限值, 故此时本文极限平衡法式(20)为理论较优解。总的来说, 二者随基质吸力的变化规律一致且相差较小, 平均相对误差为3.6%, 进一步验证了本文极限平衡法式(20)的正确性与广泛适用性。

### 3.2 公式对比

取文献[6]中饱和土条形地基的算例, 并扩展至非饱和土情形: 均质非饱和土的条形浅基础, 其宽度  $B=4$  m, 埋深  $D=3$  m, 地基土重度  $\gamma=19.5$  kN/m<sup>3</sup>; 有效黏聚力  $c'=20$  kPa, 有效内摩擦角  $\varphi'=22^\circ$ , 进气值  $(u_a - u_w)_b=150$  kPa; 静止土压力系数  $K_0=0.45$ , 基础侧面与地基土之间的摩擦角  $\delta=12^\circ$ ; 在  $(u_a - u_w) \leq (u_a - u_w)_b$  时, 取吸力角  $\varphi^b = \varphi' = 22^\circ$ , 而当  $(u_a - u_w) > (u_a - u_w)_b$  时, 吸力角  $\varphi^b$  按式(2b)确定, 其中斜率  $\lambda_n = 0.0499$ , 并取截距  $\lambda_m = 5$  kPa。

同样基于非饱和土的抗剪强度统一解式(1) ( $m=1$ ), 张常光等<sup>[10]</sup>建立的基底完全粗糙时非饱和土条形地基的太沙基极限承载力公式为

$$\begin{cases} q_u = [c'_t + (u_a - u_w) \tan \varphi'_t] N_c^T + \gamma D N_q^T + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma^T, \\ N_q^T = \frac{\exp[(3\pi/2 - \varphi'_t) \tan \varphi'_t]}{\cos \varphi'_t} \tan(\pi/4 + \varphi'_t), \\ N_c^T = (N_q^T - 1) \cot \varphi'_t, \\ N_\gamma^T = 1.8(N_q^T - 1) \tan \varphi'_t. \end{cases} \quad (23)$$

式中,  $N_q^T$ ,  $N_c^T$ ,  $N_\gamma^T$  为基于非饱和土抗剪强度统一解的太沙基地基承载力系数, 其他符号及参数取值同前。

式(23)考虑了中间主应力和低基质吸力的影响, 但没有考虑高吸力即强度非线性的影响。当参数  $b=0$ ,  $(u_a - u_w)=0$  时, 式(23)退化为传统的饱和土条形地基太沙基极限承载力公式<sup>[14]</sup>。

本文非饱和土条形地基梅耶霍夫极限承载力式(20)与文献[10]太沙基极限承载力式(23)的计算结果比较, 如表1所示。当参数  $b=0$ ,  $(u_a - u_w)=0$  时, 式(20)、(23)分别退化为传统的饱和土条形地基的梅耶霍夫极限承载力公式与太沙基极限承载力公式, 此时二者均不能考虑中间主应力的影响, 也不能考虑非饱和特性即基质吸力的影响。鉴于式(23)不能反映高吸力即强度非线性的影响, 表1中的基质吸力  $(u_a - u_w)$  仅在小于进气值  $(u_a - u_w)_b=150$  kPa 的范围内进行讨论。

由表1可知, 针对基质吸力为零的饱和土, 且不考虑中间主应力影响即参数  $b=0$  时, 传统的梅耶霍夫极限承载力较传统的太沙基极限承载力要小, 这是由于太沙基理论将旁侧土的抗剪强度简化为均布荷载,

夸大了旁侧土的真实作用, 故太沙基极限承载力公式的计算结果偏大, 基于此的基础设计偏危险; 当地基土处于非饱和状态且基质吸力  $(u_a - u_w)$  不断增大时, 文献[10]太沙基极限承载力与本文梅耶霍夫极限承载力之间的差异不断减小, 即基质吸力的增强作用使得两种地基承载力理论因旁侧土处理方法造成的差异在减弱。由于考虑了非饱和土强度的中间主应力效应, 本文梅耶霍夫极限承载力  $q_u$  随统一强度理论参数  $b$  的增大而显著提高。

表1 极限承载力公式比较

Table 1 Comparison of formulations for ultimate bearing capacity

$(u_a - u_w)$ /kPa	Terzaghi 理论 ( $b=0$ )	$q_u$ /MPa				
		本文 Meyerhof 理论				
		$b=0$	$b=0.25$	$b=0.5$	$b=0.75$	$b=1$
0	1.18	0.96	1.19	1.40	1.58	1.76
30	1.42	1.23	1.52	1.78	2.02	2.24
60	1.67	1.51	1.86	2.17	2.46	2.72
90	1.91	1.78	2.19	2.56	2.90	3.20
120	2.16	2.06	2.53	2.95	3.34	3.68
150	2.40	2.33	2.86	3.34	3.77	4.16

### 3.3 承载力系数对比

由式(20)、(23)可以看出, 3类承载力系数是条形地基不同承载力理论公式推导和差异的关键。同时, 基底粗糙程度不同, 将使地基破坏滑动面的模式不同, 具体表现为图1中  $AC$  与水平面  $AB$  的夹角不同, 式(20)、(23)基于完全粗糙基底, 对应的夹角为  $45^\circ + \varphi'_t/2$ ; 若基底为完全光滑, 则  $AC$  与水平面  $AB$  的夹角为  $\varphi'_t$ 。实际基底粗糙程度处于完全光滑、完全粗糙之间, 较难实测和准确确定。

胡卫东等<sup>[18]</sup>将梅耶霍夫理论引入临坡条形地基承载力分析, 获得了基底完全光滑时临坡地基的梅耶霍夫承载力系数。按照文献[18]及2.2节的分析思路, 本文重新推导基底完全光滑时非饱和土条形地基梅耶霍夫承载力系数为

$$N_q^M = \frac{e^{2\theta \tan \varphi'_t}}{1 - \sin \varphi'_t \sin(2\eta + \varphi'_t)}, \quad (24a)$$

$$N_c^M = (N_q^M - 1) \cot \varphi'_t, \quad (24b)$$

$$N_\gamma^M = (N_q^M - 1) \tan(1.4\varphi'_t)。 \quad (24c)$$

由张常光等<sup>[10]</sup>可知, 基底完全光滑时非饱和土条形地基的太沙基承载力系数为

$$N_q^T = \tan^2 \left( \pi/4 + \frac{1}{2} \varphi'_t \right) e^{\pi \tan \varphi'_t}, \quad (25a)$$

$$N_c^T = (N_q^T - 1) \cot \varphi'_t, \quad (25b)$$

$$N_\gamma^T = 1.8(N_q^T - 1) \tan \varphi'_t。 \quad (25c)$$

将两种地基承载力理论不同基底粗糙程度所对应



表 2 承载力系数汇总

Table 2 Summary of bearing capacity factors

承载力理论		$N_q$	$N_c$	$N_\gamma$
基底完全粗糙	Terzaghi 理论	$N_q^T = \frac{\tan(\pi/4 + \varphi'_i)}{\cos \varphi'_i} e^{\left[\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi'_i\right) \tan \varphi'_i\right]}$	$N_c^T = (N_q^T - 1) \cot \varphi'_i$	$N_\gamma^T = 1.8(N_q^T - 1) \tan \varphi'_i$
	Meyerhof 理论	$N_q^M = \frac{(1 + \sin \varphi'_i) e^{2\theta \tan \varphi'_i}}{1 - \sin \varphi'_i \sin(2\eta + \varphi'_i)}$	$N_c^M = (N_q^M - 1) \cot \varphi'_i$	$N_\gamma^M = (N_q^M - 1) \tan(1.4\varphi'_i)$
基底完全光滑	Terzaghi 理论	$N_q^T = \tan^2\left(\pi/4 + \frac{1}{2}\varphi'_i\right) e^{\pi \tan \varphi'_i}$	$N_c^T = (N_q^T - 1) \cot \varphi'_i$	$N_\gamma^T = 1.8(N_q^T - 1) \tan \varphi'_i$
	Meyerhof 理论	$N_q^M = \frac{e^{2\theta \tan \varphi'_i}}{1 - \sin \varphi'_i \sin(2\eta + \varphi'_i)}$	$N_c^M = (N_q^M - 1) \cot \varphi'_i$	$N_\gamma^M = (N_q^M - 1) \tan(1.4\varphi'_i)$

的 3 类承载力系数进行汇总, 如表 2 所示。由表 2 可知, 两种地基承载力理论的承载力系数具有共性: ①超载承载力系数  $N_q$  的表达式差异较大, 取决于地基承载力理论和基底粗糙程度; ②黏聚力承载力系数  $N_c$  与超载承载力系数  $N_q$  的关系唯一, 与地基承载力理论和基底粗糙程度无关; ③重度承载力系数  $N_\gamma$  均为半经验公式, 与基底粗糙程度无关。

需要说明的是: 表 2 所有承载力系数均是基于非饱和土抗剪强度统一解式 (1) 而建立的, 针对的是非饱和土条形地基; 太沙基承载力系数仅为有效内摩擦角  $\varphi'$  和统一强度理论参数  $b$  的函数, 梅耶霍夫承载力系数还与图 1 中的两个夹角( $\beta, \eta$ )有关。传统的太沙基或梅耶霍夫承载力系数为参数  $b=0$  (对应统一有效内摩擦角  $\varphi'_i$ =有效内摩擦角  $\varphi'$ ) 即不考虑中间主应力影响时的结果,  $0 < b \leq 1$  时为一系列新的承载力系数。

本文梅耶霍夫承载力系数 ( $N_q^M, N_c^M, N_\gamma^M$ ) 与文献[10]太沙基承载力系数 ( $N_q^T, N_c^T, N_\gamma^T$ ) 随参数  $b$  的变化, 如图 9 所示。其中, 图 9 (a) 对应基底完全粗糙, 图 9 (b) 对应基底完全光滑。

由图 9 (a) 可知: 基底完全粗糙时, 两类承载力系数均随参数  $b$  的增大近似线性增加, 且梅耶霍夫承载力系数  $N_c^M, N_q^M$  大于太沙基承载力系数  $N_c^T, N_q^T$ , 但  $N_\gamma^M$  小于  $N_\gamma^T$ 。当参数  $b$  从 0 增大到 1 时,  $N_q^M, N_c^M, N_\gamma^M$  分别增大了 68.0%, 43.0%, 121.1%, 表明梅耶霍夫承载力系数受中间主应力的影响显著, 不考虑中间主应力即参数  $b=0$  对应的传统梅耶霍夫承载力系数最小, 且对  $N_\gamma^M$  的影响较  $N_c^M$  和  $N_q^M$  更明显, 太沙基承载力系数亦有类似变化。当参数  $b=0.5$  时, 太沙基理论式 (23) 中  $\gamma DN_q^T$  为 721.9 kPa, 本文梅耶霍夫理论式 (20) 中  $\sigma_0 N_q^M$  为 403.6 kPa, 明显小于太沙基理论中  $\gamma DN_q^T$  这一项, 由此可看出: 太沙基理论用均布荷载  $\gamma D$  代替基础旁侧土的抗剪强度, 虽省去了试算、作图确定等代应力  $\sigma_0$  的繁杂而便于工程应用, 但所得地基承载力却偏大, 基于此的基础设计将偏于危险。

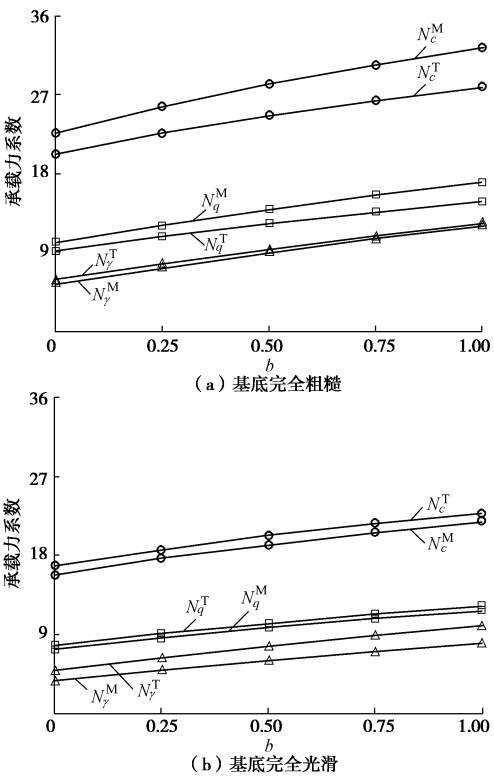


图 9 承载力系数对比

Fig. 9 Comparison of bearing capacity factors

由图 9 (b) 可知: 基底完全光滑时, 两类承载力系数随参数  $b$  的变化趋势与基底完全粗糙时一致, 但较基底完全粗糙时要小, 由此得出基底完全光滑时条形地基的极限承载力更小; 此时, 太沙基承载力系数  $N_c^T, N_q^T$  和  $N_\gamma^T$  均大于梅耶霍夫承载力系数  $N_c^M, N_q^M$  和  $N_\gamma^M$ , 故太沙基理论计算得到的地基承载力将明显大于梅耶霍夫理论的, 进而基于太沙基理论的基础设计将更偏于不安全。

4 参数分析

继续以 3.2 节算例为基础, 分析各因素对本文非饱和土条形地基梅耶霍夫极限承载力统一解即式(20)的影响特性, 包括中间主应力、基质吸力与有效强度参数。

#### 4.1 中间主应力

统一强度理论参数  $b$  反映的是土体强度的中间主应力效应与强度准则的选取, 参数  $b$  越大则中间主应力效应越强, 其中参数  $b=0$  即忽略中间主应力影响的 Mohr-Coulomb 强度准则是下限, 参数  $b=1$  即中间主应力与小主应力具有相同影响的双剪应力强度准则是上限。当基质吸力  $(u_a - u_w)=0, 75, 150$  kPa 时, 本文梅耶霍夫极限承载力式 (20) 随参数  $b$  的变化, 如图 10 所示。

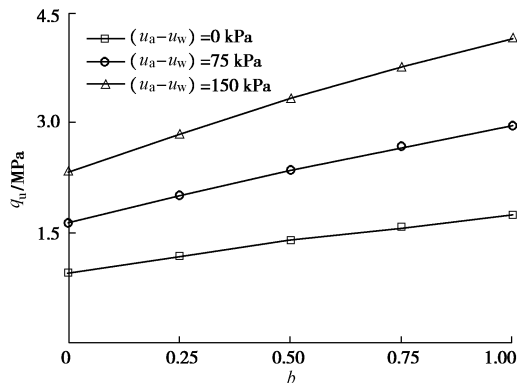


图 10 中间主应力的影响

Fig. 10 Influences of intermediate principal stress

由图 10 可知: 梅耶霍夫极限承载力  $q_u$  随参数  $b$  的增大线性增加。当  $(u_a - u_w)=75$  kPa 时, 参数  $b$  从 0 增加到 1, 极限承载力  $q_u$  从 1.64 MPa 增加到 2.96 MPa, 增大了 80.5%, 可见中间主应力对极限承载力  $q_u$  的影响十分显著, 故考虑中间主应力可以使地基土的承载潜能得到更充分的发挥, 从而降低工程的造价。

#### 4.2 基质吸力

由式 (2) 知: 吸力角  $\varphi^b$  在低吸力范围内等于有效内摩擦角  $\varphi'$ , 而在高吸力范围内  $\varphi^b$  随基质吸力的增大非线性减小。另据式 (1) 知: 基质吸力越高, 则吸力对非饱和土强度的提高作用越大; 相反, 高吸力时基质吸力越大则吸力角  $\varphi^b$  越小, 使得吸力对非饱和土强度的减弱作用亦越大, 即高吸力对非饱和土的强度具有双重作用, 进而影响本文梅耶霍夫地基极限承载力  $q_u$ , 如图 11 所示。

由图 11 可知: 在低吸力范围内即  $(u_a - u_w) \leq (u_a - u_w)_b = 150$  kPa 时, 梅耶霍夫极限承载力  $q_u$  随基质吸力的增大而线性增加; 当  $(u_a - u_w) = (u_a - u_w)_b = 150$  kPa 时,  $q_u$  达到最大值。当参数  $b=0.5$  时, 基质吸力  $(u_a - u_w)$  从 0 增大到 150 kPa,  $q_u$  由 1.4 MPa 增加到 3.34 MPa, 增大了 1.39 倍, 可见基质吸力对  $q_u$  具有明显的影响。在  $(u_a - u_w)=150$  kPa 时, 参数  $b=1$  时  $q_u$  比  $b=0$  时增大了 78.5%, 可更好地发挥地基土的承载潜能。而在大于 150 kPa 的高吸力范围内,  $q_u$  随  $(u_a - u_w)$  的增大逐渐减小, 并最终趋于稳定, 这是因为吸力角  $\varphi^b$  随高吸力的增大而非线性减小, 使得

高吸力对非饱和土强度的减弱作用大于对强度的提高作用, 且高吸力为 300 kPa 时两种作用的强弱基本相同。因此, 在工程实践中应充分认识高基质吸力对非饱和土强度的双重作用, 即非饱和土强度非线性的重要影响, 更准确地把握其对非饱和土地基承载力的贡献, 进而更好地利用非饱和地基土的强度潜能。

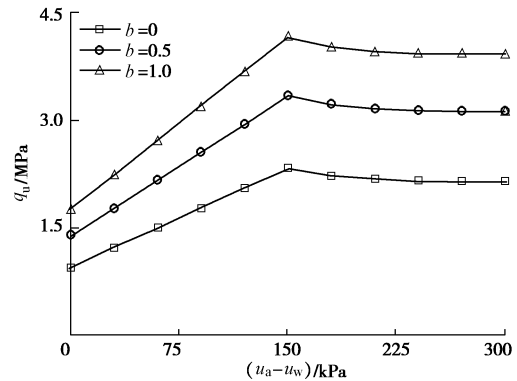
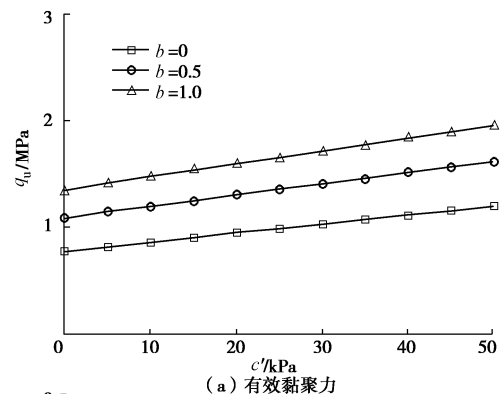


图 11 基质吸力的影响

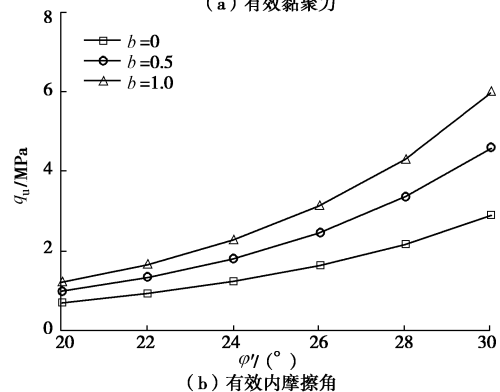
Fig. 11 Influences of matrix suction

#### 4.3 有效强度参数

有效强度参数  $c'$  和  $\varphi'$  是表征非饱和土强度的重要参数, 代表饱和状态下土体的黏结强度和摩擦强度, 其对非饱和土条形地基梅耶霍夫极限承载力  $q_u$  即式 (20) 的影响, 如图 12 所示, 其中参数  $b$  取 0, 0.5 和 1, 基质吸力  $(u_a - u_w)$  取为 30 kPa, 且因有效内摩擦角  $\varphi'$  的实际变化较小, 故令图 12 (b) 中有效内摩擦角  $\varphi'$  在  $20^\circ \sim 30^\circ$  范围内变化。



(a) 有效黏聚力



(b) 有效内摩擦角

图 12 有效强度参数的影响

Fig. 12 Influences of effective strength parameters

由图 12 (a) 可知: 梅耶霍夫极限承载力  $q_u$  随有效黏聚力  $c'$  增大而线性增加。当参数  $b$  取 0, 0.5, 1 时,  $c'=50$  kPa 时  $q_u$  比  $c'=0$  kPa 平均提高了 50%, 故有效黏聚力  $c'$  对  $q_u$  具有重要的影响, 且不同参数  $b$  对应的极限承载力  $q_u$  相互平行。

由图 12 (b) 可知: 梅耶霍夫极限承载力  $q_u$  随有效内摩擦角  $\varphi'$  增大而非线性增加。当  $b$  取 0, 0.5, 1 时,  $\varphi'=30^\circ$  时  $q_u$  比  $\varphi'=20^\circ$  分别提高了 3.04 倍、3.54 倍和 3.87 倍, 可见随着参数  $b$  的增大, 极限承载力  $q_u$  提高的幅度亦越大, 但不同参数  $b$  下的极限承载力  $q_u$  不再相互平行。

## 5 结 论

(1) 所建立的非饱和土条形地基的梅耶霍夫极限承载力统一解能综合考虑中间主应力效应、基质吸力和强度非线性影响, 具有广泛的理论意义。饱和土地基的梅耶霍夫极限承载力统一解、基于 Mohr-Coulomb 强度准则和双剪应力强度准则的非饱和土梅耶霍夫极限承载力公式均为本文解答的特例。

(2) 对比文献地基极限承载力的滑移线法解答、多块体上限法解答, 验证了本文梅耶霍夫极限承载力统一解的正确性和广泛适用性。基底粗糙程度显著影响承载力系数, 完全粗糙、完全光滑是两个极端情况, 前者的承载力系数明显高于后者, 且对应两种地基承载力理论的承载力系数相对大小亦不同。

(3) 非饱和土条形地基的梅耶霍夫极限承载力统一解的形式与太沙基极限承载力公式相似, 但其承载力系数却与太沙基理论不同, 归因于梅耶霍夫理论的滑动面与太沙基理论不同, 且合理考虑了旁侧土抗剪强度的影响。相反, 太沙基极限承载力夸大了旁侧土的真实作用, 造成计算结果偏大, 设计偏危险。

(4) 基质吸力对条形地基梅耶霍夫极限承载力具有双重影响: 在低吸力范围内, 极限承载力随基质吸力的增大而线性增加; 而在高吸力范围内, 极限承载力随基质吸力的增大而非线性减小, 并最终趋于稳定。应重视高吸力的双重作用即非饱和土强度非线性的影响, 实测基质吸力以优化基础设计。

(5) 随着统一强度理论参数的增大, 梅耶霍夫地基承载力系数及极限承载力均有明显的提高, 表明考虑中间主应力可以更好地发挥地基土的承载潜能。梅耶霍夫极限承载力随有效黏聚力和有效内摩擦角的增大而显著增加, 二者对地基承载力的影响亦不能忽视, 且有效内摩擦角的影响相对更大。

## 参考文献:

[1] 马少坤, 黄茂松, 刘怡林. 柔性和刚性浅基础的地基承载

能力分析[J]. 岩土力学, 2008, 29(12): 3375 - 3380. (MA Shao-kun, HUANG Mao-song, LIU Yi-lin. Analysis of bearing capacity of subsoil under flexible and rigid shallow foundations[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(12): 3375 - 3380. (in Chinese))

[2] 陈乐意, 姜安龙, 李镜培. 考虑地基土自重影响的地基承载力系数[J]. 岩土力学, 2012, 33(1): 215 - 219. (CHEN Le-yi, JIANG An-long, LI Jing-pei. Bearing capacity factors for foundations considering influence of soil weight[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(1): 215 - 219. (in Chinese))

[3] MA Z Y, LIAO H J, DANG F N. Influence of intermediate principal stress on the bearing capacity of strip and circular footings[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2014, 140(7): 04014041.

[4] 范 文, 白晓宇, 俞茂宏. 基于统一强度理论的地基极限承载力公式[J]. 岩土力学, 2005, 26(10): 1617 - 1622. (FAN Wen, BAI Xiao-yu, YU Mao-hong. Formula of ultimate bearing capacity of shallow foundation based on unified strength theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(10): 1617 - 1622. (in Chinese))

[5] 高江平, 俞茂宏, 李四平. 太沙基地基极限承载力的双剪统一解[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(15): 2736 - 2740. (GAO Jiang-ping, YU Mao-hong, LI Si-ping. Double-shear unified solution of Terzaghi ultimate bearing capacity of foundation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(15): 2736 - 2740. (in Chinese))

[6] 周小平, 张永兴. 利用统一强度理论求解条形地基极限承载力[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2003, 26(11): 109 - 112. (ZHOU Xiao-ping, ZHANG Yong-xing. The ultimate bearing capacity of foundation based on unified strength theory[J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 2003, 26(11): 109 - 112. (in Chinese))

[7] WUTTKE F, KAFLE B, LINS Y, et al. Macroelement for statically loaded shallow strip foundation resting on unsaturated soil[J]. International Journal of Geomechanics, ASCE, 2012, 13(5): 557 - 564.

[8] HOUSTON S L, PEREZ-GARCIA N, HOUSTON W N. Shear strength and shear-induced volume change behavior of unsaturated soils from a triaxial test program[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2008, 134(11): 1619 - 1632.

[9] 张常光, 胡云世, 赵均海. 平面应变条件下非饱和土抗剪强度统一解及应用[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(1): 32 - 37.

- (ZHANG Chang-guang, HU Yun-shi, ZHAO Jun-hai. Unified solution of shear strength for unsaturated soil under plane strain condition and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(1): 32 - 37. (in Chinese))
- [10] 张常光, 曾开华, 赵均海. 非饱和土临界荷载和太沙基极限承载力解析解[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2010, **38**(12): 1736 - 1740. (ZHANG Chang-guang, ZENG Kai-hua, ZHAO Jun-hai. Analytical solutions of critical load and Terzaghi's ultimate bearing capacity for unsaturated soil[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2010, **38**(12): 1736 - 1740. (in Chinese))
- [11] 李艳, 赵均海, 张常光. 非饱和土条形地基太沙基极限承载力三剪统一解[J]. 岩土力学, 2015, **36**(11): 3128 - 3134. (LI Yan, ZHAO Jun-hai, ZHANG Chang-guang. Triple-shear unified solution of Terzaghi's ultimate bearing capacity for unsaturated soil foundation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(11): 3128 - 3134. (in Chinese))
- [12] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, **16**(2): 1 - 10. (YU Mao-hong. Unified strength theory for geomaterials and its applications[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, **16**(2): 1 - 10. (in Chinese))
- [13] FREDLUND D C, MORGENSTEM N R, WIDGER R A. The shear strength of unsaturated soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1978, **15**(3): 313 - 321.
- [14] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1995. (QIAN Jia-huan, YIN Zong-ze. Geotechnical principle and calculation[M]. Beijing: China Water and Power Press, 1995. (in Chinese))
- [15] MEYERHOF G G. The ultimate bearing capacity of foundations[J]. Géotechnique, 1951, **2**(4): 301 - 332.
- [16] 范文, 俞茂宏, 林永亮, 等. 基于统一强度理论的地基极限承载力滑移线分析[J]. 工程地质学报, 2002, **10**(增刊): 558 - 562. (FAN Wen, YU Mao-hong, LIN Yong-liang, et al. Analysis of the slip lines for limited bearing capacity of the shallow strip foundation based on the unified strength theory[J]. Journal of Engineering Geology, 2002, **10**(S0): 558 - 562. (in Chinese))
- [17] 赵炼恒, 李亮, 杨峰, 等. 基于 SQP 和上限法的非饱和土条形基础极限承载力计算[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(增刊 1): 3021 - 3028. (ZHAO Lian-heng, LI Liang, YANG Feng, et al. Ultimate bearing capacity calculation of strip foundation on unsaturated soil with upper bound theorem and SQP method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(S1): 3021 - 3028. (in Chinese))
- [18] 胡卫东, 曹文贵. 基于 Meyerhof 理论的临坡地基极限承载力简化分析方法[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2015, **42**(1): 81 - 89. (HU Wei-dong, CAO Wen-gui. A simplified analysis method for the ultimate bearing capacity of ground foundation near slope based on the theory of Meyerhof[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2015, **42**(1): 81 - 89. (in Chinese))