

DOI: 10.11779/CJGE2017S2056

# Von-Mises 半无限空间结构安定理论研究

庄 妍<sup>1, 3</sup>, 王 孟<sup>2</sup>, 王康宇<sup>2</sup>

(1. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学岩土工程科学研究所, 江苏 南京 210098;

3. 江苏省岩土工程技术工程研究中心, 江苏 南京 210098)

**摘 要:** 进行了 Hertz 载荷作用下 Von-Mises 半无限空间的安定性研究。基于静力安定定理, 通过寻找最佳残余应力场建立了平面应变条件下严格的安定极限解析方法。避免了以往安定分析方法的大型数学规划的困难, 摆脱了计算中的维数障碍。研究结果表明: 严格的安定极限值随着材料屈服应力的提高而增大, 但随着摩擦系数的增大而减小; 临界残余应力场全部位于两个界限以内, 并且相交于临界点。当摩擦系数较小时, 临界点发生在表面以下, 随着摩擦系数逐渐增大到 0.3, 临界点从下层逐渐上移到表面。研究成果对安定理论应用于高速铁路设计具有参考意义。

**关键词:** 安定分析; 下限定理; Von-Mises 屈服准则; Hertz 荷载

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2017)S2 - 0232 - 04

**作者简介:** 庄 妍(1982 - ), 女, 江苏邳县人, 教授, 博士生导师, 主要从事软土地基加固和路面安定性分析等方面的研究。E-mail: joanna\_zhuang@163.com。

## The study of shakedown analysis for Von-Mises half-space

ZHUANG Yan<sup>1, 3</sup>, WANG Meng<sup>2</sup>, WANG Kang-yu<sup>2</sup>

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China; 3. Jiangsu Province's Geotechnical Research Center, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** This paper presents shakedown analysis of a half-space obeying Von-Mises criterion under Hertz loads in plane strain model. Based on the static shakedown theorem, a rigorous shakedown solution is established by searching for the best critical residual stress field. This method avoids the operation of mathematical programming in traditional method of shakedown analysis, and therefore obstruction since the large scale mathematical programming is overcome. It shows that both of the shakedown limit and rigorous shakedown limit increase with increasing the yield stress but decrease with the frictional coefficient. The critical residual stress fields all lie between two residual stress limits, which intersect beneath the surface for small value of  $\mu$ , while tend to converge at the half-space surface when  $\mu = 0.3$ , indicating that the failure mode of the material changes from subsurface failure to surface failure when increasing the frictional coefficient  $\mu$ . This study has significance reference in application of shakedown analysis to the design of high-speed railway.

**Key words:** shakedown analysis; static shakedown theorem; Von-Mises criterion; Hertz load

## 0 引 言

安定分析就是研究在交变载荷下工程结构的塑性响应。安定分析的任务是确定工程结构的安定极限载荷和破坏机制, 为工程设计和结构安全评价提供更准确更可靠的理论依据<sup>[1]</sup>。从 20 世纪 30 年代安定理论正式确立后, 安定分析的方法在国内外快速发展<sup>[2-4]</sup>。1962 年, Johnson<sup>[5]</sup>利用安定下限定理 (Melan 定理) 求解出了 Tresca 半无限空间体在 Hertz 纯滚动载荷作用下的安定极限值。1984 年, Sharp 等<sup>[6]</sup>第一次把安定方法运用到了道路工程领域, 他们把道路结构简化为一种平面应变问题, 运用安定下限定理对 Mohr-Coulomb

材料在循环移动载荷下的变形发展问题进行安定分析。当前通用的安定极限计算方法是采用数学规划的计算方法, 但是, 当结构单元数目多或载荷空间的顶点比较多时, 数学规划的约束条件就多。这样问题就变成大规模非线性数学规划问题, 出现维数障碍现象, 使得计算量大大增加, 即使对现代计算机来说, 也是件十分困难的工作<sup>[7]</sup>。

**基金项目:** 国家自然科学基金面上项目 (51478166); “青蓝工程”资助项目; 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目; 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (2015B17814, 2015B25914)

**收稿日期:** 2017 - 10 - 10

本文进行了 Hertz 荷载作用下 Von-Mises 半无限空间的安定性研究。基于静力安定定理, 通过寻找最佳残余应力场建立了平面应变条件下严格的安定极限解析方法。道路安定理论已经得到广泛的应用<sup>[8-9]</sup>, 铁路路基与道路具有相似的结构, 可以将安定理论推广到铁路设计中。而铁路结构中钢轨、混凝土轨枕等更适合采用 Von-Mises 屈服准则, 因此, 本文的研究成果对安定理论应用于铁路设计具有参考作用。

## 1 静力安定理论

经典安定理论由下限定理(静力安定定理)和上限定理(机动安定定理)组成。下限安定定理因为形式简单, 因此具有更广的应用。利用下限安定定理求解的重点在于确定符合要求的最优残余应力场。

Melan<sup>[10]</sup>于 1938 年提出了静力安定定理: 如果存在一个自平衡的残余应力场  $\sigma_{ij}^r$ , 它和由外荷载所引起的弹性应力场迭加后结构中任意一点均不发生屈服, 则结构是安定的。如果外部荷载用  $\lambda p$  表示, 其中  $p$  是单位荷载,  $\lambda$  是无量纲因子(又称安定乘子), 则静力安定理论可表示为

$$f(\lambda \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^r) \leq 0, \quad (1)$$

式中,  $\lambda \sigma_{ij}^e$  是由于外部静力荷载  $\lambda p$  所引起的弹性应力场,  $f(\sigma_{ij}) \leq 0$  表示材料的屈服准则。Melan 定理能够计算出结构安定的下限荷载值, 因此, 它也被称为下限安定定理。

## 2 问题描述

### 2.1 荷载定义

车轮与轨道的接触应力的计算, 国内外通常采用 Hertz 弹性理论推导得的公式<sup>[11]</sup>, 二维 Hertz 荷载(如图 1 所示)定义为

$$\begin{cases} p = \frac{2P}{\pi a^2} (a^2 - x^2)^{1/2}, \\ q = \frac{2Q}{\pi a^2} (a^2 - x^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (-a \leq x \leq a) \quad (2)$$

式中  $P$  为竖向荷载,  $p_0$  表示中心( $x=0$ )处的分布荷载, 则  $p_0=2P/\pi a$ ;  $Q$  为切向荷载, 根据摩擦系数  $\mu$  的关系有  $Q=\mu P$ ;  $2a$  为荷载宽度。

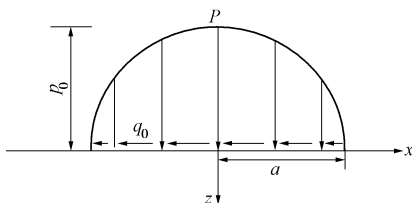


图 1 二维赫兹荷载简图

Fig. 1 2-D Hertz load

### 2.2 弹性应力场

二维 Hertz 荷载作用下半无限空间的弹性应力场分布问题能够简化为平面应变问题, 如图 2 所示。1985 年, Johnson 首先给出了二维弹性应力场的解析公式<sup>[11]</sup>。

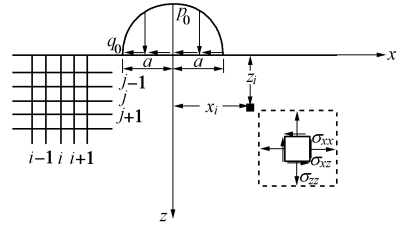


图 2 二维平面应变模型简图

Fig. 2 Plane strain model

Johnson 认为, 竖向荷载和切向荷载产生的应力场是互不影响的, 因此如果假设压应力为负, 则竖向荷载  $P$  引起的应力公式为:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{xx}^e)_p &= -\frac{2P}{\pi a^2} \left\{ m \left( 1 + \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) - 2z \right\}, \\ (\sigma_{zz}^e)_p &= -\frac{2P}{\pi a^2} m \left( 1 - \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right), \\ (\sigma_{xz}^e)_p &= -\frac{2P}{\pi a^2} n \frac{m^2 - z^2}{m^2 + n^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

切向荷载  $Q$  引起的应力公式为:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{xx}^e)_q &= \frac{2Q}{\pi a^2} \left\{ n \left( 2 - \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} \right) - 2x \right\}, \\ \frac{(\sigma_{zz}^e)_q}{Q} &= \frac{(\sigma_{xz}^e)_p}{P}, \\ \frac{(\sigma_{xz}^e)_q}{Q} &= \frac{(\sigma_{xx}^e)_p}{P}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2} + (a^2 - x^2 + z^2) \right\}, \\ n^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2} - (a^2 - x^2 + z^2) \right\}, \end{aligned}$$

其中  $m, n$  的符号分别与  $z$  和  $x$  相同。

任意一点  $(x, z)$  的应力为竖向荷载与切向荷载引起的应力场的叠加:

$$\sigma_{ij}^e = (\sigma_{ij}^e)_p + (\sigma_{ij}^e)_q. \quad (5)$$

## 3 安定分析

根据下限安定定理, 应用 Von-Mises 强度理论判据, 结构处于安定状态时应满足下式:

$$\begin{aligned} f &= (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + \\ &6\sigma_{xz}^2 - 2K^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $K$  是钢轨的屈服应力。

对于二维平面应变问题, 沿着荷载前进方向经历了相同的加载历史, 因此, 残余应力场  $\sigma_{ij}^r$  只沿着深度  $z$  的变化而变化。应用平衡条件和边界条件易知残余应力场竖向应力分量  $\sigma_{zz}^r$  和切应力分量  $\sigma_{xz}^r$  均为 0。由此可知, 平面应变问题, 总应力场均可表达如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \sigma_{xx}^e + \sigma_{xx}^r, \\ \sigma_{zz} &= \lambda \sigma_{zz}^e, \\ \sigma_{xz} &= \lambda \sigma_{xz}^e. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

根据普朗特-罗斯方程, 平面应变模型主应力满足方程:

$$\sigma_{yy} = 2\sigma_{xx} - \sigma_{zz} \quad (8)$$

将式 (7), (8) 代入式 (6) 整理得

$$\begin{aligned} f &= [(\lambda \sigma_{xx}^e + \sigma_{xx}^r) - \lambda \sigma_{zz}^e]^2 + (\lambda \sigma_{xz}^e)^2 - \frac{K^2}{3} \\ &= (\sigma_{xx}^r + M)^2 + N \leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $M = \lambda \sigma_{xx}^e - \lambda \sigma_{zz}^e$ ,  $N = (\lambda \sigma_{xz}^e)^2 - \frac{K^2}{3}$ 。

要使得不等式 (9) 满足, 需要满足下式:

$$N \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{K}{\sqrt{3} |\sigma_{xz}^e|} \quad (10)$$

搜索整个半无限空间中  $|\sigma_{xz}^e|$  最大的点, 由式 (10) 可以得到  $\lambda_{sd}$ , 即为安定极限乘子。

式 (10) 确定了式 (9) 成立的必要条件, 将  $\lambda = \lambda_{sd}$  代入式 (9) 中, 方程 (9) 即为残余应力  $\sigma_{xx}^r$  的一元二次不等式。方程  $f=0$  的两个根分别为:  $-M_i - \sqrt{-N_i}$  (小根) 和  $-M_i + \sqrt{-N_i}$  (大根)。因此, 每一点  $i$  的残余应力介于方程的两个根之间。即:

$$-M_i - \sqrt{-N_i} \leq (\sigma_{xx}^r)^i \leq -M_i + \sqrt{-N_i} \quad (11)$$

又因为残余应力  $\sigma_{xx}^r$  不随着  $x$  变化而变化, 所以在某一深度  $z_j$  层, 残余应力应是某一个定值。所以, 深度  $z_j$  层的残余应力满足:

$$\max_x (-M_i - \sqrt{-N_i}) \leq \sigma_{xx}^r \leq \min_x (-M_i + \sqrt{-N_i}) \quad (12)$$

式中,  $\max_x (-M_i - \sqrt{-N_i})$  (称“最大的小根”) 和  $\min_x (-M_i + \sqrt{-N_i})$  (称“最小的最大根”) 分别是残余应力的临界值。易知, 当“最小的最大根”小于“最大的小根”时, 残余应力在实数域内没有取值, 即此时结构无法达到安定状态, 因此, 需要减小安定乘子  $\lambda$ , 并重新代入式 (9) 中求解各层残余应力的临界值。

应当注意到, 对于任一个安定极限乘子, 即可求出一组由“最小的最大根”和“最大的小根”确定的残余应力“存在域”。通过一定的优化程序<sup>[12]</sup>, 搜索区间  $[0, \lambda_{sd}]$  内使式 (9) 成立的最大安定乘子  $\lambda'_{sd}$ , 即为所求的安定下限严格解。

## 4 结果及分析

利用上述的安定分析方法, 本文分析了材料屈服应力、轮轨摩擦系数等因素对安定极限的影响。并对残余应力的分布进行了研究。

### 4.1 材料屈服应力和摩擦系数对安定极限的影响

图 3 和图 4 分别显示了平面应变情况下的安定极限  $\lambda_{sd}$  和安定极限严格解  $\lambda'_{sd}$  与材料屈服极限  $K$  和摩擦系数  $\mu$  的关系。从图 3, 4 中可以看出, 安定极限  $\lambda_{sd}$  与严格解的安定极限  $\lambda'_{sd}$  均随着摩擦系数的增大而减小, 随着钢轨屈服应力的增大而增大。当摩擦系数从 0.0 增加到 1.0 时, 安定极限  $\lambda_{sd}$  减小了约 74.8%, 而严格解的安定极限  $\lambda'_{sd}$  减小了约 80.3%。

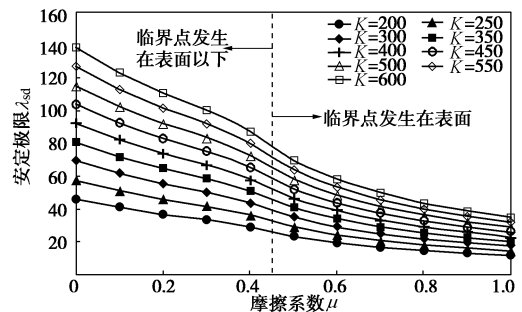


图 3 平面应变模型安定极限  $\lambda_{sd}$  与材料屈服极限和摩擦系数关系曲线

Fig. 3 Shakedown limit  $\lambda_{sd}$  versus friction coefficient for various yield stresses in plane strain model

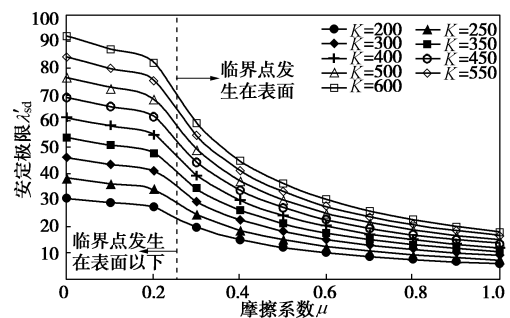


图 4 平面应变模型安定极限严格解  $\lambda'_{sd}$  与材料屈服极限和摩擦系数关系曲线

Fig. 4 Rigorous shakedown limit  $\lambda'_{sd}$  versus friction coefficient for various yield stresses in plane strain model

随着摩擦系数的增大, 临界点的位置逐渐从下层转移到表面, 例如图 3 显示当摩擦系数  $\mu \geq 0.5$  时临界点发生在表面, 而对于严格解得安定极限  $\lambda'_{sd}$  (图 4), 当摩擦系数  $\mu \geq 0.3$  时临界点发生在表面。对比图 3 和图 4, 严格解的安定极限减小了约 25.8%~48.0%。

### 4.2 安定极限残余应力分布情况

图 5 为平面应变情况下, 不同摩擦系数下残余应力场分布情况。真实的最佳残余应力场应该介于“最

小的大根”和“最大的小根”之间,因此,“最小的大根”和“最大的小根”相交的点为最危险的点,称为临界点。从图 5 中可以看出,随着摩擦系数的增大,临界点从下下层逐渐上移到表面处。根据 Melan 定理,残余应力场也需要满足自平衡的条件,同时,残余应力场也应当满足屈服方程:

$$f(\sigma_{xx}^r) \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sigma_{xx}^r}{K} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (13)$$

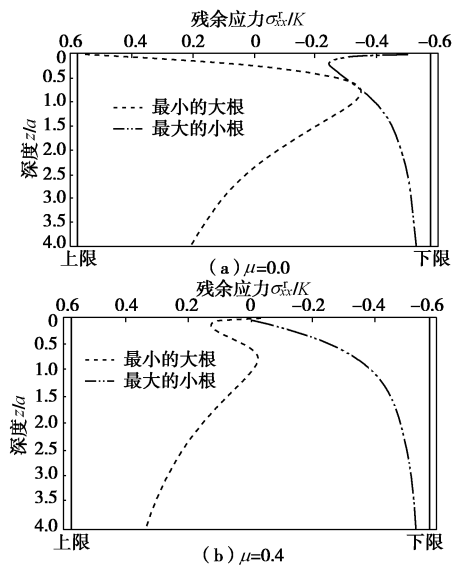


图 5 平面应变模型临界残余应力分布曲线

Fig. 5 Critical residual stress fields at the shakedown limit for plane strain model

## 5 结 论

本文进行了 Hertz 载荷作用下 Von-Mises 半无限空间的安定性研究。基于静力安定定理,通过寻找最佳残余应力场建立了平面应变条件下严格的安定极限解析方法。研究成果对安定理论应用于铁路设计具有参考作用。

(1) 基于静力安定定理的安定分析方法是一种可以被用于求解钢轨接触的严格安定极限解析解的有效方法,对实际工程设计具有指导性作用。

(2) 通过寻找可能的残余应力场的方法,可以求解安定极限状态是残余应力场的分布,对求解严格的安定极限有指导作用。

## 参考文献:

[1] KRABBENHØFT K, LYAMIN A V, SLOAN S W. Three-dimensional Mohr-Coulomb limit analysis using semidefinite programming[J]. Communications in Numerical

Methods in Engineering, 2007, 23(9): 1107 - 1119.

- [2] 陈 钢, 杨 璞, 刘应华. 弹塑性结构安定性上限分析的数值方法及应用[J]. 工程力学, 2005, 22(1): 21 - 27. (CHEN Gang, YANG Pu, LIU Yin-hua. A computational approach to kinematic shakedown analysis of elastic-plastic structures and its applications[J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(1): 21 - 27. (in Chinese))
- [3] LU M W, CHEN S Z. Stress function method in shakedown analysis of axisymmetric shell[J]. Acta Mechanica Sinica, 1992, 5(1): 99 - 110.
- [4] COLLINS I F, WANG A P, SAUNDERS L R. Shakedown in layered pavements under moving surface loads[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 1993, 17(3): 165 - 174.
- [5] JOHNSON K L. A shakedown limit in rolling contact[C]// Proceedings of the Fourth US National Congress of Applied Mechanics. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1962: 971 - 975.
- [6] SHARP R W, BOOKER J R. Shakedown of pavements under moving surface loads[J]. Journal of Transportation Engineering, ASCE, 1984, 110(1): 1 - 14.
- [7] 张明焕, 杨海元. 结构安定分析方法研究[J]. 应用力学学报, 1994, 11(4): 83 - 90. (ZHANG M H, YANG H Y. The study of shakedown analysis of structure[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1994, 11(4): 83 - 90. (in Chinese))
- [8] ZHAO J D, SLOAN S W, LYAMIN A V, et al. Bounds for shakedown of cohesive-frictional materials under moving surface loads[J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, 45: 3290 - 3331.
- [9] NGUYEN A D, HACHEMI A, WEICHERT D. Application of the interior-point method to shakedown analysis of pavements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 75: 414 - 439.
- [10] MELAN E. Zur plastizität des raumlichen kontinuum[J]. Archive of Applied Mechanics, 1938, 9(2): 116 - 126.
- [11] JOHNSON K L. Contact mechanics[M]. United Kingdom: Cambridge University Press, 1985.
- [12] YU H S, WANG J. Three-dimensional shakedown solutions for cohesive-frictional materials under moving surface loads[J]. International Journal of Solids and Structures, 2012, 49(26): 3797 - 3807.

(本文责编 明经平)