

DOI: 10.11779/CJGE201801004

横观各向同性土的三维强度准则

路德春, 梁靖宇, 王国盛, 杜修力*

(北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124)

摘要: 横观各向同性土体的强度规律包括两个方面: 偏平面上的强度曲线畸变和大主应力作用面与沉积面相对夹角 δ 方向上的强度参数变化。当前对横观各向同性材料强度准则的研究主要集中在反映主应力与沉积面垂直条件下偏平面上的强度规律, 对方向角 δ 方向上的强度规律研究还不完善。基于微观结构张量法, 通过引入滑动面的概念, 以大主应力垂直作用于水平沉积面时应力空间与物理空间重合为基准, 利用三维滑动面与沉积面之间的相对位置关系, 并综合方向角 δ 方向上的强度变化规律, 提出了三维横观各向同性强度参数 η_n 。将其与 M-N 强度准则相结合, 得到了横观各向同性土的三维强度准则。所得强度准则考虑了主应力与沉积面绕某一主应力轴旋转过程中偏平面强度曲线的变化, 综合地反映了横观各向同性土体的强度规律。

关键词: 横观各向同性; 主应力方向; 滑动面; 微观结构; 强度准则

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2018)01-0054-10

作者简介: 路德春(1977-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土材料的力学特性与本构理论、岩土地震工程等方面的教学和科研工作。E-mail: dechun@bjut.edu.cn。

Three-dimensional strength criterion for transverse isotropic geomaterials

LU De-chun, LIANG Jing-yu, WANG Guo-sheng, DU Xiu-li

(Key Lab of Urban Security and Disaster Engineering, Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The strength characteristic of the transverse isotropic soil include two aspects. On one hand, the strength curves are not symmetric around the three principal stress axes on deviatoric plane. On the other hand, the strength parameter varies with the included angle δ between the acting plane of the major principal stress and the depositional plane. The existing studies about the strength of transverse isotropic materials are immature, especially the strength description of the included angle δ direction. The concept of mobilized plane is introduced into a method that considers the microstructural tensor. Based on the coincidence of the stress space with the physical space, the relative position between the 3D mobilized plane and the depositional plane is analyzed. Then a 3D strength parameter η_n is proposed by considering the change rules of included angle δ direction. The transverse isotropic strength criterion is proposed by marrying the 3D strength parameter to the Matsuoka-Nakai strength criterion. The proposed transverse isotropic strength criterion is able to describe the distortion of the strength curves on deviatoric plane and the non-monotonic rule with respect to the included angle δ comprehensively.

Key words: transverse isotropy; stress axis direction; mobilized plane; microstructure; strength criterion

0 引言

自然界中的岩土类材料由于受到内在矿物颗粒组成和外在环境因素的共同影响一般表现为各向异性。原位状态下的岩土类材料, 由于矿物颗粒形状非球形和重力作用下颗粒间接触和孔隙的优势排列分布, 使岩土材料形成的微观结构具有方向性, 表现为原生各向异性; 材料在受力变形过程中, 非球形颗粒的倾向、颗粒间接触及孔隙分布等发生变化, 使材料微观结构性发生变化, 从而表现出应力诱导各向异性。

各向异性显著影响着材料的强度与变形^[1-4], 忽略材料的各向异性将使岩土类工程的设计与分析偏于不

安全。Oda 等^[5]进行的条形基础模型试验, Zdravkovic 等^[6]、殷宗泽等^[7]对堤坝的模拟分析均表明, 不考虑各向异性影响, 采用各向同性假定会使工程设计偏于危险。在实际工程问题中如何综合考虑岩土类材料的各向异性对土体强度的影响一直备受国内外研究者关注。

横观各向同性是最简单的各向异性, 也是研究一

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51522802, 51421005, 51538001, 51778026); 北京市自然科学基金重点项目 (8161001)

收稿日期: 2016-10-10

*通讯作者 (E-mail: duxiuli@bjut.edu.cn)

般各向异性的基础。材料的横观各向同性表现为沿某一平面各方向力学特性相同, 与垂直于该平面方向的力学特性不同。本文主要针对自然状态下在沉积、固结过程中形成的横观各向同性土材料的强度特性进行探讨。横观各向同性土体在二维假定条件下剪切破坏的研究中, 陈越^[8]从土单元极限平衡的角度研究了平面应变条件下强度各向异性的规律, 并给出简便的实用表达式。姚仰平等^[9]从应力分布场与材料强度分布场比较的角度, 分析解释了横观各向同性土体强度各向异性的物理实质及破坏机理。但二维分析并不能考虑中主应力的影响, 不能完整描述实际土体的三维受力特性, 因此, 对横观各向同性土的三维分析是非常必要的。基于对横观各向同性土体的三轴试验结果分析, Abelev 等^[10]提出主应力空间坐标旋转法, Mortara^[11]和 Lü 等^[12]提出相应的修正角隅函数的方法来描述土体偏平面上的强度特性。但这是从数学角度对土体的横观各向同性进行考虑, 仅适用于应力主轴与材料主轴共轴的情况, 难以解释横观各向同性土破坏的物理机制。也有学者从材料微观力学角度, 利用微观结构张量或组构张量来反映材料的横观各向同性特性, 将材料组构张量与应力张量或应力方向向量相结合, 引入到强度理论或本构模型中来描述土体各向异性的强度与变形规律。微观组构张量结合应力张量的方法^[13-18]或结合应力方向向量^[19-21]的方法可以很好地描述横观各向同性土体在特殊条件下(如沉积面方向与主应力方向垂直)偏平面上的强度特性, 但难以描述大主应力相对沉积面的方向角变化过程中强度参数的非单调变化。因此, 有学者^[22-26]基于空间滑动面(spatially mobilized plane, SMP)^[27]与沉积面之间的相对关系来描述横观各向同性土体的强度变化规律, 建立了考虑材料横观各向同性特性的强度准则, 但大多只能描述对应三轴压缩条件下, 主应力相对沉积面的方向角变化过程中, 强度参数先减小后增加的规律。

当前关于横观各向同性土体强度准则的研究主要集中在描述主应力与沉积面垂直条件下的强度规律, 少有能够综合描述大主应力方向与沉积面法线的夹角 δ 不为零时偏平面上强度曲线的变化规律, 或只能描述三轴压缩条件下 δ 不为零时的强度变化规律。针对这一问题, 本文在微观结构张量法的基础上引入滑动面的概念, 以大主应力垂直于水平沉积面时应力空间与物理空间重合为基准, 分析了沉积面、大主应力作用面与滑动面之间的相对关系, 给出了大主应力与沉积面法线相对角度变化过程中, 三维横观各向同性强度参数 η_n 的具体表达式。并将三维强度参数 η_n 与各向

同性的M-N强度准则相结合, 提出了综合考虑横观各向同性土三维强度特性的TI-M-N(transverse isotropic-Matsuoka Nakai)强度准则。三维横观各向同性土强度参数是对岩土类材料横观各向同性特性的理解与把握, 利用所提强度参数还可以与其他考虑材料不同强度特性(如中主应力效应、静水压力效应等^[28-29])的强度准则相结合, 从而进一步综合地对材料特性进行描述与分析。本文针对峰值应力条件下横观各向同性土体的强度特性进行分析, 文中所述应力均为峰值应力, 应力符号以压为正。

1 横观各向同性土的剪切破坏规律分析

Liu 等^[23]通过 Kirgard 等^[2]的 San Francisco 海湾黏土的真三轴试验与各向同性的 Mohr Coulomb (M-C) 强度准则进行对比分析, 得出在偏平面上横观各向同性土体的强度曲线与各向同性强度曲线相比应该是畸变的结论。而强度曲线畸变的演化是和沉积面与大主应力作用面之间的夹角 δ 相关的。如图 1 所示, Oda 等^[5]和 Lade 等^[30]分别对 Toyourd 砂土和 Nevada 细砂进行的三轴压缩试验结果(空心符号)随方向角 δ 的增加表现为单调下降的变化规律, 而 Matsuoka 等^[31]与 Park 和 Tatsuoka(试验数据取自 Liu 等^[23])分别对 Toyoura 砂与 Silica 砂进行的平面应变试验结果(实心符号)却表现为先减小后增加的非单调规律。与各向同性材料的强度参数不随方向角 δ 变化不同, 横观各向同性土体的强度参数是随着角度 δ 变化而变化的。

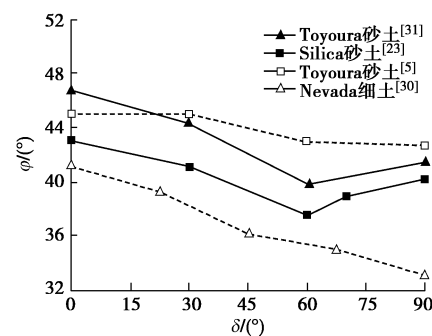


图1 内摩擦角随着方向角度变化规律

Fig. 1 Variation of internal friction angle with direction angle δ

综上所述, 与各向同性材料的强度规律相比, 横观各向同性土体的强度规律不仅包括偏平面上的强度曲线畸变, 还包括方向角 δ 相关的强度参数变化。对偏平面上与方向角 δ 方向上强度特性的理论研究中, 还没有能够给出综合反映偏平面上强度曲线随着方向角 δ 变化的明确表达式。如何利用强度表达式对两种强度规律进行统一的描述, 是当前横观各向同性土体

强度理论研究的难题。

2 基于加载方向的横观各向同性土强度参数

当前研究中,许多研究者利用微观结构张量或组构张量来反映横观各向同性土体的材料属性,利用应力张量或者加载方向向量来反映荷载特性,通过材料属性与荷载特性相结合来建立横观各向同性土体的强度参数。其中, Pietruszczak 等^[19]首次提出微观结构张量法,通过微观结构张量 a_{ij} 在广义应力加载方向 l_i 上投影,并结合土体的横观各向同性特性,定义了与加载方向相关的横观各向同性强度参数:

$$\eta_L = \eta_0 [1 + \Omega_3 (1 - 3l_1^2)] \quad (1)$$

式中, η_0 为各向异性参数 η_L 的平均值, Ω_3 为反映各向异性程度的参数, l_1 为根据应力状态确定的方向相关项。在实验室常规试验中,主应力作用方向与沉积面方向之间的相对关系如图 2 所示,其中, $Orst$ 坐标与横观各向同性的方向性一致, $Oxyz$ 坐标与应力方向一致。随着 δ 的增加,沉积面绕着 $x(r)$ 轴方向进行旋转, l_1 的表达式为

$$l_1 = \sqrt{\frac{\sigma_z^2 \cos^2 \delta + \sigma_y^2 \sin^2 \delta}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}} \quad (2)$$

式中, $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 表示作用于试样上的 3 个主应力。

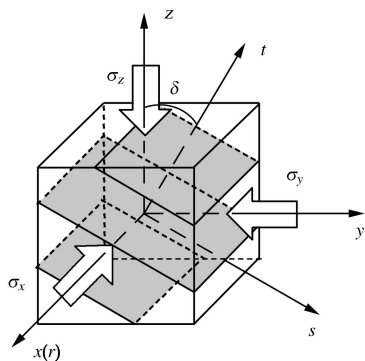


图 2 主应力方向与沉积面方向的相对关系

Fig. 2 Relative position between major principal stress and depositional plane

Lade 等^[20]、Kong 等^[21]和 Lü 等^[32]分别利用各向同性 Lade 强度准则、M-N 强度准则和三维 M-C 强度准则与加载方向相关的横观各向同性参数 η_L 相结合,得出了相应考虑材料横观各向同性特性的强度准则。通过以上方法所得强度准则可以很好地反映砂土和黏土在主应力方向与沉积面法线共轴条件下偏平面上的强度规律,然而却难以全面反映方向角 δ 变化条件下的强度变化规律。以 Kong 等^[21]对 M-N 强度准则进行的扩展为例进行分析,得出偏平面上的强度曲线与方向角 δ 之间的三维变化关系如图 3 所示。通过与加载

方向相关的横观各向同性参数 η_L 相结合而建立的强度准则均隐含这种随着 δ 增加,强度参数(内摩擦角)单调减小的规律。

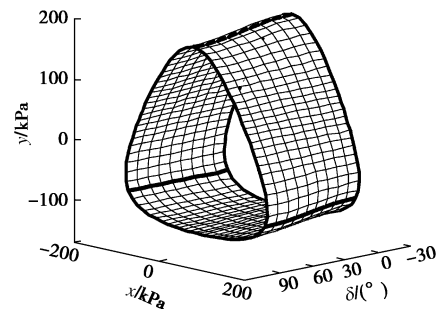


图 3 偏平面上强度线变化规律

Fig. 3 Variation of strength curves with direction angle δ on deviatoric plane

但是,根据图 1 所示试验结果(实心符号)可知,并非所有随着方向角 δ 增加所得的试验结果都是单调变化的,如何对这种非单调的试验结果进行分析与描述还是一个难以统一的问题。国内外学者已经认识到利用滑动面与横观各向同性材料的沉积面之间的相对关系可以很好地解释这种非单调试验规律。但是,目前的研究指出,滑动面是根据应力空间条件得出,沉积面是物理空间条件,而应力空间的滑动面与物理空间的沉积面之间并没有明确的对应转换关系,无法给出主应力与沉积面相对角度变化过程中,滑动面与沉积面之间明确的相对关系,从而无法得出其他条件($b \neq 0$ 时)下偏平面上强度曲线与 δ 之间变化规律的明确表达式。为解决这一问题,本文以沉积面水平条件下,应力空间与物理空间重合为基准,根据滑动面与沉积面的相对关系,研究主应力方向绕着 $x(r)$ 轴旋转过程中,随着 δ 的增加,偏平面上强度规律的变化。

3 基于滑动面的横观各向同性土强度参数

滑动面的概念是针对各向同性材料提出来的,可以根据材料受力达到破坏时的应力条件得到,但滑动面概念本身与材料是否是各向同性无关。随着 δ 的增加,加载方向和沉积面之间的相对位置关系是单调变化的,而滑动面和沉积面之间的相对位置关系表现为先接近后远离的趋势。因此,针对横观各向同性材料具有沉积面(抗剪最弱面)的特点,可以根据滑动面的特性来提出基于滑动面的横观各向同性强度参数,以反映横观各向同性材料的强度变化规律。

3.1 三维滑动面与沉积面之间的关系

诸多强度准则中作为强度参数的破坏应力比一般

是根据材料的摩擦特性来确定的, 其摩擦特性可由主应力作用下的滑动面来反映。空间滑动面 (SMP) 被用来反映摩擦材料的摩擦特性及摩擦规律, 反映了土颗粒处于最容易滑动的应力状态。横观各向同性土体由于土颗粒、孔隙以及粒间接触沿沉积面方向优势排列, 导致其沿沉积面方向的抗剪能力最低。因此, 利用SMP方向性与沉积面方向性之间的相对关系可以反映横观各向同性土体的强度特性。

大主应力垂直作用于沉积面时, 令沉积面法线方向与 $Orst$ 坐标系的 Ot 轴一致, 主应力方向与坐标系 $Oxyz$ 的 Oz 轴一致, 可以得出滑动面 ABC 及其法线 n 位置, 如图4所示。大主应力方向与沉积面法线方向绕 x 轴在 yOz 平面内相对旋转的过程中, 沉积面法线 d 与大主应力方向 Oz 轴的夹角为 δ , 沉积面法线 d 与滑动面法线 n 之间的夹角为 ζ 。大主应力与沉积面相对旋转的过程中, Ox 轴始终与沉积面法线垂直, 因此, 横观各向同性材料在 Ox 方向的三轴压缩强度和三轴拉伸强度是不变的, 即 Ox 方向的材料强度与沿着 yOz 坐标系旋转的过程无关。

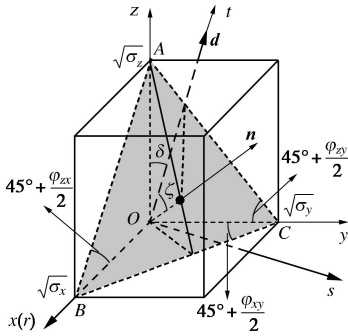


图4 滑动面与沉积面的相对关系

Fig. 4 Relative position between SMP and depositional plane

3.2 三维横观各向同性强度参数公式

类比Pietruszczak和Mroz所提出的微观结构张量法, 本文通过微观结构张量在滑动面法线方向向量上投影, 并引入土体的横观各向同性特性条件, 来定义基于滑动面的三维横观各向同性参数 η_n , 表达式为

$$\eta_n = \eta_0 [1 + \Omega_3 (1 - 3n_\rho^2)] \quad (3)$$

式中 η_0 为横观各向同性参数 η_n 的平均值; Ω_3 为反映各向异性程度的材料参数; n 为方向相关项, 为了综合地考虑横观各向同性材料三维强度参数随方向角 δ 的变化规律, 采用如下形式:

$$n_\rho = \rho\psi n_I + (1 - \rho\psi)n_{II} \quad (4)$$

式中 $\rho\psi$ 为强度分配项, 控制着 δ 变化过程中偏平面上不同主应力方向强度参数规律, 其中 ρ 为分配系数; n_I 和 n_{II} 反映了 δ 变化过程中滑动面与沉积面之间两种不同的相对关系。相应的表达式如下:

$$\psi = \frac{(\sigma_z - \sigma_y)^2}{(\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} n_I &= n_z \cos \delta + n_y \sin \delta, \\ n_{II} &= n_z \cos^2 \delta + n_y \sin^2 \delta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)中, n_z 和 n_y 为滑动面法线相对于 z 和 y 方向的方向余弦, 具体表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} n_z &= \sqrt{\frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z}}, \\ n_y &= \sqrt{\frac{\sigma_z \sigma_x}{\sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z}}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

方向相关项 n_ρ 决定了横观各向同性材料三维强度参数 η_n 与方向角 δ 之间的关系, 是对 n_I 和 n_{II} 的综合考虑。分配系数 ρ 控制着 δ 变化时不同主应力方向强度参数变化的程度。

当 $\sigma_z = \sigma_y$ 时, η_n 反映了 x 轴方向的强度参数, 根据式(5)可以得出 $\psi = 0$, 根据式(7)得出 $n_z = n_y$, 此时等式(3)可以整理为

$$\eta_n = \eta_0 \left[1 + \Omega_3 \left(1 - \frac{3\sigma_x}{2\sigma_x + \sigma_y} \right) \right] \quad (8)$$

可以看出式(8)与方向角 δ 无关, 即满足 $\sigma_z = \sigma_y$ 条件下, σ_x 方向的强度参数不变的规律。

当 $\sigma_x = \sigma_y$ 或 $\sigma_x = \sigma_z$ 时, η_n 反映了 z 轴和 y 轴方向上的强度参数, 根据式(5)可以得出 $\psi = 1/2$, 根据式(7)得出 n_z 与 n_y , 代入到等式(3)可以整理出对应 z 轴和 y 轴方向上强度参数与方向角 δ 之间的变化规律。以 z 轴上三轴压缩条件($\sigma_z > \sigma_x = \sigma_y$)为例, 对应强度参数 η_n 表达式如下

$$\eta_n = \eta_0 + \eta_0 \Omega_3 \left\{ 1 - 3 \left[\frac{1}{2} \rho n_I + \left(1 - \frac{1}{2} \rho \right) n_{II} \right]^2 \right\} \quad (9)$$

根据式(6)和式(7)整理得出 n_I 和 n_{II} 的表达式

$$\left. \begin{aligned} n_I &= \sqrt{\frac{\sigma_x}{2\sigma_z + \sigma_x}} \cos \delta + \sqrt{\frac{\sigma_z}{2\sigma_z + \sigma_x}} \sin \delta, \\ n_{II} &= \sqrt{\frac{\sigma_x}{2\sigma_z + \sigma_x}} \cos^2 \delta + \sqrt{\frac{\sigma_z}{2\sigma_z + \sigma_x}} \sin^2 \delta. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

当分配系数 $\rho = 0$ 时, 三维横观各向同性参数 η_n 随着方向角 δ 的变化规律是单调的, 式(9)简化为

$$\eta_{nII} = \eta_0 [1 + \Omega_3 (1 - 3n_{II}^2)] \quad (11)$$

当分配系数 $\rho = 2$ 时, 三维横观各向同性参数 η_n 随着方向角 δ 的变化表现为先减小后增加的非单调的规律, 式(9)简化为

$$\eta_{nII} = \eta_0 [1 + \Omega_3 (1 - 3\eta_0^2)] \quad (12)$$

当分配系数 ρ 变化时, 三维横观各向同性参数 η_n 随着方向角 δ 的变化, 其变化规律为在式(11)和式(12)之间按式(9)进行线性插值。

4 横观各向同性强度准则

各向同性的强度准则可以很好地描述各向同性岩土类材料在偏平面以及子午面上的强度特性, 对于土体而言, 主要表现为中主应力对偏平面上抗剪强度的影响^[33-34]及与静水压力相关^[29, 35]特性。但基于各向同性的假定的强度准则不能描述横观各向同性土体的强度特性: 由沉积面方向性造成的强度曲线畸变和中主应力与沉积面相对旋转过程中强度曲线的演化。横观各向同性的强度准则可以通过对各向同性的强度准则进行扩展而得到, 利用本文提出的三维横观各向同性强度参数 η_n 与某一各向同性强度准则相结合, 即可提出综合反映横观各向同性土体强度特性的横观各向同性的强度准则。

4.1 TI-M-N 强度准则

各向同性的M-N强度准则^[27]是通过建立物理模型来解释材料破坏机理的强度理论, 具有物理概念清晰, 参数少且明确, 易于试验确定等特点, 可以很好地描述各向同性土体的非线性强度特性。

$$\frac{\tau_{SMP}}{\sigma_{SMP}} = \sqrt{\frac{I_1 I_2 - 9I_3}{9I_3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \tan \varphi \quad (13)$$

式中, I_1 , I_2 和 I_3 为 3 个应力不变量,

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

各向同性M-N强度准则利用内摩擦角 φ 的函数来描述SMP上的剪应力 τ_{SMP} 与正应力 σ_{SMP} 的比值。而横观各向同性材料试样内部各平面内摩擦角会受到沉积方向的影响。利用M-N强度准则与本文提出的三维横观各向同性强度参数 η_n 相结合, 通过参数 η_n 来描述沉积方向对材料摩擦特性的影响, 从而得到考虑土体横观各向同性特性的TI-M-N强度准则:

$$\frac{\tau_{SMP}}{\sigma_{SMP}} = \sqrt{\frac{I_1 I_2 - 9I_3}{9I_3}} = \eta_0 [1 + \Omega_3 (1 - 3\eta_0^2)] \quad (15)$$

与其他强度准则(如 Lade-Duncan 强度准则)不同, M-N 强度准则强度线外接于 M-C 强度线, 隐含着三轴拉伸条件与三轴压缩条件下的内摩擦角相等的假定, 更适用于预测黏土材料的强度特性, 这是由于不同强度准则考虑中主应力影响不同。因此, 对 M-N 强度准则的扩展同样受到这一假定的影响。扩展后的

强度准则同时耦合了横观各向同性强度参数中的中主应力效应, 表现为偏平面上强度曲线的畸变以及随着 δ 增加强度曲线的演化。

4.2 参数确定方法与分析

由于各向同性的 M-N 强度准则在偏平面上的强度线是关于 3 个主应力轴对称的, 其峰值应力比 τ_{SMP}/σ_{SMP} 的确定只需要一个参数 φ 。而所提出的横观各向同性强度准则在偏平面上的强度曲线不再关于 3 个主应力轴对称: 当主应力与沉积面不垂直时, 偏平面上的强度曲线关于 3 个主应力轴都不对称; 当主应力与沉积面垂直时, 即当 $\delta=0^\circ$ 或 90° 时, 偏平面上的强度曲线关于该主应力轴对称, 此时, 强度曲线的确定需要两个参数 η_0 和 Ω_3 。

各向同性 M-N 强度准则的强度参数是与应力作用方向无关的, 而当主应力相对沉积面旋转时, 横观各向同性强度参数需要满足如所示变化规律。参数 η_0 和 Ω_3 已确定条件下, 需要额外增加一个参数 ρ 来反映偏平面强度曲线随 δ 变化的旋转特性。

(1) η_0 和 Ω_3 的确定

参数 η_0 和 Ω_3 的确定与Lade等^[20]、Kong等^[21]和Lü等^[32]计算强度参数的方法类似, 可以通过三轴压缩条件下的内摩擦角 φ_w 和 φ_v 来计算, 其中, φ_w 为沉积面与Oz方向垂直的竖直试样(图5(a))在三轴压缩条件下测得的内摩擦角; φ_v 为沉积面与Oy方向垂直的水平试样(图5(b))在三轴压缩条件下测得的内摩擦角。

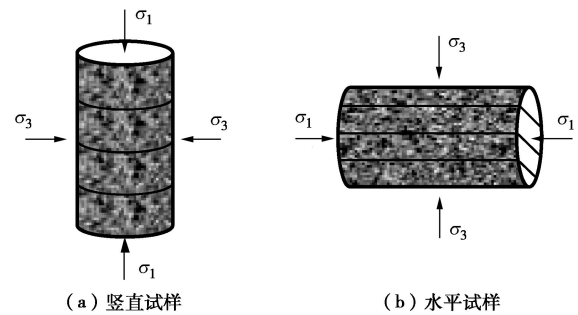


图5 横观各向同性土的水平与竖直试样

Fig. 5 Vertical and horizontal samples of transverse isotropic soil

根据内摩擦角的定义, 三轴压缩条件下的峰值应力比 R_f 可以表示为

$$R_f = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (16)$$

中主应力系数 b 反映了中主应力 σ_2 相对大主应力 σ_1 和小主应力 σ_3 所占的比例:

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (17)$$

b 值从三轴压缩条件的 $b=0$ 到三轴拉伸条件的 $b=1$ 。

将式 (14)、(16)、(17) 代入到等式 (15) 左侧应力比中, SMP 上的剪应力 τ_{SMP} 与正应力 σ_{SMP} 的比值表示为

$$\frac{\tau_{\text{SMP}}}{\sigma_{\text{SMP}}} = \eta_n \sqrt{\frac{(R_f + bR_f - b + 2)(bR_f^2 + 2R_f - b + 1)}{9R_f(bR_f - b + 1)}} - 1 = \eta_n. \quad (18)$$

TI-M-N 强度准则表达式 (15) 右侧需要综合考虑沉积面与滑动面之间的相对关系, 根据真三轴试验条件作用于土体上的主应力方向变化, 将偏平面分为 3 个区域, 如图 6 所示。 n_ρ 的表达式可以根据滑动面方向与沉积面方向之间的相对关系来确定。

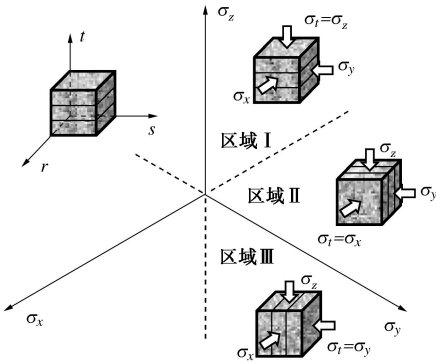


图 6 真三轴条件下偏平面上不同区域主应力分布情况

Fig. 6 Distribution of principal stresses on various sectors of deviatoric plane under true triaxial condition

对沉积面水平的情况, 即 $\delta = 0^\circ$ 时, 区域 I 对应于 σ_z 与沉积面垂直, n_ρ 的表达式为

$$n_\rho = n_z = \sqrt{\frac{(bR_f - b + 1)}{R_f(bR_f - b + 1) + (bR_f - b + 1) + R_f}}. \quad (19)$$

区域 II 对应于 σ_x 与沉积面垂直, n_ρ 的表达式为

$$n_\rho = n_x = \sqrt{\frac{R_f}{R_f(bR_f - b + 1) + (bR_f - b + 1) + R_f}}. \quad (20)$$

区域 III 对应于 σ_y 与沉积面垂直, n_ρ 的表达式为

$$n_\rho = n_y = \sqrt{\frac{R_f(bR_f - b + 1)}{R_f(bR_f - b + 1) + (bR_f - b + 1) + R_f}}. \quad (21)$$

对于沉积面水平条件下的空心扭剪试验应力条件^[32], 内外围压保持相等且对应于中主应力值, 大主应力相对与沉积面的相对角度 δ 与中主应力系数之间存在唯一关系 $b = \sin^2 \delta$ ^[36]。因此, 当主应力相对沉积面法线的方向角 $\delta \neq 0^\circ$ 时, n_ρ 的表达式为

$$n_\rho = \rho \psi n_I + (1 - \rho \psi) n_{II}, \quad (22)$$

式中, n_I , n_{II} 以及 ψ 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} n_I &= n_z \sqrt{1 - b} + n_y \sqrt{b}, \\ n_{II} &= n_z(1 - b) + n_y b. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\psi = \frac{(R_f - 1)^2}{[R_f - (bR_f - b + 1)]^2 + [bR_f - b]^2 + (1 - R_f)^2}. \quad (24)$$

可以看出, n_z , n_y 可以通过式 (19) 和式 (21) 得出, 分别为 $\delta = 0^\circ$ 时和 $\delta = 90^\circ$ 时 n_ρ 的特例。

以 Kirgard 等^[2]对 San Francisco 海湾黏土进行的真三轴试验结果为例进行参数确定。对竖直试样和水平试样进行传统三轴压缩试验得出的内摩擦角为 $\varphi_z = 30.6^\circ$ 和 $\varphi_y = 27.4^\circ$, 因此, 根据式 (16) 可以得出三轴压缩条件下竖直试样的主应力比 $R_{tz} = 3.0737$ 和水平试样的主应力比 $R_{ty} = 2.7051$ 。将三轴压缩条件 ($b=0$) 和试样的主应力比代入式 (18)、(19) 中, 可以得出剪正应力比 $\eta_{nz} = 0.5576$, $\eta_{ny} = 0.4887$ 和方向相关项 $n_z = 0.3741$, $n_y = 0.6762$ 。将水平试样和竖直试样的计算结果代入到 TI-M-N 强度准则式 (15) 中, 可以联立得出一元二次方程组:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{nz} &= \eta_0 [1 + \Omega_3(1 - 3n_z^2)], \\ \eta_{ny} &= \eta_0 [1 + \Omega_3(1 - 3n_y^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

通过求解计算可以得出本方法中的参数 $\eta_0 = 0.5103$ 和 $\Omega_3 = 0.1595$ 。

(2) 分配系数 ρ 的确定

分配系数 ρ 控制着主应力相对沉积面的方向角变化时, 主应力方向的强度变化的规律。将式 (22) 代入到式 (15) 中, 整理可得

$$\rho \psi (n_I - n_{II}) = \sqrt{\frac{\eta_0 + \eta_0 \Omega_3 - \tau_{\text{SMP}}/\sigma_{\text{SMP}}}{3\eta_0 \Omega_3}} - n_{II}. \quad (26)$$

当 $\sigma_z \neq \sigma_y$ 时, $\psi \neq 0$, 可以反映 σ_z 和 σ_y 方向的强度随方向角 δ 变化的特性, 此时, 式 (26) 可以整理为

$$\rho = \frac{1}{\psi (n_I - n_{II})} \left(\sqrt{\frac{\eta_0 + \eta_0 \Omega_3 - \tau_{\text{SMP}}/\sigma_{\text{SMP}}}{3\eta_0 \Omega_3}} - n_{II} \right). \quad (27)$$

因此, 根据方向角 $\delta \neq 0^\circ$ 且 $\delta \neq 90^\circ$ 时, 三轴压缩条件下的内摩擦角可以计算得出对应的分配系数 ρ 。根据土体试验点结合式 (25)、(27) 可以求解得出对应的参数 η_0 , Ω_3 和 ρ , 计算结果如表 1 所示。通过试验结果与预测曲线的对比可以看出, 利用本文提出的强度准则预测强度参数变化规律能够较好地把握随着方向角增加强度参数的单调与非单调变化的试验结果, 如图 7 所示。

表 1 材料参数

Table 1 Material parameters

土样类型	η_0	Ω_3	ρ
Toyoura 砂土 ^[3]	0.894	0.075	0.047
Toyoura 砂土 ^[31]	0.778	0.115	1.267
Silica 砂土 ^[23]	0.712	0.068	2.084
Nevada 细砂 ^[30]	0.680	0.294	0.327

4.3 TI-M-N 强度准则试验验证

通过以上的分析可知, TI-M-N 强度准则可以用于

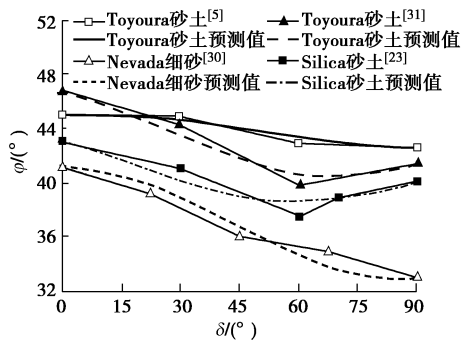


图7 横观各向同性土体的内摩擦角 φ 预测

Fig. 7 Prediction of internal frictional angle of transverse isotropic soils with different depositional angles

预测一般应力条件下的横观各向同性黏土及砂土的抗剪强度,如真三轴试验条件和空心圆柱扭剪试验条件。本文利用所提强度准则对 San Francisco 海湾黏土和 Toyoura 砂土试样的真三轴试验结果预测的结果如下所示:

(1) San Francisco 海湾黏土试验验证

Kirgord 等^[2]对 San Francisco 海湾黏土进行了一系列 $I_1 = 500 \text{ kPa}$ 条件下的真三轴试验。试验结果表明,自然界土体的横观各向同性特性对土体强度有着明显的影响,各向同性的 M-N 准则会过高估计区域 II、III 的土体强度,尤其是区域 III 中的土体强度。

利用 TI-M-N 强度准则和 M-N 强度准则分别对 San Francisco 海湾黏土的试验结果进行预测。根据竖直和水平试样三轴压缩条件下的试验结果 $\varphi_{cz} = 30.6^\circ$ 和 $\varphi_{cy} = 27.4^\circ$, 可以得到参数 $\eta_0 = 0.5104$ 和 $\Omega_3 = 0.1595$ 。如图 8 所示,图中黑色虚线为 M-N 强度准则的预测曲线,实线是 TI-M-N 强度准则分别在偏平面上的 3 个区域中的预测结果,图 8 (a) 是偏平面上的 M-N 强度准则、TI-M-N 强度准则与 San Francisco 海湾黏土试验结果的对比,图 8 (b) 是 M-N 强度准则与 TI-M-N 强度准则在不同象限内的 $b - \varphi$ 预测曲线与 San Francisco 海湾黏土试验结果的对比。通过预测结果与试验结果的对比可以看出, TI-M-N 强度准则与 M-N 强度准则在区域 I 中基本一致,在区域 II 中两种强度准则预测结果的差距逐渐变大,在区域 III 中两者的差距不再变大,差距趋于平缓,这正反映了试验结果与 M-N 强度准则的差距变化趋势。虽然试验结果具有一定的离散型,但是可以明显看出 M-N 强度理论过高估计了区域 II 中部分与区域 III 的强度,而 TI-M-N 强度准则可以很好地预测试验结果所表现出的强度变化规律。

本文 TI-M-N 强度准则还可以反映强度参数随 δ 变化而变化的规律,假定 $\rho = 2$ 条件下的偏平面上强度曲线随着 δ 变化的规律如图 9 所示,从图中可以看

出 δ 从 0° 增加到 90° 过程中, σ_x 方向的强度值不变,而 σ_z 方向的强度参数先减小后增加。可以看出,本文所提 TI-M-N 强度准则更为综合地考虑了横观各向同性土体强度所具有的方向相关特性。

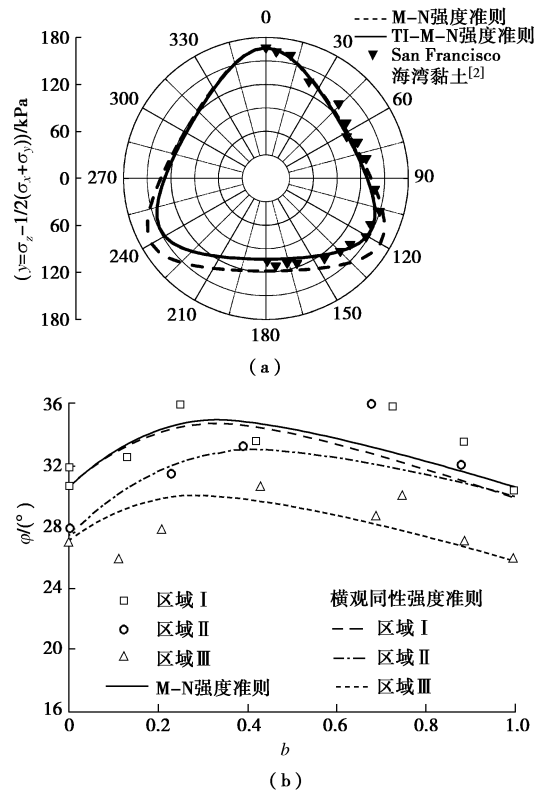


图8 San Francisco 海湾黏土试验结果与预测结果对比图

Fig. 8 Comparison of theoretical curves with tests of San Francisco Bay Mud on the deviatoric plane

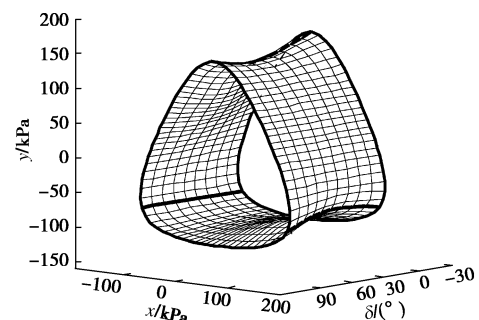


图9 TI-M-N 强度准则预测偏平面强度随 δ 的变化规律

Fig. 9 Variation of strength curves of TI-M-N criterion on the deviatoric plane with direction angle δ

(2) Toyoura 砂土试验验证

Lam 等^[1]研究了具有横观各向同性特性的 Toyoura 砂土试样,对饱和 Toyoura 砂土进行了一系列排水试验,包括三轴压缩试验、平面应变试验以及三轴拉伸试验。试验用砂为长石含量较高的中密砂,不均匀系数为 $C_u = 1.46$,颗粒稍有棱角,平均粒径 $D_{50} = 0.16 \text{ mm}$,相对密度 $G_s = 2.64$,最大和最小孔隙比为 $e_{\max} = 0.977$, $e_{\min} = 0.605$,试样利用撒砂法制备。试验结果表明原生各向异性对砂土的强度和变形有着显

著的影响, 并认为摩擦角 φ 和中主应力系数 b 是主应力方向和材料轴的方向角 δ 的函数。本文利用 M-N 强度准则与新提出的 TI-M-N 强度准则对 Toyoura 砂土的横观各向同性的强度特性进行预测, 根据本文方法计算得出模型参数值为 $\eta_0 = 0.7754$, $\Omega_3 = 0.1155$, $\rho = 1.2312$ 。

利用 M-N 强度准则与本文 TI-M-N 强度准则对 Toyoura 砂土在偏平面上的强度进行预测并与试验结果进行对比, 如图 10。从图中可以看出, M-N 强度准则和 TI-M-N 强度准则都可以预测从 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内砂土的强度, 在此区域内两者强度曲线基本重合。但是, 各向同性的 M-N 强度准则却高估了 $90^\circ \sim 180^\circ$ 内的土体强度。尤其是在 σ_y 方向上 (120° 左右区域), M-N 强度准则与试验数据相差较大, 而横观各向同性的强度准则的预测值与试验数据的变化趋势基本一致, 可以很好地反映这一区域的强度特性。

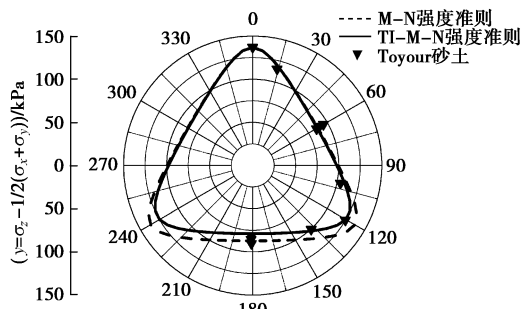


图 10 偏平面上 Toyour 砂土试验结果与预测结果对比图

Fig. 10 Comparison of theoretical curves with tests of Toyoura Sand on deviatoric plane

图 11 反映了三轴压缩试验条件下, 随着大主应力与沉积面法线相对方向角 δ 的变化 (对应文献[1]中 $\xi=90^\circ$, $\omega=\delta$ 的情况) 对应强度的变化。可以看出本文方法可以很好地预测其三轴压缩条件下的强度参数变化规律。这更进一步地说明, 各向同性 M-N 强度准则不能反映横观各向同性材料的强度参数变化规律, 而本文所提出的 TI-M-N 强度准则可以很好地反映强度参数的变化趋势。已知偏平面的强度曲线以及

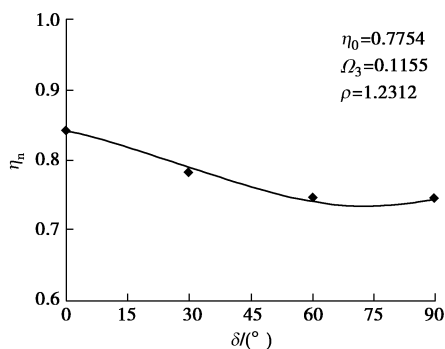


图 11 三轴压缩条件下强度参数随 δ 的变化规律

Fig. 11 Variation of strength parameter η_n with direction angle δ under triaxial compressive condition

三轴压缩条件下强度参数随 δ 的变化规律, 可以得出偏平面的强度曲线随着角度而变化的强度规律曲面, 如图 12 所示。图中, 红色实线为对应 3 个主应力方向的抗剪强度变化规律曲线, 可以看出 σ_x 方向抗剪强度不随 δ 变化而变化, σ_z 方向抗剪强度变化规律与图 11 相同, 与 σ_y 方向强度规律相反。

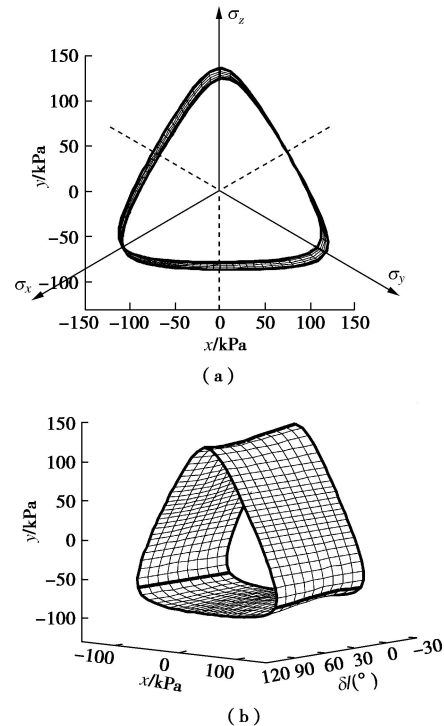


图 12 TI-M-N 强度准则预测偏平面强度随 δ 的变化规律

Fig. 12 Variation of strength curves of TI-M-N criterion on the deviatoric plane with direction angle δ

5 结 语

微观力学范畴定义的微观结构张量与组构张量的物理实质相同, 均是为了描述材料内部微观结构的方向特性, 这也反映了土体强度各向异性的实质。基于材料微观结构方向性与滑动面的方向性, 本文将滑动面的概念引入微观结构张量法, 提出了三维横观各向同性强度参数。

基于对横观各向同性土体的三维受力分析, 以大主应力垂直于水平沉积面时应力空间与物理空间重合为基准, 给出了大主应力作用方向相对沉积面绕着 $x(r)$ 轴转动过程中, 大主应力作用面、沉积面与三维滑动面之间的相对位置关系。以滑动面概念结合微观结构张量法, 提出了能够同时考虑横观各向同性土体偏平面上强度规律以及方向角 δ 方向上强度变化规律的三维横观各向同性强度参数。

利用本文提出的三维横观各向同性强度参数结合 M-N 强度准则, 提出了反映土体横观各向同性特性的 TI-M-N 强度准则。两种已有文献中的典型试验数据与

TI-M-N强度准则预测结果对比表明, TI-M-N强度准则可以合理统一地反映偏平面上以及方向角 δ 方向上的强度特性。

参考文献:

- [1] LAM W, TATSUOKA F. Effects of initial anisotropic fabric and σ_2 on strength and deformation characteristics of sand[J]. Soils and Foundations, 1988, **28**(1): 89 - 106.
- [2] KIRKGARD M M, LADE P V. Anisotropic three-dimensional behavior of a normally consolidated clay[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, **30**(5): 848 - 858.
- [3] 王洪瑾, 张国平, 周克骥. 固有和诱发各向异性对击实粘性土强度和变形特性的影响[J]. 岩土工程学报, 1996, **18**(3): 1 - 10. (WANG Hong-jin, ZHANG Guo-ping, ZHOU Ke-ji. Effects of inherent and induced anisotropy on strength and deformation characteristics of compacted cohesive soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **18**(3): 1 - 10. (in Chinese))
- [4] LADE P V, RODRIGUEZ N M, VAN DYCK E J. Effects of principal stress directions on 3D failure conditions in cross-anisotropic sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2014, **140**(2): 1 - 12.
- [5] ODA M, KOISHIKAWA I, HIGUCHI T. Experimental study of anisotropic shear strength of sand by plane strain test[J]. Soils and Foundations, 1978, **18**(1): 25 - 38.
- [6] ZDRAVKOVIC L, POTTS D M, HIGHT D W. The effect of strength anisotropy on the behaviour of embankments on soft ground[J]. Géotechnique, 2002, **52**(6): 447 - 457.
- [7] 殷宗泽, 张坤勇, 朱俊高. 面板堆石坝应力变形计算中考虑土的各向异性[J]. 水利学报, 2004, **35**(11): 22 - 26. (YIN Zong-ze, ZHANG Kun-yong, ZHU Jun-gao. Considering soil's anisotropy in the calculation of stress deformation of concret-faced rockfill dam[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2012, **43**(1): 43 - 50. (in Chinese))
- [8] 陈越. 粒状材料强度异向性的物理实质和数学表现形式[J]. 岩土工程学报, 1992, **14**(1): 1 - 13. (CHEN Yue. Physical essence and mechanical expressions of strength-anisotropy for granular materials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1992, **14**(1): 1 - 13. (in Chinese))
- [9] 姚仰平, 祝恩阳. 横观各向同性土的简明破坏机制解释[J]. 岩土力学, 2014, **35**(2): 328 - 333. (YAO Yang-ping, ZHU En-yang. Concise interpretation of damage mechanism for cross-anisotropic soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(2): 328 - 333. (in Chinese))
- [10] ABELEV A V, LADE P V. Characterization of failure in cross-anisotropic soils[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, **130**(5): 599 - 606.
- [11] MORTARA G. A yield criterion for isotropic and cross-anisotropic cohesive-frictional materials[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2010, **34**(10): 953 - 977.
- [12] LÜ X L, HUANG M S, QIAN J G. The onset of strain localization in cross-anisotropic soils under true triaxial condition[J]. Soils and Foundations, 2011, **51**(4): 693 - 700.
- [13] GAO Z W, ZHAO J D, YAO Y P. A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, **47**(22/23): 3166 - 3185.
- [14] GAO Z W, ZHAO J D. Efficient approach to characterize strength anisotropy in soils[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2012, **138**(12): 1447 - 1456.
- [15] 李学丰, 黄茂松, 钱建固. 宏细观结合的砂土各向异性破坏准则[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, **29**(9): 1885 - 1892. (LI Xue-feng, HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu. Failure criterion of anisotropic sand with method of macro-meso incorporation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, **29**(9): 1885 - 1892. (in Chinese))
- [16] 刘洋. 砂土的各向异性强度准则: 原生各向异性[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(8): 1526 - 1534. (LIU Yang. Anisotropic strength criteria of sand: inherent anisotropy[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(8): 1526 - 1534. (in Chinese))
- [17] TOBITA Y, YANAGISAWA E. Modified stress tensors for anisotropic behavior of granular materials[J]. Soils and Foundations, 1992, **32**(1): 85 - 99.
- [18] YAO Y P, TIAN Y, GAO Z W. Anisotropic UH model for soils based on a simple transformed stress method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2017, **41**(1): 54 - 78.
- [19] PIETRUSZCZAK S, MROZ Z. Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor[J]. Computers and Geotechnics, 2000, **26**(2): 105 - 112.
- [20] LADE P V. Modeling failure in cross-anisotropic frictional materials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, **44**(16): 5146 - 5162.
- [21] KONG Y X, ZHAO J D, YAO Y P. A failure criterion for cross-anisotropic soils considering microstructure[J]. Acta Geotechnica, 2013, **8**(6): 665 - 673.
- [22] 罗汀, 李萌, 孔玉侠, 等. 基于 SMP 的岩土各向异性

- 强度准则[J]. 岩土力学, 2009, **30**(增刊 2): 127 - 131. (LUO Ting, LI Meng, KONG Yu-xia, et al. Failure criterion based on SMP for anisotropic geomaterials[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(S2): 127 - 131. (in Chinese))
- [23] LIU M D, INDRARATNA B N. General strength criterion for geomaterials including anisotropic effect[J]. International Journal of Geomechanics, 2011, **11**(3): 251 - 261.
- [24] 姚仰平, 孔玉侠. 横观各向同性土强度与破坏准则的研究[J]. 水利学报, 2012, **39**(1): 43 - 50. (YAO Yang-ping, KONG Yu-xia. Research on the cross-anisotropic soil's strength and failure criterion[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2012, **39**(1): 43 - 50. (in Chinese))
- [25] YAO Y P, KONG Y X. Extended UH model: three-dimensional unified hardening model for anisotropic clays[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2012, **138**(7): 853 - 866.
- [26] 张连卫, 张建民, 张 嘎. 基于 SMP 的粒状材料各向异性强度准则[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(8): 1107 - 1111. (ZHANG Lian-wei, ZHANG Jian-min, ZHANG Ga. SMP-based anisotropic strength criteria of granular materials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **30**(8): 1107 - 1111. (in Chinese))
- [27] MATSUOKA H. Stress-strain relationships of sands based on the mobilized plane[J]. Soils and Foundations, 1974, **14**(2): 47 - 61.
- [28] 路德春, 杜修力. 岩石材料的非线性强度与破坏准则研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, **32**(12): 2394 - 2408. (LU De-chun, DU Xiu-li. Research on nonlinear strength and failure criterion of rock material[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, **32**(12): 2394 - 2408. (in Chinese))
- [29] 路德春, 姚仰平, 邹 博. 广义非线性强度理论体系[J]. 岩土力学, 2007, **28**(10): 2009 - 2016. (LU De-chun, YAO Yang-ping, ZOU Bo. System of generalized nonlinear strength theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(10): 2009 - 2016. (in Chinese))
- [30] LADE P V, RODRIGUEZ N M, VAN DYCK E J. Effects of principal stress directions on 3D failure conditions in cross-anisotropic sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2014, **140**(2): 1 - 12.
- [31] MATSUOKA H, JUN-ICHI H, KIYOSHI H. Deformation and failure of anisotropic sand deposits[J]. Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1984, **32**(11): 31 - 36.
- [32] LÜ X L, HUANG M S, ANDRADE J E. Strength criterion for cross-anisotropic sand under general stress conditions[J]. Acta Geotechnica, 2016, **11**(6): 1339 - 1350.
- [33] LU D C, MA C, DU X L, et al. Development of a new nonlinear unified strength theory for geomaterials based on the characteristic stress concept[J]. International Journal of Geomechanics, 2017, **17**(2): 1 - 11.
- [34] 杜修力, 马 超, 路德春. 岩土材料的非线性统一强度模型[J]. 力学学报, 2014, **46**(3): 389 - 397. (DU Xiu-li, MA Chao, LU De-chun. Nonlinear unified strength model of geomaterials[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014, **46**(3): 389 - 397. (in Chinese))
- [35] 杜修力, 马 超, 路德春. 岩土类材料的静水压力效应[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, **34**(3): 572 - 582. (DU Xiu-li, MA Chao, LU De-chun. Effect of hydrostatic pressure on geomaterials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2015, **34**(3): 572 - 582. (in Chinese))
- [36] LADE P V, NAM J, HONG W P. Shear banding and cross-anisotropic behavior observed in laboratory sand tests with stress rotation[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, **45**(1): 74 - 84.