

DOI: 10.11779/CJGE2017S1051

# 软黏土地基流固耦合非线性力学行为的有限元数值分析

秦红军, 陈松

(中建水务环保有限公司, 深圳 518118)

**摘要:** 软黏土存在黏滞和固结作用的时效性, 同时还存在水分作用的耦合效应。为研究水分含量对软黏土地基效应的影响, 根据多孔介质理论结合罚参数法和 Galerkin 加权残值法, 在多孔介质中引入了弹黏塑性力学效应, 推导了软黏土地基的固液两相多孔介质模型和控制场方程, 建立了有限元计算模型, 给出了求解算法并编制了有限元程序。算例对比分析表明, 该程序能够有效模拟软黏性土地基的力学响应。

**关键词:** 多孔介质; 弹黏塑性; 流固耦合; 有限元

**中图分类号:** TU471.8

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-4548(2017)S1-0256-05

**作者简介:** 秦红军(1968-), 男, 高级工程师, 从事建筑工程相关研究。E-mail: qinhongjun@cscec.com。

## FEM analysis of nonlinear mechanical behavior of fluid-solid coupling for soft clay foundation

QIN Hong-jun, CHEN Song

(China Construction Water and Environmental Protection Co., Ltd., Shenzhen 518118, China)

**Abstract:** Soft clay is influenced by the time-dependence of viscosity and consolidation as well as coupling effect of moisture. In order to study the effect of moisture content on soft clay foundation, by introducing the elastic-viscoplastic mechanics effects into porous media, the model for solid-liquid two-phase porous media and the governing equations for soft clay foundation are deduced, and the finite element model and program are established based on the theory of porous media, the penalty function parameter method and the Galerkin weighted residual method. Compared with the theoretical results and the observed data, it is indicated that the proposed model and procedure are suitable for simulating the mechanical behaviors of soft clay foundation.

**Key words:** porous medium; elastic-viscoplasticity; fluid-solid coupling; finite element method

## 0 引言

软黏土在我国分布极为广泛, 几乎遍布沿海和河流的中下游及湖泊附近地区, 其主要力学特性是强度低、压缩性高、渗透性差、有明显的结构性和流变性等。在这一类土层上建造的构筑物常会出现沉降过大、承载力不满足要求等问题<sup>[1-2]</sup>。

软黏土除了具备经典弹塑性力学所描述的基本特征外, 变形过程中土体的黏性与固结同时发挥作用, 同时其内部水分又是影响应力应变的重要因素, 因此有必要建立一套考虑水分同软黏土骨架耦合作用的计算模型。本文根据多孔介质理论<sup>[3]</sup>, 结合罚参数法和 Galerkin 加权残值法<sup>[4]</sup>, 将弹黏塑性力学性质引入到固体骨架中, 推导得到了两相多孔介质软黏土有限元模型。该模型计算上的优点是: ①流固耦合采用微观上的固液两相间流动的摩擦阻力实现; ②引入了体积分数的概念, 可分析水分含量对软黏土地基响应的影响; ③将固体骨架的黏性效应和水分影响效应结合起来, 综合地分析软黏土的力学响应。

## 1 软黏土两相多孔介质模型

目前, 研究多孔介质宏观力学行为的主要理论有: Biot 理论<sup>[5-6]</sup>、多孔介质理论<sup>[7-8]</sup>和杂交混合物理论<sup>[9-10]</sup>。对于杂交混合物理论, 由于从微(细)观数学模型得到宏观数学模型的过程中, 涉及到基本单元体上的积分运算, 即便事先作必要的简化假定, 其数学模型仍相对较为复杂。然而, 基于连续介质混合物公理和体积分数的概念的多孔介质理论, 不仅可避免模型中的非相容性<sup>[11]</sup>, 而且较为简单, 可容易考虑诸如动力、材料和几何非线性等效应。

### 1.1 控制场方程

软黏土考虑为由固相和液相组成的连续均匀介质, 不计具体固体骨架的分布特性及孔隙结构的几何特征, 固液两相均匀连续的分散在控制空间, 采用微

观上的固液两相间流动的摩擦阻力实现流固耦合 (即公式 (2)、(3) 中的  $\alpha_v(\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s)$  项), 固体骨架与水微观不可压缩, 忽略体力和孔隙液体的黏性, 根据多孔介质理论可推得两相多孔介质模型的控制场方程:

$$\nabla \cdot (\phi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \phi^f \dot{\mathbf{u}}^f) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_e^s - \phi^s \nabla p - \rho^s \dot{\mathbf{u}}^s + \alpha_v (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) = 0, \quad (2)$$

$$-\phi^f \nabla p - \rho^f \dot{\mathbf{u}}^f - \alpha_v (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^s) = 0. \quad (3)$$

式中, 上标  $\cdot$  表示对时间求物质导数, 用角标  $\alpha$  表示固体骨架 ( $\alpha = s$ ) 和孔隙液体 ( $\alpha = f$ ),  $\nabla$  为 Nabla 算符,  $\mathbf{u}^\alpha$  为  $\alpha$  组分的位移;  $\rho^\alpha$  为宏观密度 ( $\rho^\alpha = \phi^\alpha \rho^{\alpha R}$ ,  $\rho^{\alpha R}$  是相应组分的真实密度);  $\phi^\alpha$  为体积分 (满足饱和约束条件  $\phi^s + \phi^f = 1$ ),  $p$  为孔隙压力,  $\mathbf{T}_e^s$  为固体骨架有效应力张量,  $\alpha_v$  为扩散阻力系数, 对于各向同性连续介质:

$$\alpha_v = (\phi^f)^2 \rho^f g / k^f, \quad (4)$$

式中,  $k^f$  是达西渗透系数,  $g$  为重力加速度。

## 1.2 固体骨架弹黏塑性模型

根据相关研究表明, 软黏土除具备经典弹塑性力学所描述的基本特征外还表现出明显的黏性特征。因此需要在固体骨架当中引入黏塑效应。

将固体骨架的应变  $\boldsymbol{\varepsilon}$  分解为弹性分量  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  和黏塑性分量  $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$  两部分, 因此应变率可表示为:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}. \quad (5)$$

根据 Bingham 模型<sup>[12]</sup>应力率只由弹性应变率确定, 即

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e. \quad (6)$$

由 Duvaut 和 Lions 于 1972 年提出的模型<sup>[13]</sup>来确定黏塑性应变率, 即

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{1}{\eta} \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) H(f(\boldsymbol{\sigma}, \chi)), \quad (7)$$

$$\dot{\chi} = -\frac{1}{\eta} (\chi - \bar{\chi}) H(f(\boldsymbol{\sigma}, \chi)). \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{D}$  为弹性应力应变矩阵,  $f$  为后继屈服函数,  $\chi$  为等效黏塑性应变, 常数  $\eta$  称为松弛时间,  $H(\cdot)$  为 Heaviside 阶跃函数 (当  $x > 0$  时,  $H(x) = 1$ ; 否则  $H(x) = 0$ ),  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  和  $\bar{\chi}$  分别为静力加载时的应力值和等效塑性应变, 等效塑性应变的增量可以表示为

$$d\bar{\chi} = \sqrt{\frac{2}{3}} d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (9)$$

而  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  可以视为当前应力  $\boldsymbol{\sigma}$  在屈服曲面  $f$  上的投影, 满足增量形式的弹塑性本构方程:

$$d\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}. \quad (10)$$

根据关联流动法则, 利用工作强化假设, 可以得到弹塑性应力应变关系矩阵

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_{ep} &= \mathbf{D} - \frac{d_{\mathbf{v}} d_{\mathbf{v}}^T}{H' + d_{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\alpha}}, \\ d_{\mathbf{v}} &= \mathbf{D} \mathbf{a}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中, 强化系数  $H'$  为单向应力-塑性应变曲线的局部斜率, 可以由单向屈服试验来确定,  $\mathbf{a}$  称为流动矢量, 定义为

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right]^T. \quad (12)$$

若选用 Mohr-Coulomb 屈服准则时, 初始屈服函数

$$f = \frac{1}{3} I_1 \sin \varphi + \sqrt{J_2} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \varphi \right) - c \cos \varphi, \quad (13)$$

式中,  $I_1$  为应力张量第一不变量,  $J_2$ 、 $J_3$  分别为应力偏量的第二、第三不变量,  $c$  为黏聚力,  $\varphi$  为内摩擦角。

通过上述方程, 便定义了一种弹黏塑性本构模型。其实质是在弹塑性模型的基础上引入了一个材料参数——松弛时间  $\eta$ , 从而在无黏的弹塑性体中加入了黏性性质。对方程 (5) ~ (8) 进行时间积分, 就可以得到的弹黏塑性应力的增量表达式, 而且经简单分析可知, 当松弛时间  $\eta$  取为无穷大或零时, 上述弹黏塑性本构模型可分别退化为弹性模型和弹塑性模型。

## 2 软黏土两相多孔介质有限元方法

方程 (1) ~ (3) 再加上相应的初边值条件便构成了完整的两相多孔介质动力问题的控制方程。对此初边值问题, 可采用 Galerkin 加权残值法推导有限元平衡方程。

在质量平衡方程 (1) 中引入一罚参数  $\beta$ , 使其成为

$$\nabla \cdot (\phi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \phi^f \dot{\mathbf{u}}^f) + \frac{p}{\beta} = 0. \quad (14)$$

当  $\beta \rightarrow \infty$  时, 方程 (14) 与方程 (1) 等价。将方程 (14) 化为

$$p = -\beta \nabla \cdot (\phi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \phi^f \dot{\mathbf{u}}^f), \quad (15)$$

并将其代入方程式 (2) 和方程式 (3) 中, 可消去孔压  $p$ 。再经过 Galerkin 加权残值法, 并对各个量值进行空间离散, 可得到两相多孔介质动力响应的有限元单元平衡方程, 即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_n^s & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_n^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_n^s \\ \ddot{\mathbf{u}}_n^f \end{Bmatrix} + \left( \beta \begin{bmatrix} (\phi^s)^2 \mathbf{C}_n & \phi^s \phi^f \mathbf{C}_n \\ \phi^s \phi^f \mathbf{C}_n & (\phi^f)^2 \mathbf{C}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & -\mathbf{A}_n \\ -\mathbf{A}_n & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_n^s \\ \dot{\mathbf{u}}_n^f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n^s \\ \mathbf{u}_n^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_n^s \\ \mathbf{R}_n^f \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_n^S &= \int_{v_n} \rho^S \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \\ \mathbf{A}_n &= \int_{v_n} \alpha \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \\ \mathbf{K}_n &= \int_{v_n} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep}^S \mathbf{B} dv; \\ \mathbf{R}_n^S &= \int_{\Gamma_{r,S}} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}^S d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{M}_n^F = \int_{v_n} \rho^F \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv; \\ \mathbf{C}_n = \int_{v_n} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_l \mathbf{B} dv; \\ \mathbf{R}_n^F = \int_{\Gamma_{r,F}} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}^F d\Gamma .$$

(17)

下标  $n$  表示单元  $n$  的节点上的相应物理量。式 (17) 中,  $\mathbf{N}$  为插值函数矩阵,  $\mathbf{B}$  为应变矩阵, 矩阵  $\mathbf{D}_l$  为

$$\mathbf{D}_l = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (18)$$

方程式 (16) 对整个区域所有单元求和, 就可以得到系统方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{J}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{p} = \mathbf{R} , \quad (19)$$

式中,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{R}$  分别为相应单元矩阵和向量的组集。

求解系统方程式 (19), 就可以得到固体骨架和孔隙流体的位移场和速度场, 孔隙压力可根据方程式 (15) 计算, 即

$$p = -\beta \nabla \cdot (\phi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \phi^f \dot{\mathbf{u}}^f) = -\beta \mathbf{L} \mathbf{B} (\phi^s \dot{\mathbf{u}}^s + \phi^f \dot{\mathbf{u}}^f) , \quad (20)$$

式中,  $\mathbf{L} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ 。

在算法中采用了 Hughes 提出的隐式-显式方法<sup>[14]</sup>, 这种将隐式和显式相结合的算法可有效地解决算法选择的问题。通过上面介绍的理论和算法, 编制了相应的软黏土两相多孔介质的有限元分析程序。

3 数值算例

某坝基表层 9~11 m 范围内为近代海相沉积的淤泥土层, 其下为亚黏土层。由于淤泥层的承载力和变形均不能满足工程要求, 故需进行大面积地基处理, 为保证处理效果, 采用堆载预压的方式进行处理。堆载土体重度为 17.6 kN/m<sup>3</sup>, 高度为 4 m。现场测得固结 230 d 时的堆载坡脚处竖向沉降为 75 cm, 水平位移为 12 cm。相关计算参数通过试验和查用相关文献<sup>[15]</sup>得到, 为简化计算, 按平面应变问题处理。采用前面描述的弹黏塑性多孔介质有限元模型计算土层中的响应情况。二维平面问题的有限元计算模型与加载形式分别见图 1, 2, 土层材料参数见表 1。

图 3 给出了表面排水充分情况下的一组计算结果 (相当于设排水板)。计算结果表明: ①地基沉降均匀, 堆载区域外地面隆起不明显, 随着土体固结呈现出明

显的梯度变化 (图 3 (a)、(b)、(c)); ②由于设了排水板, 内部水分较易排出, 孔隙压力消散也较快 (图 3 (d)、(e)); ③地基表面最大沉降为 68 cm, 最大水平位移为 11 cm, 较接近实测沉降值, 随着加荷的完成, 无论是竖向变形还是水平变形均趋于稳定, 变形速率呈明显的衰减特征, 且最终趋于平衡 (图 3 (f))。从以上分析可以看出, 在自由排水的情况下, 土体的时效性主要表现为固结过程, 孔隙水的排出是变形的主要原因。

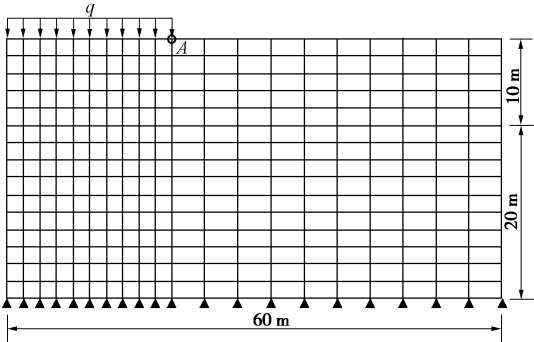


图 1 有限元计算模型

Fig. 1 Finite element model

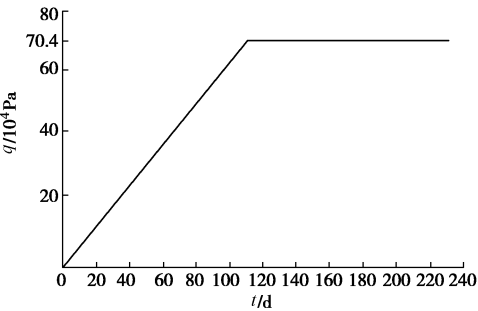


图 2 加载曲线

Fig. 2 Loading curve

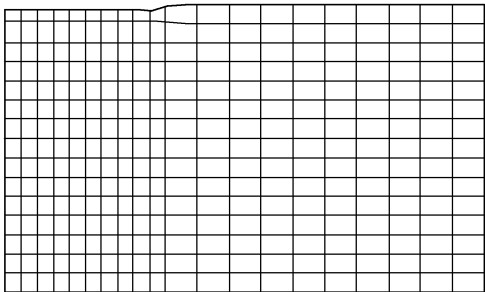
作为对比, 图 4 给出了采用同一计算模型计算的 非自由排水时软基的相应结果 (相当于不设排水板)。从图 4 可见: ①地基沉降不均匀 (坡脚处最大), 堆载区域外地表隆起明显 (图 4 (a)、(b)); ②由于堆载区的挤压及表面隆起局部产生负压, 因此内部水分从堆载区排出 (图 4 (c)); ③随着加荷过程的完成地基固结只能完成很小的一部分, 孔隙压力消散很慢 (图 4 (d)、(e)); ④水平向变形较大, 明显大于竖向变形, 与表面排水充分计算结果相反, 水平位移及竖向位移随着荷载增加增长很快, 在荷载增加结束后仍然不断发展, 沉降速率呈非衰减蠕变特性 (图 4 (f))。该计算结果表明, 当表面非自由排水时, 相同荷载作用下土体单元的应力水平较高, 其变形主要是由于土体的剪切流变产生, 即土颗粒向侧向挤出。在此种情况下, 固结变形是次要的, 所对应的蠕变也不呈衰减稳定趋



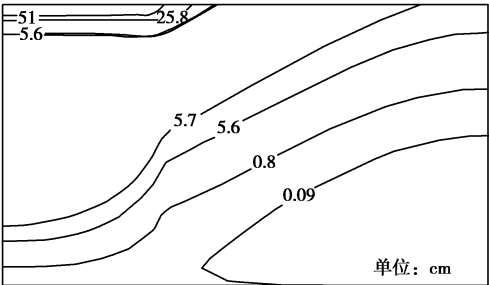
表 1 土层的材料参数

Table 1 Material properties of soils

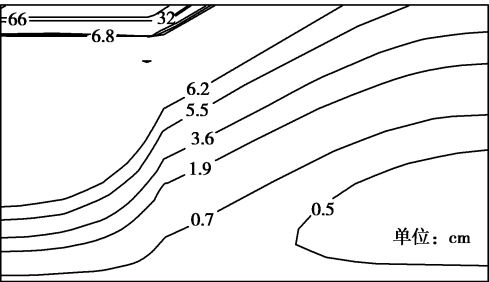
土层	$\rho^s/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$\rho^f/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$E/\text{MPa}$	$\nu$	$w/\%$	$c/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	$\varphi/(\text{^\circ})$	$k/(10^{-7}\text{cm}\cdot\text{s}^{-1})$	$\eta/d$
淤泥	1670.0	1000.0	1.71	0.37	60.5	15.3	12.0	3.44	8.77
亚黏土	2000.0	1000.0	4.90	0.42	28.2	21.4	20.6	6.80	4.08



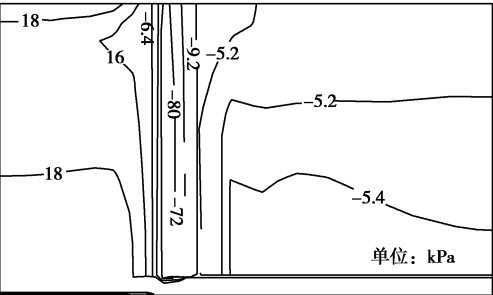
(a) 230 d网格变形图



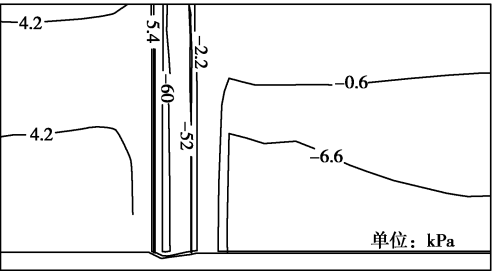
(b) 110 d软基中竖向位移分布图



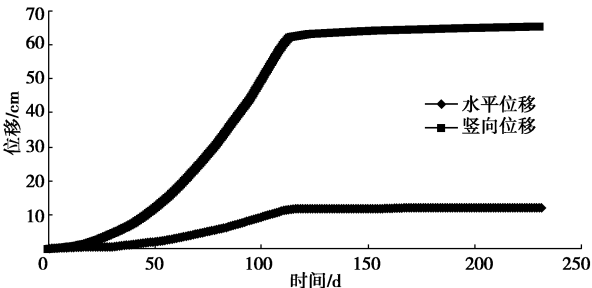
(c) 230 d软基中竖向位移分布图



(d) 110 d软基孔隙压力分布图



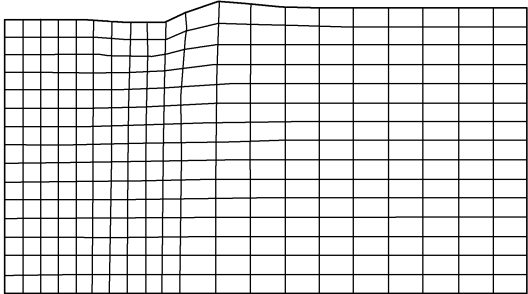
(e) 230 d软基孔隙压力分布图



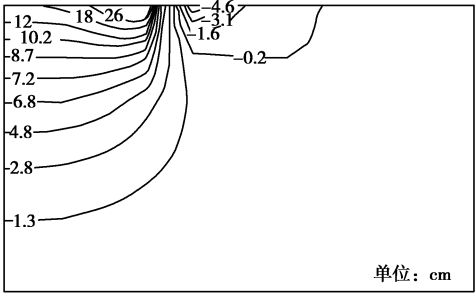
(f) 软基中A点竖向位移、水平位移随时间的关系

图 3 软基中表面自由排水时计算结果

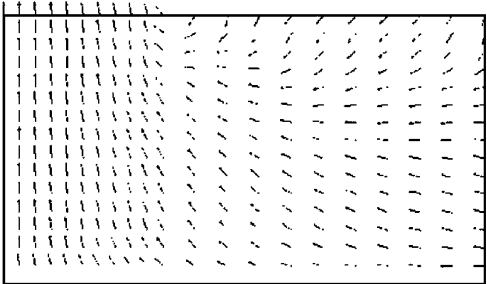
Fig. 3 Results with surface free drainage in soft foundation



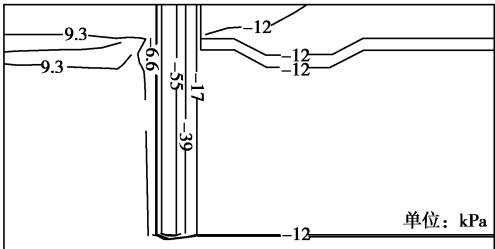
(a) 230 d网格变形图



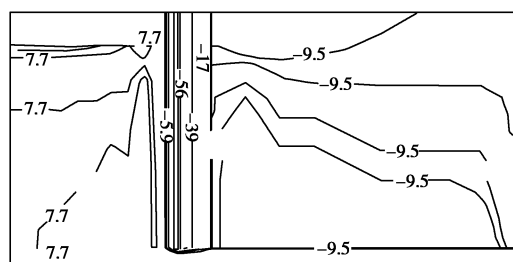
(b) 230 d软基中竖向位移分布图



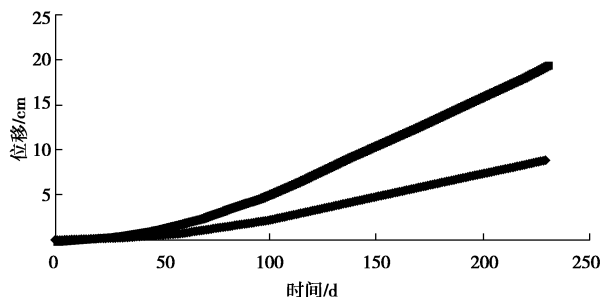
(c) 110 d孔隙液体流场分布图



(d) 110 d软基孔隙压力分布图



(e) 230 d软基孔隙压力分布图



(f) 软基中A点竖向位移、水平位移随时间的关系

图4 软基中表面非自由排水时计算结果

Fig. 4 Results of surface non-free drainage in soft foundation 势发展, 变形随时间而增长, 应力水平不断提高, 至某一时段时, 变形可能突然剧增, 表明蠕变最终可能导致土体在某一时刻整体失稳。

## 4 结 语

在多孔介质模型中考虑弹黏塑性力学效应, 并根据上述理论编制了有限元程序, 通过该程序的计算结果表明土体的排水性能较好时, 其变形主要是固结变形, 反之, 土体的变形主要来源于剪切流变变形; 水分、黏滞特性和固结特性都是影响软土变形的重要特性, 从宏观上是通过其耦合效应对工程起着控制作用, 当水分含量相同的情况下固结作用加强时, 黏滞作用会降低, 土体的变形与稳定与其共同作用结果有关。通过以上分析表明本文采用的模型可以客观的反映土体随时间的响应情况, 证明了计算模型和程序的可靠性。

## 参考文献:

- [1] HANSBO S. Consolidation of fine grained soil by prefabricated drains[C]// Proc of 10th ICSMFE (Vol 3). 1981: 677 - 682.
- [2] ZENG G X, XIE K H. New development of the vertical drains theories[C]// Proc of 12th ICSMFE (Vol 2). 1989: 1435 - 1438.
- [3] BOWEN R M. Compressible porous media by use of the

theory of mixtures[J]. J Int J Engng Sci, 1982, 20: 19 - 45.

- [4] 王勖成. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997: 167 - 190. (WANG Mao-Cheng. The finite element method base theory and Numerical methods[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997: 167 - 190. (in Chinese))
- [5] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. J Appl Phys, 1941, 12: 155 - 164.
- [6] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous media: I Low frequency range[J]. Journal Acoust Soc Am, 1956, 28 (2): 168 - 178.
- [7] BOWEN R M. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures[J]. Int J Engng Sci, 1982, 20: 697 - 735.
- [8] BOER R de. Theory of porous media: Highlights in the historical development and current state[J]. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000, 23: 321 - 362.
- [9] SCHREFLER B A. Mechanics and thermodynamics of saturated/ unsaturated porous materials and quantitative solution[J]. Appl Mech Rev, 2002, 55: 351 - 388.
- [10] SCHREFLER B A, ZHAN X, SIMONI L. A coupled model for water flow, air flow and heat flow in deformable porous media[J]. Int J Num Meth Fluid Flow, 1995, 5: 531 - 547.
- [11] EDELMAN I, WILMANSKI K. Asymptotic analysis of surface waves at vacuum/porous medium and liquid/porous medium interfaces[J]. Continuum Mech Thermody, 2002, 14: 25 - 44.
- [12] 杨绪灿, 杨桂通, 徐秉业. 黏塑性力学概论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1985: 90 - 120. (YANG Xu-can, YANG Gui-tong, XU Bing-ye. Introduction on Visco-plasticity Mechanics[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1985: 90 - 120. (in Chinese))
- [13] DUVAUT G, LIONS J L. Les inequations en mecanique et en physique. Dunod, Paris, France, 1972: 236 - 271.
- [14] OWEN D R J, HINTON E. Finite elements in plasticity: theory and practice[M]. Swansea, UK: Pineridge Press Limited, 1980: 431 - 465.
- [15] 詹美礼, 钱家欢, 陈绪禄. 软土流变特性试验及流变模型[J]. 岩土工程学报, 1993, 15(3): 54 - 62. (ZHAN Mei-li, QIAN Jia-huan, CHEN Xu-lu. Tests on rheological behavior of soft soil and rheologic model[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1993, 15(3): 54 - 62. (in Chinese))

(本文责编 明经平)