

DOI: 10.11779/CJGE201802004

# 砂土各向异性与非共轴特性的本构模拟

陈洲泉<sup>1, 2</sup>, 黄茂松<sup>\*1, 2</sup>

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土与地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 在考虑组构各向异性的砂土状态相关本构模型的基础上, 引入了修正的非共轴流动法则建立了相应的非共轴本构模型。对于逆向加载的塑性问题, 比如纯环剪加载, 将通过引入边界面的概念进行处理。同时根据广义应力状态下的剪胀方程推导的塑性势面, 建立了  $\pi$  平面内的非关联共轴流动方向。另外, 将非共轴流动方向定义为同当前应力状态主方向正交的方向, 并同共轴流动方向一样与塑性加载因子相关联。对 Toyoura 砂的空心圆柱两种加载模式的剪切试验, 即固定主应力轴方向的单调加载和纯环剪切, 进行了模拟, 结果表明本模型能较好地描述砂土力学行为中的各向异性和非共轴特性。

**关键词:** 砂土; 临界状态; 状态相关组构各向异性; 非共轴流动法则; 弹塑性理论

**中图分类号:** TU441      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2018)02-0243-09

**作者简介:** 陈洲泉(1988-), 男, 湖南祁阳人, 博士研究生, 主要从事岩土工程数值计算方面的研究。Email: 294629613@qq.com。

## Constitutive modeling of anisotropic and non-coaxial behaviors of sand

CHEN Zhou-quan<sup>1, 2</sup>, HUANG Mao-song<sup>1, 2</sup>

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and

Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** A non-coaxial constitutive model is proposed from the elasto-plastic constitutive model based on the state-dependent critical state model considering the fabric anisotropy of sand. The bounding surface plasticity is introduced to deal with the reversal loading condition, such as pure rotation shear tests. And a potential surface is derived from the multiaxial formulation of the dilatancy equation, indicating the non-associated coaxial flow direction in the  $\pi$  plane. In addition, the non-coaxial flow direction is redefined as the orthogonal direction of the current principal stress and is affected by plastic loading index just as the coaxial flow direction. Two types of loading modes of hollow cylindrical shear tests on Toyoura sand are simulated by the model, namely tests with fixed principal stress axes and those with rotation of the principal stress axes. In comparison with the experimental data, the simulated results can reflect the characteristics of anisotropic plasticity and the variation of the non-coaxial phenomenon reasonably.

**Key words:** sand; critical state; state-dependence fabric anisotropy; non-coaxial flow rule; elasto-plastic theory

## 0 引言

在地震、波浪以及交通等荷载的作用下, 土体的应力主轴会发生旋转, 变形过程中还伴随非共轴现象, 即材料当前的主应力方向与塑性主应变率方向不一致。Roscoe<sup>[1]</sup>最先在单剪试验中指出了这种现象, 而 Arthur 等<sup>[2-3]</sup>的一系列方向剪切盒试验, 以及 Miura 等<sup>[4]</sup>和 Gutierrez 等<sup>[5]</sup>的空心圆柱试验, 则系统研究了这种非共轴现象的规律。从试验结果来看, 加载模式中的切应力增量  $d\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) 会促进材料沿该方向的塑性变形, 这一部分由应力增量产生的塑性变形使得总的塑性变形不再满足传统塑性理论所要求的共轴关系。因为, 根据传统的塑性理论, 决定塑性应变率方向的流

动法则是由当前的应力状态决定的, 包含了应力与塑性应变率共轴的条件。

为了调和传统理论与试验现象的矛盾, 考虑应力率对流动法则的影响, 建立了一类将塑性应变率划分为共轴项和非共轴项的弹塑性模型。这类模型基于 Rudnicki 等<sup>[6]</sup>早期的在光滑屈服面上增加“角点结构”的理论, 而所谓的非共轴塑性应变率便是由文中的“角点结构”的塑性应变率来定义。因此, 钱建固等<sup>[7]</sup>以

基金项目: 国家自然科学基金项目(11372228); 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)课题(2012CB719803)

收稿日期: 2016-09-17

\*通讯作者(E-mail: mshuang@tongji.edu.cn)

及 Qian 等<sup>[8]</sup>考虑了第三应力不变量的影响, 将此类非共轴塑性本构模型由二维应力空间推广到了三维应力空间。

基于上述的非共轴理论<sup>[6]</sup>, Yang 等<sup>[9-10]</sup>结合 Drucker-Prager 和 CASM 模型分别模拟了单剪试验中材料的非共轴行为。扈萍等<sup>[11]</sup>采用三维广义 Mohr-Coulomb 非共轴模型模拟了单剪和空心圆柱环剪试验, 结果表明该非共轴模型能够模拟岩石材料的非共轴现象。但是, 这些非共轴模型都是建立在各向同性本构模型的基础上, 无法考虑应力主轴旋转的试验中砂土力学行为中的各向异性; 另外, 对于固定主应力轴的单调剪切试验<sup>[2-5]</sup>中的非共轴行为, 上述模型也无法描述的。

通过试验业已证明砂土的各向异性同应力加载方向与砂土沉积方向的夹角有关。而从微观层面来看, 用于表征砂土颗粒分布特性的组构则是造成其各向异性的重要原因。Li 等<sup>[12]</sup>参考 Oda 等<sup>[13]</sup>提出的考虑各向异性组构张量的组合应力张量, 根据该应力张量不变量构造了一个各向异性状态变量, 并提出了各向异性临界状态线的概念, 从而建立了考虑原生各向异性的砂土临界状态本构模型。

以此模型为基础, Li 等<sup>[14]</sup>引入了张量正交化理论建立了非共轴塑性流动机制, 以此考虑变形的非共轴性, 但是形式过于复杂。而 Lashkari 等<sup>[15]</sup>则采用 Dafalias 等<sup>[16]</sup>提出的各向异性本构模型为基本框架, 根据 Gutierrez 等<sup>[5]</sup>总结的主应力旋转试验规律, 在  $X - Y$  ( $X = (\sigma_z - \sigma_\theta)/2$ ,  $Y = \sigma_{z\theta}$ ) 应力空间内建立相应的边界面, 将当前应力点在边界面上的映射应力点切向方向作为非共轴流动方向, 通过非共轴函数将共轴塑性应变率同非共轴塑性应变率的耦合起来, 以此模拟砂土的非共轴变形特征。不过对于更为一般的情况(非  $X-Y$  应力空间下), 该非共轴流动法则应该如何描述还需探讨。

基于上述认识, 本文建立了一种更为简单的各向异性临界状态非共轴本构模型。本模型沿用 Li 等<sup>[12]</sup>的各向异性状态变量的定义方法, 修改了状态变量和各向异性临界状态线的形式, 并将表征应力增量方向的单位张量在当前应力状态主方向的切向上的分解量作为非共轴流动方向, 该非共轴流动方向同共轴流动方向一样受塑性标量因子的影响。同时, 引入边界面的概念用以考虑卸载过程中的塑性问题。最终, 对 Toyoura 砂的空心圆柱扭剪试验进行模拟, 并同试验结果进行对比已验证模型的有效性。

## 1 砂土状态相关各向异性非共轴本构模型

本文在笔者<sup>[17]</sup>提出的各向同性非共轴模型的基

础上, 引入与砂土组构相关的状态变量以考虑砂土的各向异性特性。

### 1.1 屈服函数

在加载过程中, 砂土的屈服满足广义莫尔库仑法则, 即

$$f = q - Mg(\theta)p = 0 \quad , \quad (1)$$

式中,  $p = \frac{\sigma_{kk}}{3}$  为平均主应力,  $q = \sqrt{3J_2}$  为等效偏应力, 而  $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$  为应力第二不变量,  $J_3 = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki}$  为应力第三不变量,  $\theta = -\frac{1}{3}\arcsin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right)$  为应力 Lode 角,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij}$  为应力偏量,  $M$  作为硬化参数, 表征的是三轴压缩状态下的应力比。那么其他 Lode 角对应的屈服应力比由椭圆形状函数  $g(\theta)$  插值得到, 形式参考 Papadimitriou 等<sup>[18]</sup>提出的形式:

$$g(\theta) = \frac{4c}{1+c+(1-c)\sin(3\theta)} - \frac{1+c-(1-c)\sin(3\theta)}{2} \quad , \quad (2)$$

式中,  $c$  为三轴拉伸与三轴压缩状态下的应力比比值, 且符号规定为以压为正。需要指出的是式(2)与 Li 等<sup>[14]</sup>所采用的形状函数在描述 Toyoura 砂的强度特性上具有较好的一致性, 并且此形式更为简洁。

### 1.2 各向异性临界状态

根据材料状态相关临界状态理论, 砂土的松密程度可采用 Been 等<sup>[19]</sup>提出的状态参数  $\psi$  来表征, 该参数与砂土的密实度和有效平均压力相关, 形式为

$$\psi = e - e_c \quad , \quad (3)$$

式中,  $e$  为当前孔隙比,  $e_c$  为相同压力下的临界孔隙比。对于加载方向同砂土沉积方向不一致的情况, Li 等<sup>[12]</sup>指出状态参数还同组构各向异性相关, 并且引入各向异性状态变量  $A$ , 提出了各向异性临界状态线的概念, 即

$$e_c = e_r(A) - \lambda_c(p/p_a)^\xi \quad , \quad (4)$$

式中,  $\lambda_c$  和  $\xi$  均为材料参数, 可由三轴压缩试验获得  $e-p$  平面的临界状态线标定<sup>[20]</sup>,  $p_a$  为大气压强,  $e_r(A)$  是关于  $A$  的函数, 表示临界状态线同  $e-p$  平面纵坐标轴的截距。

本文中的各向异性状态变量  $A$  采用黄茂松等<sup>[21]</sup>提出的形式:

$$A = \frac{\hat{R}}{M_{cs}g(\hat{\theta})} - \left( \frac{\hat{R}}{M_{cs}g(\hat{\theta})} \right)_c \quad , \quad (5)$$

式中,  $M_{cs}$  为临界状态应力比,  $\hat{R} = \sqrt{3\hat{r}_{ij}\hat{r}_{ii}/2}$  为组合应力比偏量的第二不变量,  $\hat{\theta} = -[\sin^{-1}(9\hat{r}_{ij}\hat{r}_{jk}\hat{r}_{ki}/2\hat{R}^3)]/3$  为对应的应力 Lode 角。对应的组合应力张量的定义为

$$\hat{T}_{ij} = \frac{1}{6}(\hat{\sigma}_{ik}F_{kj}^{-1} + F_{ik}^{-1}\hat{\sigma}_{kj}) = \hat{p}(\hat{r}_{ij} + \delta_{ij}) \quad , \quad (6)$$

式中,  $F_{ij}^{-1}$  为组构张量  $F_{ij}$  的逆张量,  $\hat{\sigma}_{ij}$  为加载应力张量。那么,  $\hat{p} = \hat{T}_{ii}/3$  组合应力的平均主应力,  $\hat{s}_{ij} = \hat{T}_{ij} - \hat{p}\delta_{ij}$  为组合应力偏量,  $\hat{r}_{ij} = \hat{s}_{ij}/\hat{p}$  则为组合应力比偏量。而组构张量  $F_{ij}$  采用 Oda 等<sup>[13]</sup>定义的形式:

$$F_{ij} = \frac{1}{3+\Delta} \begin{bmatrix} 1-\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 1+\Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1+\Delta \end{bmatrix} \quad , \quad (7)$$

式中,  $\Delta$  为可以测量的各向异性参数。

需要指出的是由式(5)定义的状态变量  $A$  可以视为关于主应力轴旋转角  $\alpha$  的函数(如图1所示, 对于空心圆柱剪切试验, 本文旋转角  $\alpha$  定义为大主应力方向与竖直方向的夹角), 其随  $\alpha$  的变化规律如图2所示。而式(5)中项  $\left(\frac{\hat{R}}{M_{cs}g(\hat{\theta})}\right)_c$  表示为三轴压缩状

态下  $\frac{\hat{R}}{M_{cs}g(\hat{\theta})}$  的值, 该值不随主应力夹角  $\alpha$  变化, 只跟  $M_{cs}$  及  $\Delta$  的值有关。

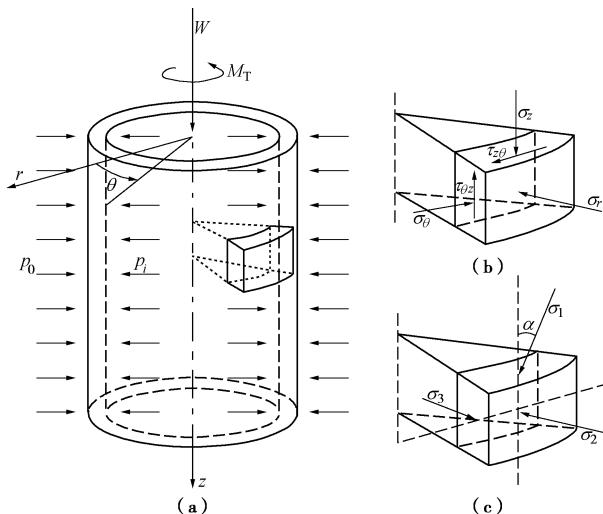


图1 空心圆柱试样的加载方式及应力状态

Fig. 1 Applied loads and stress components in a hollow cylinder

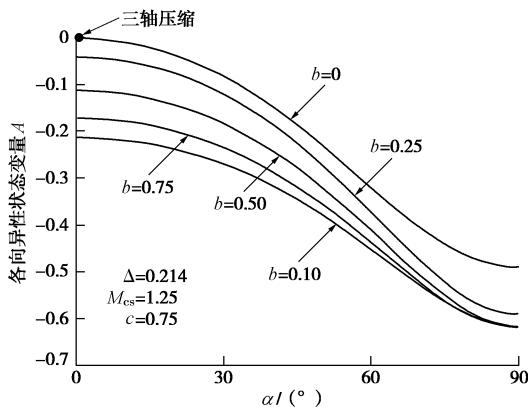


图2 各向异性状态变量  $A$  随旋转角  $\alpha$  的变化

Fig. 2 Anisotropic state variable  $A$  versus rotation angle  $\alpha$

基于这种形式的各向异性状态变量, 对各向异性临界状态线作了相应的修改, 形式为

$$e_c = e_{\Gamma 0} + k_{\Gamma} A \exp\left(\frac{b}{b+k_c} \sin 2\alpha\right) - \lambda_c (p/p_a)^{\xi} \quad , \quad (8)$$

式中,  $e_{\Gamma 0}$ ,  $k_{\Gamma}$  和  $k_c$  为材料参数,  $b$  为中主应力比。其中, 参数  $k_c$  则需三轴拉伸临界状态线同三轴压缩临界状态线的相对位置标定, 以 Yang 等<sup>[22]</sup>的试验作为标定依据。参数  $k_c$  用于表征三轴拉伸旋转角  $\alpha$  为  $60^\circ$  左右时, 临界线偏离了三轴压缩线的程度。不同的临界状态线偏离三轴压缩线的程度可由项  $A \exp\left(\frac{b}{b+k_c} \sin 2\alpha\right)$  的变化规律来反映, 如图3所示。

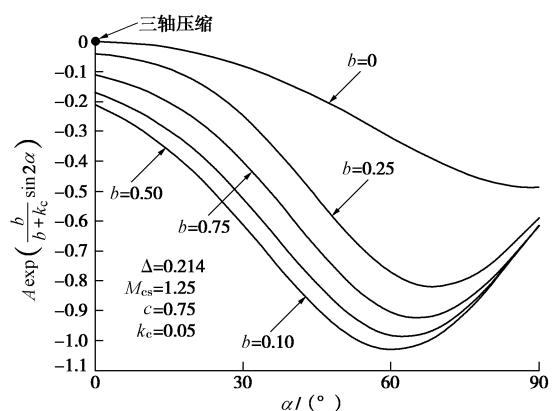


图3  $A \exp\left(\frac{b}{b+k_c} \sin 2\alpha\right)$  随旋转角  $\alpha$  的变化

Fig. 3  $A \exp\left(\frac{b}{b+k_c} \sin 2\alpha\right)$  versus rotation angle  $\alpha$

值得注意的是式(8)的临界状态线形式暗含了一个假设, 即在一种加载模式中, 旋转角  $\alpha$  在  $60^\circ$  左右时对应的临界状态线位置距离三轴压缩线位置最远。

### 1.3 塑性模量及弹性常数

同时, 加载情况下的塑性模量也受各向异性状态变量影响, 其形式为

$$H_L = \frac{hG(M_p - M)}{M} \quad , \quad (9)$$

式中,  $M_p = M_{cs}e^{-n\alpha}$  为峰值应力比,  $n$  为材料参数。由峰值应力比的定义可知, 峰值应力比  $M_p$  具有同图3所示曲线一样的变化规律, 其值随旋转角  $\alpha$  的增大, 先减小然后增大。 $h$  是关于  $e$  和  $A$  的函数, 形式为

$$h = (h_1 - h_2 e)(1 + k_h A) \quad , \quad (10)$$

式中,  $h_1$ ,  $h_2$  和  $k_h$  为材料常数, 其中  $k_h$  用于表征三轴拉伸时状态变量对于塑性模量的影响程度。参数  $G$  为材料的弹性剪切模量, 表达式为

$$G = G_0 \frac{(2.97 - e)^2}{1 + e} \sqrt{pp_a} \quad , \quad (11)$$

式中,  $G_0$  为材料参数, 相应的弹性体积模量为

$$K = G \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} , \quad (12)$$

式中,  $\nu$  为泊松比。

#### 1.4 塑性势函数

根据 Li 等<sup>[23]</sup>提出的三轴压缩状态下的剪胀方程, 塑性体应变率  $d\varepsilon_v^p$  与等效塑性偏应变率  $d\varepsilon_s^p$  满足

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{d_0}{M_{cs}} (M_d - M) , \quad (13)$$

式中,  $M_d = M_{cs} e^{m\theta}$  为状态转换应力比,  $m$  和  $d_0$  为材料参数。由于广义应力状态下屈服应力满足  $q/p = Mg(\theta)$ , 那么该方程的广义形式可以写为

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{d_0}{M_{cs}} \left[ M_d - \frac{q}{pg(\theta)} \right] . \quad (14)$$

该形式与 Li 等<sup>[12]</sup>提出的广义形式等效, 而与式 (14) 相对应的塑性势函数形式为

$$Q = q + \frac{A_q g(\theta)}{g(\theta) - A_q} M_d p \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{A_q}{g(\theta)} - 1} \right] = 0 , \quad (15)$$

式中  $A_q = d_0 / M_{cs}$ ,  $p_0$  为塑性势面的尺寸参数, 由定义势面的应力状态决定, 而不同应力状态塑性势面同屈服面的关系如图 4 所示。从图中可以看出塑性势面都是相似的, 在定义塑性势面的应力点处同屈服面相交, 且势面的曲率比屈服面的曲率更小, 即满足  $\frac{\partial Q}{\partial \theta} < \frac{\partial f}{\partial \theta}$ 。这种新形式的势面表明流动法则在  $\pi$  平面上也是非关联的。

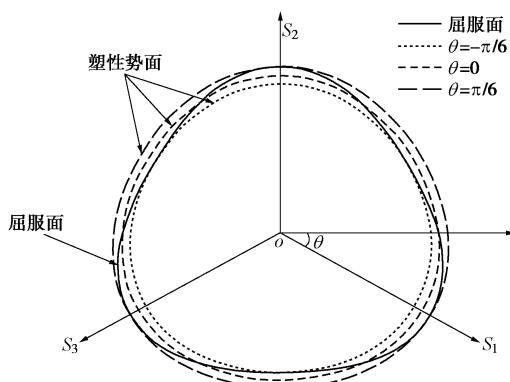


图 4  $q-\theta$  空间内的塑性势面与屈服面

Fig. 4 Potential and yield surfaces in  $q-\theta$  space

#### 1.5 非共轴流动法则

参考 Qian 等<sup>[8]</sup>广义应力空间内定义非共轴流动方向所采用的 Gram-Schmidt 张量正交化方法, 将单位应力增量  $n_{ij}^{d\sigma}$  分解到当前应力主方向的正交方向, 改进了原有的非共轴流动方向的定义, 关于这种定义方式在文献[17]做了详细的讨论, 其具体形式为

$$n_{ij}^{\text{non}} = n_{ij}^{d\sigma} - \frac{n_{kl}^{d\sigma} S_{kl}^p}{S_{mn}^p S_{mn}^p} S_{ij}^p - \frac{n_{kl}^{d\sigma} S_{kl}^p}{S_{mn}^p S_{mn}^p} S_{ij}^p , \quad (16)$$

式中,  $n_{ij}^{d\sigma} = \frac{d\sigma_{ij}}{\|d\sigma\|}$  为单位应力增量, 而当前应力状态

对应的主偏应力为  $s_{kl}^p$ , 形式为

$$s_{ij}^p = \frac{2}{3} q \begin{bmatrix} \sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \end{bmatrix} , \quad (17)$$

$$\text{而 } S_{ij}^p = S_{ik}^p S_{kj}^p - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} - \frac{3J_3}{2J_2} S_{ij}^p .$$

由于在试验中砂土越接近临界状态, 变形的非共轴现象越弱, 并且具有各向异性特征, 所以参考 Lashkari 等<sup>[15]</sup>建立非共轴函数将共轴项和非共轴项耦合的方法, 将非共轴塑性应变增量改为

$$d\varepsilon_{ij}^{pn} = d\lambda \left( 1 - \frac{M}{M_p} \right)^\chi k_n n_{ij}^{\text{non}} , \quad (18)$$

式中,  $\chi$ ,  $k_n$  为材料参数, 用于控制非共轴应变的量级。

于是, 总的流动法则为

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \left[ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} + \left( 1 - \frac{M}{M_p} \right)^\chi k_n n_{ij}^{\text{non}} \right] . \quad (19)$$

## 2 边界面的引入

在由  $q-\theta$  表征的  $\pi$  平面上, 几种典型的荷载模式如图 5 所示。对于屈服面上的某一应力点处, 比例加载定义为应力增量方向过坐标原点的情况, 非比例加载则为不过原点的情况, 而对于纯环剪加载模式, 由于  $p$ ,  $q$ ,  $\theta$  在整个加载过程中保持不变, 所以在图 5 中表示为屈服面上一个位置不动的点, 而当应力增量方向同屈服面法线夹角为钝角时, 即  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$ , 则

为卸载情况。而在由  $q-\alpha$  表征的  $\pi$  平面上, 屈服面则被表示为绕坐标原点的圆, 其对应的应力路径, 如图 6 所示。需要注意的是在整个纯环剪过程中, 应力增量方向同屈服面法线方向的夹角始终为钝角。

若按照传统的塑性理论, 图 5, 6 表示的卸载情况在整个加载过程无塑性变形产生, 因为理论上塑性变形往往由塑性加载因子来决定, 其定义为

$$d\lambda = \begin{cases} \frac{n_{ij}^p d\sigma_{ij}}{H_L} & (n_{ij}^p d\sigma_{ij} > 0) \\ 0 & (n_{ij}^p d\sigma_{ij} < 0) \end{cases} , \quad (20)$$

式中,  $n_{ij}^p$  为塑性加载方向, 通常取为  $n_{ij}^p = \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}}$ ,  $H_L$  为加载状态下的塑性模量。易知当  $n_{ij}^p d\sigma_{ij} < 0$  时, 即卸载情形, 是无塑性变形产生的; 而对于应力路径在屈服面内变化的情况, 也是无塑性变形产生的。这两种加载情况可以统归为逆向加载情况。然而在实际情况中, 土体的塑性变形在这两种情况下是仍然存在的。对于逆向加载情况, 可引入边界面的概念, 定义为

$$F = \bar{q} - M_p g(\bar{\theta}) \bar{p} = 0 \quad , \quad (21)$$

式中,  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{\theta}$  为边界面上映射虚应力对应的不变量,  $M_p$  为峰值应力比。

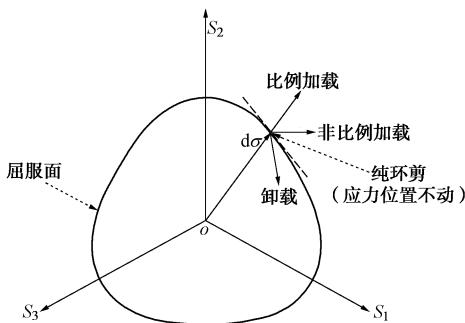


图 5  $q-\theta$  空间内的应力路径

Fig. 5 Stress paths in  $q-\theta$  space

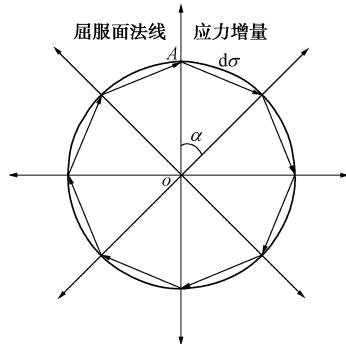


图 6  $q-\alpha$  空间内纯环剪的应力路径

Fig. 6 Stress paths of pure rotation shear in  $q-\alpha$  space

除了借鉴 Wang 等<sup>[24]</sup>采用的径向映射<sup>[25]</sup>和应力率方向映射法则<sup>[26]</sup>, 本文还将增加中心映射法则以对屈服面内应力率的加卸载情况进行判断。如图 7 所示, 在  $q-\theta$  空间内, 中心映射沿为坐标原点  $O$  到当前应力点  $s_{ij}$  的方向, 径向映射沿映射中心  $\omega_{ij}$  到当前应力点的方向, 而应力率映射沿应力增量的方向。3 种映射法则满足如下关系

$$\bar{s}_{ij}^1 = R_1 s_{ij} \quad (\text{中心映射}) \quad , \quad (22a)$$

$$\bar{s}_{ij}^2 - \omega_{ij} = R_2 (s_{ij} - \omega_{ij}) \quad (\text{径向映射}) \quad , \quad (22b)$$

$$\bar{s}_{ij}^3 - s_{ij} = R_3 d\sigma_{ij} \quad (\text{应力率映射}) \quad . \quad (22c)$$

式中  $\bar{s}_{ij}^1$ ,  $\bar{s}_{ij}^2$ ,  $\bar{s}_{ij}^3$  分别为不同映射在边界面上的虚

应力点;  $R_1$  为中心映射的比值,  $R_2 = \bar{\rho} / \rho$  为径向映射的比值,  $\bar{\rho}$ ,  $\rho$  为应力点之间的距离;  $R_3$  为应力率映射的比值,  $d\sigma_{ij}$  为应力增量  $d\sigma_{ij}$  的偏量。图 8 则为  $q-\alpha$  空间内的映射法则, 同样满足式 (22a)、(22b)、(22c) 中描述的关系。

这里需要指出的是当前应力状态的加载模式为卸载时, 映射中心的位置更新为当前应力点。而对于处在屈服面内的应力路径,  $n_{ij} d\sigma_{ij} < 0$ , 表示为卸载情况。其中,  $n_{ij}$  为映射在边界或屈服面上虚应力点所对应的单位法线方向, 虽然虚应力点位置不同, 但是两者的方向一致。而  $n_{ij} d\sigma_{ij} > 0$ , 则表示为加载情况, 映射中心位置不进行更新。

另外, 从图 7, 8 中可以看出由应力率映射得到的虚应力点  $\bar{s}_{ij}^3$  对应的边界面上的单位法向  $\bar{n}_{ij}$  同应力增量方向的夹角始终为锐角, 定义塑性加载方向  $n_{ij}^p = \bar{n}_{ij}$ , 即可使得整个逆向加载过程中的塑性标量因子为非负值。出于同样的目的, Wang 等<sup>[24]</sup>则将塑性加载方向定义为  $n_{ij}$  与  $\bar{n}_{ij}$  的插值形式。

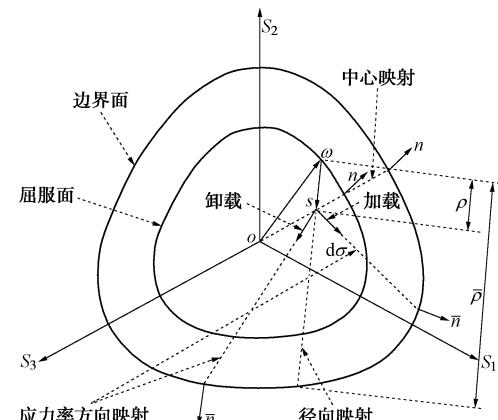


图 7  $q-\theta$  空间内的映射法则

Fig. 7 Mapping rules in  $q-\theta$  space

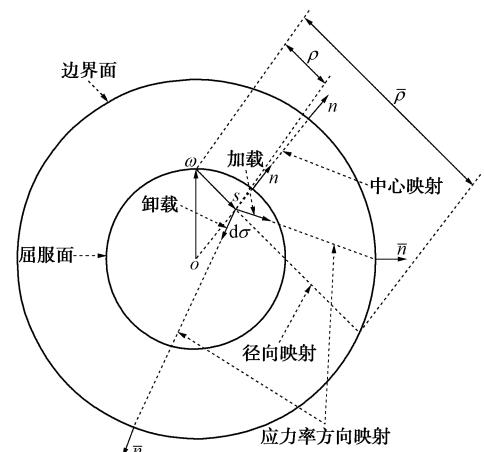


图 8  $q-\alpha$  空间内的映射法则

Fig. 8 Mapping rules in  $q-\alpha$  space

表1 模型参数

Table 1 Parameters of model

弹性参数	临界状态参数	剪胀参数	硬化参数	各向异性参数	非共轴参数	边界面插值参数
	$M_{cs} = 1.38$					
	$c = 0.75$					
$G_0 = 100$	$e_T = 0.934$	$d_0 = 0.38$	$h_1 = 3.15$	$\Delta = 0.28$	$k_n = 2$	
$\nu = 0.25$	$\lambda_c = 0.019$	$m = 3.5$	$h_2 = 3.05$	$k_h = 0.5$	$\chi = 0.5$	$\gamma = 0.5$
	$\xi = 0.7$		$n = 2.1$	$k_c = 0.05$		
	$k_T = 0.15$					

根据 Pastor 等<sup>[27]</sup>提出的广义塑性模型中的相关理念, 逆向加载的塑性模量  $H_u$  可以通过映射中心  $\omega_{ij}$  从当前应力点  $s_{ij}$  以及径向映射虚应力点  $\bar{s}_{ij}^2$  的距离关系来进行插值, 形式为

$$H_u = H_L R_2^\gamma, \quad (23)$$

式中,  $\gamma$  为材料参数, 同孔隙比  $e$  及初始峰值应力比相关, 本文暂取为常数。那么, 逆向加载的塑性模量因子则表示为

$$d\lambda = \frac{\bar{n}_{ij} d\sigma_{ij}}{H_u}. \quad (24)$$

### 3 Toyoura 砂非共轴特性本构模拟

空心圆柱扭剪试验既能够研究比例加载情况下土体的响应, 还能够研究非比例加载等复杂应力条件下土体的响应, 尤其是包含主应力轴旋转的条件。因此, 下面将采用本文所建立的基于状态相关概念考虑各向异性的砂土非共轴模型, 分别对 Miura 等<sup>[4]</sup>和 Gutierrez 等<sup>[5]</sup>的 Toyoura 砂空心圆柱剪切试验进行数值模拟。模型相关参数如表 1 所示, 相对于 Li 等<sup>[12]</sup>和黄茂松等<sup>[21]</sup>采用的状态相关各向异性砂土模型, 本文在其基础上增加的参数有  $k_c$ ,  $k_n$ ,  $\chi$  和  $\gamma$ 。因此, 除上述 4 个参数以外的其他参数, 其标定方法可以参考 Li 等<sup>[12, 23]</sup>、黄茂松等<sup>[21]</sup>以及 Yang 等<sup>[22]</sup>的论述, 本文不再重复。根据 Yang 等<sup>[22]</sup>标定各向异性临界状态线的试验, 参数  $k_c$  是通过拟合  $e-p$  平面内三轴拉伸情况下旋转角  $\alpha$  为  $60^\circ$  时的临界状态线来标定的。前文中论述的此状态下临界线离三轴压缩线的距离最远这个假设还需后续的试验研究来验证。对于表 1 中的两个非共轴参数  $k_n$  和  $\chi$  则需通过两组  $\alpha \neq 0^\circ$  和  $\alpha \neq 90^\circ$  的固定主应力轴夹角的单调加载试验来标定, 可利用

$$\chi = \ln\left(\frac{d\epsilon_{z\theta}^{p1}}{d\epsilon_{z\theta}^{p2}}\right) / \ln\left(\frac{1-M/M_{p1}}{1-M/M_{p2}}\right) \quad (25)$$

得到。标定中需要两组  $\epsilon_{z\theta} - M - \epsilon_s^p$  或  $(d\epsilon_{z\theta}^p - M - \epsilon_s^p)$  曲线, 式中  $M_{p1}$  和  $M_{p2}$  为两组曲线对应的峰值应力比, 参数  $k_n$  可在  $\chi$  确定后通过拟合其中一条  $d\epsilon_{z\theta}^p -$

$M - \epsilon_s^p$  曲线来标定。而参数  $\gamma$  主要是用于表征逆向加载过程中, 塑性模型的变化情况, 其确定方法同本文提到的考虑逆向加载的边界面<sup>[24-27]</sup>模型类似, 是以三轴压缩的循环加载试验数据为参考, 采用试错的方法标定参数。

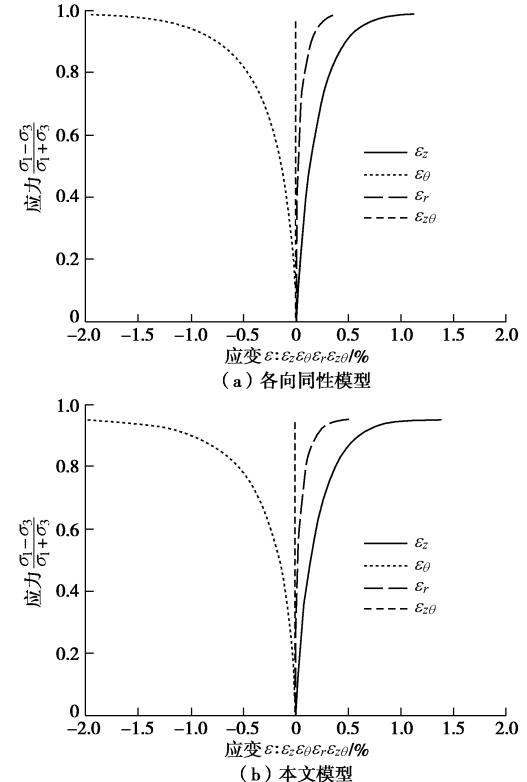
#### 3.1 固定应力主轴方向的单调加载

在固定应力主轴方向  $\alpha$  的单调加载试验中, 采取应力控制的方式, 在排水条件下进行加载: 保持平均主应力  $p$  不变, 中主应力系数  $b=0.5$ , 增加应力比  $(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3) = \sin \phi_m$  直至破坏 (式中  $\phi_m$  为发挥摩擦角), 其应力增量可由下式表示:

$$d\sigma_{ij} = \frac{dq}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & 0 & \sin(2\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin(2\alpha) & 0 & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

式中,  $dq$  为等效偏应力增量。从式 (26) 中可以看出,  $\alpha=0^\circ$  和  $\alpha=90^\circ$  时, 应力增量中无剪应力。

对于应力主轴夹角  $\alpha=0^\circ$  和  $\alpha=60^\circ$  的情况, 模拟和试验结果<sup>[4]</sup>如图 9, 10 所示。



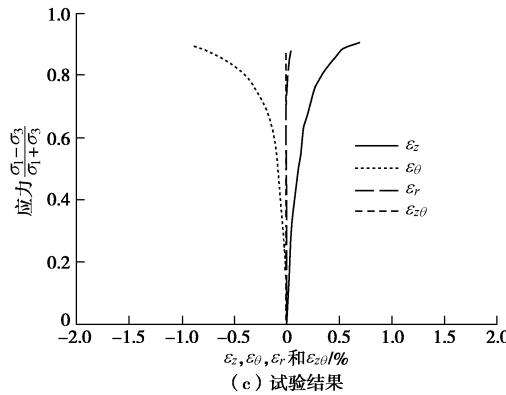
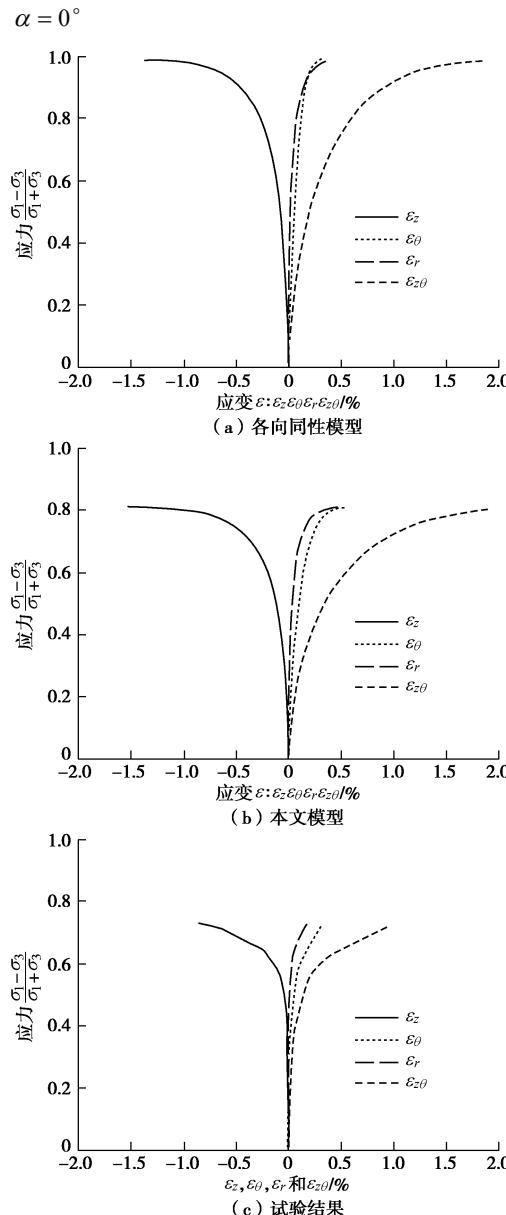
图 9 夹角  $\alpha = 0^\circ$  的模拟与试验<sup>[4]</sup>的结果Fig. 9 Results of simulations and experiments<sup>[4]</sup> at rotation angle图 10 夹角  $\alpha = 60^\circ$  的模拟与试验<sup>[4]</sup>结果Fig. 10 Results of simulations and experiments<sup>[4]</sup> at rotation angle $\alpha = 60^\circ$ 

图 9 (a)、10 (a) 为采用文献[17]中各向同性非共轴模型模拟的结果, 可以看出各向同性模型的模拟

结果具有相同的峰值应力比, 比本文模型结果(如图 9 (b)、10 (b) 所示)都要大。由于本文模型峰值应力比  $M_p$  与 Lode 角及  $\alpha$  相关, 所以各向同性模型的峰值应力比要比本文模型的峰值应力比大。而在 Lode 角一致的情况下  $\alpha = 0^\circ$  的峰值应力比大于  $\alpha = 60^\circ$  的, 所以模拟的结果表现为  $\alpha = 0^\circ$  曲线趋向的峰值应力比大于  $\alpha = 60^\circ$  的情况, 以上结果表明本文模型能够较好地反映出单调加载试验砂土变形的各向异性特征。

### 3.2 空心圆柱纯应力主轴旋转剪切试验

在排水条件下, 进行纯应力主轴旋转剪切试验时, 需要保持平均主应力  $p$  和应力比不变, 中主应力系数仍满足  $b=0.5$ , 仅仅改变应力主轴方向。该加载模式在  $q-\alpha$  空间的应力路径如图 6 所示。而应力增量随旋转角的变化如图 11 所示。

对各向同性固结的砂土, 先固定的主应力方向单调加载满足  $(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3) = \sin \phi_m = 0.5$  时, 再进行主应力轴旋转加载。图 12 为初始方向角  $\alpha = 0^\circ$  是本文模型模拟的应变随方向角变化的曲线, 图 13 为与之对应的应变路径曲线。图 12 中  $\epsilon_r$  在整个过程不为 0, 则说明试验过程中材料遵循共轴流动法则发生了塑性变形。而  $2\alpha = 360^\circ$  时  $\epsilon_{z\theta}$  不等于 0 表明存在非共轴流动。

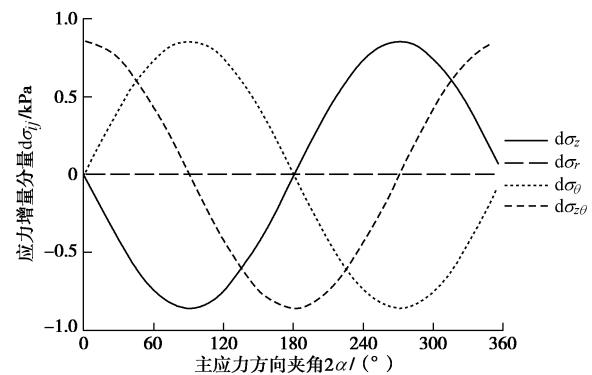
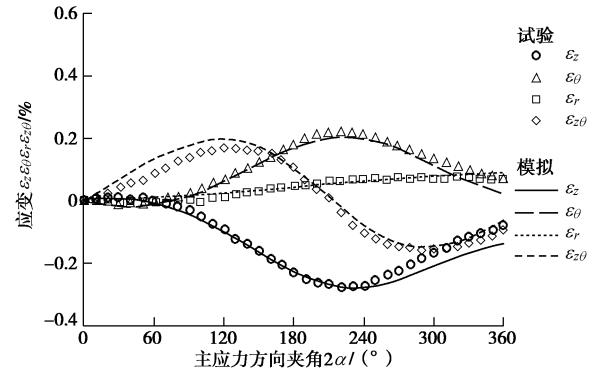
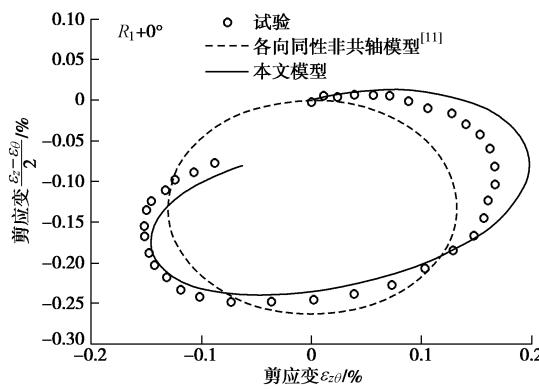


图 11 应力增量与主应力方向夹角

Fig. 11 Stress increments and principal stress directions

图 12 应变与主应力方向夹角(模拟与试验<sup>[4]</sup>)Fig. 12 Strains and principal stress directions (simulation and experiment<sup>[4]</sup>)

图 13 扭剪的应变路径 (模拟与试验<sup>[4]</sup>)Fig. 13 Rotational strain paths (simulation and experiment<sup>[4]</sup>)

文献[17]的各向同性非共轴模型无法处理主应力纯旋转的加载情况, 所以图 13 中比较了文献[11]中的各向同性非共轴模型与本文模型的模拟结果。由于主应力轴纯旋转按照传统弹塑性理论是一个卸载过程, 所以该各向同性非共轴模型模拟的塑性应变只包含非共轴项, 而且其应变的变化规律与图 11 中的应力增量变化规律一致, 反映在图 13 中的应变路径则显示是一个圆。而新的非共轴流动法则能克服此缺陷, 更为接近试验结果。

图 14 为在初始夹角为 0° 情况下, 单调剪切至不同应力比 (对应于  $\phi_m = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ ), 然后进行纯扭剪所得到的主应力方向夹角同应变增量方向夹角之间关系的模拟结果, 并同 Gutierrez<sup>[5]</sup>的试验进行对比。相比于图 12, 13, 图 14 更为直接地反映了本文模型模拟砂土非共轴特性的效果。其中, 各向同性非共轴模型<sup>[11]</sup>模拟的非共轴线则不随应力比  $\phi_m$  的变化而变化, 在图中始终为一条线, 同应力增量主轴夹角的变化规律一致。本文模型则能区分这 3 条非共轴线, 而这是由本文的非共轴定义方式所决定的。由于

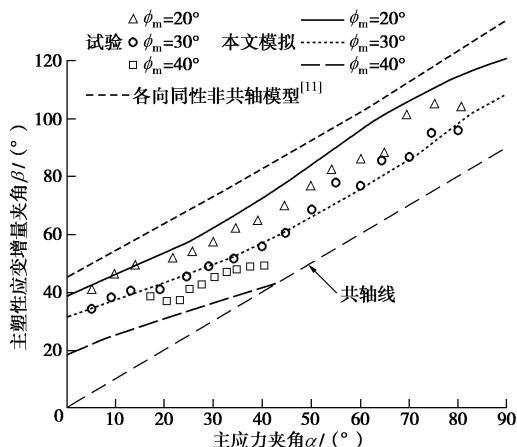


图 14 主应力方向夹角和塑性主应变夹角

Fig. 14 Rotation angles of principal stress and plastic principal strain rate

本文非共轴流动法则式(30)中包含了项  $(1 - M/M_p)$ , 所以模拟结果能够反映试验中非共轴线随  $\phi_m$  的变化规律。因为随着  $\phi_m$  的增大, 应力比  $M$  同样增大, 而  $(1 - M/M_p)$  则会减小, 这样就导致产生的非共轴塑性应变的减小, 从而表现出应力比越接近破坏或临界状态, 非共轴现象越不明显的特征。

## 4 结 论

本文在考虑组构各向异性的状态相关砂土临界状态本构模型的基础上, 引入边界面的概念以处理逆向加载中的塑性问题, 推导了  $\pi$  平面内的非关联塑性势面, 同时提出了一种同应力主轴方向正交的非共轴流动法则, 并同塑性加载因子相关联, 建立了一种新的非共轴本构模型。并采用该非共轴模型模拟了 Toyoura 砂的空心圆柱剪切试验, 对比分析结果表明:

(1) 在固定主应力轴的单调剪切试验中, 本文模型由于考虑了组构各向异性, 能够描述单调加载中变形及强度的各向异性特征。

(2) 纯主应力旋转试验中的塑性变形包含了非共轴性和各向异性特征, 各向异性模型与修正的非共轴流动法则的结合使得模拟结果更为接近试验规律。

从本质上讲, 传统非共轴模型是各向同性模型, 而前面提到的强度、变形和非共轴现象同砂土在加载过程中的塑性流动及各向异性有关, 而这是各向同性模型所不能描述的。因此, 建立考虑各向异性非共轴模型是解决此类问题的重要思路。

## 参 考 文 献:

- [1] ROSCOE K H. The influence of strains in soil mechanics[J]. Géotechnique, 1970, 20(2):129 - 170.
- [2] ARTHUR J R F, MENZIES B K. Inherent anisotropy in a sand[J]. Géotechnique, 1972, 22(1):115 - 128.
- [3] ARTHUR J R F, CHUA K S, DUNSTAN T. Induced anisotropy in a sand[J]. Géotechnique, 1977, 27(1):13 - 30.
- [4] MIURA K, MIURA K, TOKI S. Deformation behavior of anisotropic dense sand under principal stress axes rotation[J]. Soils and Foundations, 1986, 26(1): 36 - 52.
- [5] GUTIERREZ M, ISHIHARA K, TOWHATA I. Flow theory for sand during rotation of principal stress direction[J]. Soils and Foundations, 1996, 31(4): 121- 132.
- [6] RUDNICKI J W, RICE J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1975, 23: 371 - 394.
- [7] 钱建固, 黄茂松. 复杂应力状态下岩土体的非共轴塑性流

- [7] 动理论[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, **25**(6): 1259 – 1264 (QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song. Non-coaxial plastic flow theory in multi-dimensional stress state[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, **25**(6): 1259 – 1264. (in Chinese))
- [8] QIAN J G, YANG J, HUANG M S. Three-dimensional noncoaxial plasticity modeling of shear band formation in Geomaterials[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2008, **134**: 322 – 329.
- [9] YANG Y, YU H S. Numerical simulations of simple shear with non-coaxial soil models[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2006, **30**: 1 – 19.
- [10] YANG Y, YU H S. A non-coaxial critical state soil model and its application to simple shear simulations[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2006, **30**: 1369 – 1390.
- [11] 扈萍, 黄茂松, 钱建固, 等. 砂土非共轴特性的本构模拟[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(5):793 – 798 (HU Ping, Huang Mao-song, QIAN Jian-gu, et al. Non-coaxial plasticity constitutive modeling of sands[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(5): 793 – 798. (in Chinese))
- [12] LI X S, DAFALIAS Y F. Constitutive modeling of inherently anisotropic sand behavior[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2002, **128**: 868 – 880.
- [13] ODA M, NAKAYAMA H. Introduction of inherent anisotropy of soil in the yield function[C]// Micromechanics of Granular Materials. Amsterdam, 1988: 81 – 89.
- [14] LI X S, DAFALIAS Y F. A constitutive framework for anisotropic sand including non-proportional loading[J]. Géotechnique, 2004, **54**(1): 41 – 55
- [15] LASHKARI A, LATIFI M. A simple plasticity model for prediction of non-coaxial flow of sand[J]. Mechanics Research Communications 2007, **34**(2): 191 – 200.
- [16] DAFALIAS Y F, PAPADIMITRIOU A G, LI X S. Sand plasticity model accounting for inherent fabric anisotropy[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, **130**: 1319 – 1333.
- [17] 陈洲泉, 黄茂松. 基于状态相关本构模型的砂土非共轴特性模拟[J]. 岩土力学, 2017, **38**(7): 1959 – 1966. (CHEN Zhou-quan, HUANG Mao-song. Constitutive modeling of non-coaxial characteristics of sand based on state-dependent critical state model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, **38**(7): 1959 – 1966. (in Chinese))
- [18] PAPADIMITRIOU A G, BOUCKOVALAS G D. Plasticity model for sand under small and large cyclic strains: a multiaxial formulation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2002, **22**:194 – 204.
- [19] BEEN K, JEFFERIES M G. A state parameter for sands[J]. Géotechnique, 1985, **35**(2): 99 – 112.
- [20] LI X S, WANG Y. Linear representation of steady-state line for sand[J]. Journal of Geotechnical and Geo-environmental Engineering, 1988, **124**(12): 1215 – 1217.
- [21] 黄茂松, 李学丰, 钱建固. 各向异性砂土的应变局部化分析[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(10): 1885 – 1892. (HUANG Mao-song, LI Xue-feng, QIAN Jian-gu. Strain localization of anisotropic sands[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(10): 1885 – 1892 (in Chinese))
- [22] YANG Z X, LI X S, YANG J. Quantifying and modeling fabric anisotropy of granular soils[J]. Géotechnique, 2008, **58**(4): 237 – 248.
- [23] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, **50**(4): 449 – 460.
- [24] WANG Z L, DAFALIAS Y F, SHEN C K. Bounding surface hypoplasticity model for sand[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1990, **116**(5): 983 – 1001.
- [25] DAFALIAS Y F. Bounding surface plasticity I: mathematical foundation and hypoplasticity[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1986, **112**(9): 966 – 987.
- [26] DAFALIAS Y F, POPOV E P. Cyclic loading for materials with a vanishing elastic region[J]. Nuclear Engineering Design, 1977, **41**: 293 – 302.
- [27] PASTOR M, ZIENKIEWICZ O C, CHAN A H. Generalized plasticity and the modeling of soil behaviour[J]. International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics, 1990, **14**: 151 – 190.