DOI：10.11779/CJGE201711009

基于快速多极边界元法的局部场地对地震波高频散射二维模拟

刘中宪[1]，孙帅杰[1]，赵瑞斌[1]，王　冬[2]

（1. 天津城建大学（天津市土木建筑结构防护与加固重点实验室），天津 300384；2. 河北建研科技有限公司，河北 石家庄 050021）

摘　要：结合快速多极子展开技术与间接边界元法，发展一种新的高频地震波散射（二维平面内）快速模拟方法。精度和效率检验表明该方法具有很高的计算精度、求解效率及良好的数值稳定性，同时可大幅度降低计算存储量。进而以半空间峡谷与凸起地形对平面 SV 波的高频散射为例，讨论了峡谷及凸起周围地震波宽频散射基本特征，给出了千米尺度局部场地、0～25 Hz 频带宽度的散射模拟结果。分析表明：高频 SV 波垂直入射下，峡谷角部水平和竖向位移均表现出明显的放大效应，而峡谷底部的散射效应较弱；半圆凸起顶部附近水平位移谱峰值高达 5.0，山脚处位移反应则受到明显的抑制作用；斜入射情况，峡谷地形迎波面一侧位移幅值较大，而凸起地形则是背波面一侧放大显著。数值结果可为复杂局部场地中大型工程抗震设计提供部分理论依据。

关键词：局部场地效应；地震波散射；高频；间接边界元法；快速多极子展开

中图分类号：P315.3；TU435　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000－4548(2017)11－2017－09

作者简介：刘中宪(1982－)，男，河南泌阳人，博士后，教授，主要从事地震工程、工程波动领域的研究和教学工作。E-mail: zhongxian1212@163.com。

Two-dimensional simulation of high-frequency scattering of seismic waves by local sites based on fast multi-pole boundary element method

LIU Zhong-xian[1], SUN Shuai-jie[1], ZHAO Rui-bin[1], WANG Dong[2]

(1.Tianjin Chengjian University, Tianjin Key Laboratory of Civil Structure Protection and Reinforcement, Tianjin 300384, China; 2. Hebei Construction Technology Co., Ltd., Shijiazhuang 050021, China)

Abstract: A new high-precise fast indirect boundary element method is developed to solve the two-dimensional scattering problems of high-frequency seismic waves (2D in-plane) based on the fast multi-pole expansion technique. It is verified that this method has high accuracy, efficiency and excellent numerical stability, and can greatly reduce the computational storage. Taking the seismic response of a canyon and a hill in a half space under high-frequency incident plane SV waves as an example, the basic characteristics of high-frequency scattering around the canyon and hill are discussed, and the scattering results of 0～25 Hz broadband waves by large-scale local sites of thousands-meters are illustrated. The numerical results show that under the high-frequency incident SV waves, the amplification effect of the canyon on the horizontal and vertical displacement under high-frequency incident SV waves can be seen clearly at the corner of the canyon, but seems not so pronounced at the bottom of the canyon. The spectral peak of displacement amplitudes reaches up to 5.0 near the top of the hill, while the displacement response at the foot of the hill is constrained. As for the obliquely incident SV waves, the displacement at the canyon surface is more pronounced, but the amplification effect is more significant at the back of hill surface. The numerical results may provide a theoretical basis for the seismic design of large-scale projects constructed in complex local sites.

Key words: local site effect; scattering of seismic wave; high frequency; indirect boundary element method; fast multi-pole expansion

0　引　　言

局部场地效应研究是地震工程、地震学等领域的重要课题之一，对于震害解释、地震区划、重大工程抗震设计等均具有重要意义。理论分析方法整体上可

基金项目：国家自然科学基金项目（51678390）；天津市科技支撑重大项目（15ZXCXSF00070）；天津市应用基础与前沿技术研究计划重点项目（13JCZDJC35500）

收稿日期：2016－08－05

分为解析法和数值法。其中解析法主要有波函数展开法[1-4]；数值法更适合处理实际场地复杂的几何、材料特征，包括域离散型的有限元法[5]、有限差分法[6]和边界型的边界单元法[7-8]、边界积分方程法[9]等。其中边界元法具有降维、自动满足无限远辐射条件以及无高频数值弥散的优点，因此特别便于处理含无限域的波动问题（无需引入无反射边界条件）。但该方法在实际应用中一个突出弱点在于待求解方程系数矩阵为非稀疏满阵，从而对于高自由度问题求解效率较低。因此，近年来国内外众多学者开展了快速 BEM 研究，包括快速多极子展开、小波方法、ACA 技术等，其中快速多极子方法发展较早，在声波、电磁波等领域发展已比较成熟，但在地震波散射领域目前国内外成果较少。Fujiwara 首次实现了盆地对地震波散射的快速多极边界元求解[10]；Marc Bonnet 研究组结合最新的 FMM 技术，在单台 PC 上实现了数十万自由度的地震波散射求解[11]。但从现有文献看，地震波散射数值解模拟频率还大多局限于中、低频率。鉴于近场地震动频带较宽，10～20 Hz 高频成分仍占据较大能量；另外对于中、低频率波，较大尺度场地情况的无量纲频率（不均匀场地尺度相对地震波长比值）同样较高。因此发展高频模拟方法具有重要的理论与现实意义。

本文主要工作在于：首先在文献[12]出平面问题求解基础上，进一步将快速多极间接边界元法(FMM-IBEM)发展到局部场地对高频 P、SV 和 Rayleigh 波的二维散射问题求解（平面应变）。由于涉及到压缩波、剪切波及面波间的波型转换，因而波场构造更为复杂。在方法精度、效率检验基础上，进而以半空间峡谷、凸起地形对平面 SV 波散射为例进行计算模拟，给出了千米尺度局部场地 0～25 Hz 带宽的频域分析结果，揭示了峡谷、凸起地形周围高频波二维散射若干规律，以期为复杂场地中的大型工程（桥梁、大坝等）抗震设计提供部分理论依据。

1 间接边界元法（IBEM）

下面以半空间中局部起伏地形对平面 P、SV、Rayleih 波的散射为例，简要介绍传统间接边界元法的基本原理。计算模型如图 1 所示。各向同性均匀介质 D 中稳态波传播的运动方程可表示为

$$\mathrm{div}(\sigma_i)+\rho\omega^2 u_i=0 \quad (x\in D) \quad , \tag{1}$$

式中，σ_i 和 u_i 分别表示应力和位移矢量，ρ 为密度，ω 为圆频率，i=1，2。

首先将总波场分解为自由场和散射场。IBEM 方法的核心部分是构造半空间中的散射场，即基于单层位势理论，在起伏地表表面（L）及附近半空间水表面（H）上施加虚拟荷载，然后由半空间表面上的零应力边界条件建立方程求解得到虚拟荷载密度。最后弹性半空间 D 中的总波场则由散射波场与自由波场叠加得到。消除体力的影响下，弹性半空间的散射位移和应力可表达为[13]

$$u_i^s(x)=\int_S \phi_j(y)G_{ij}(x,y)\mathrm{d}S_y \quad , \tag{2}$$

$$\sigma_i^s(x)=\int_S \phi_j(y)T_{ij}(x,y)\mathrm{d}S_y \quad 。 \tag{3}$$

其中，$\phi_j(y)$ 可看作边界单元上施加的虚拟均布荷载密度，半空间二维集中荷载动力格林函数表达式为

$$G_{ij}(x,y)=\frac{1}{4\pi\mu}\left\{\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\left[H_0^{(2)}(k,x,y)-H_0^{(2)}(h,x,y)+\delta_{ij}H_0^{(2)}(k,x,y)\right]\right\} \quad , \tag{4}$$

$$T_{ij}(x,y)=\lambda\left(\frac{\partial G_{1j}}{\partial x_1}+\frac{\partial G_{2j}}{\partial x_2}\right)n_i+\mu\left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_1}+\frac{\partial G_{1j}}{\partial x_j}\right)n_1+\mu\left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_2}+\frac{\partial G_{2j}}{\partial x_i}\right)n_2 \quad 。 \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别为场点和源点；i,j=1，2，对应于 x,y 方向（下文同）；$\mathrm{H}_n^{(2)}(\bullet)$ 为 n 阶第二类 Hankel 函数；n_i 为场点 $\boldsymbol{x}$ 处边界单元单位法向量与轴 i 正方向夹角余弦；k 为剪切波波数，$k=\omega/c_\beta$；h 为压缩波波数，$h=\omega/c_\alpha$；ω为圆频率；c_α，c_β 分别表示压缩波和剪切波速度。

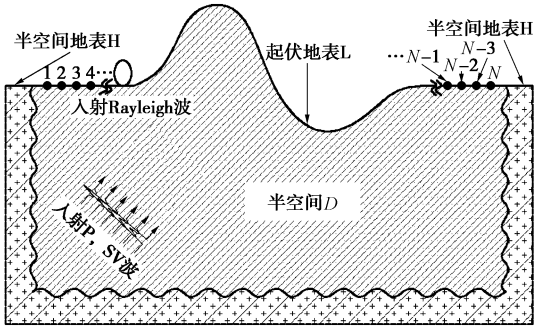


图 1 半空间中局部起伏地形对平面 P、SV、Rayleigh 波二维散射计算模型

Fig. 1 Computational model for 2-D scattering of P, SV and Rayleigh waves by rolling topography in half space

问题边界条件为弹性半空间表面上的牵引力为零即

$$\sigma_i^{(t)}=0 \quad 。 \tag{6}$$

弹性总位移、应力场可表达为自由场与散射场的叠加：

$$u_i^{(t)}=u_i^{(f)}+u_i^{(s)} \quad (i=1,2) \quad , \tag{7}$$

$$\sigma_i^{(t)}=\sigma_i^{(f)}+\sigma_i^{(s)} \quad (i=1,2) \quad 。 \tag{8}$$

结合（3）、（6）、（8）可得

$$\int_S \phi_j(y) T_{ij}(x,y)\mathrm{d}S_y = -\sigma_i^{\mathrm{f}}(x) \quad 。 \tag{9}$$

式（9）即为包含奇异性的第二类 Fredholm 积分方程。求解时需离散边界面，如图 1 所示，并在每个单元上施加虚拟均布荷载。假定 $\phi_j(y)$ 为边界单元上的常量，则存在线性方程组：

$$\sum_{l=1}^{N} \phi_j(y_l) t_{ij}(x_n, y_l) = -t_i^{(\mathrm{f})}(x_n) \quad , \tag{10}$$

$$t_{ij}(x_n, y_l) = \int_{y_l - \frac{\Delta S}{2}}^{y_l + \frac{\Delta S}{2}} T_{ij}(x_n, y_l)\mathrm{d}S_y \quad 。 \tag{11}$$

当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ 时，式（10）、（11）可以直接利用高斯积分法计算，下文计算中每个单元上采用单点高斯积分。当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 时，则需利用格林函数展开式进行解析积分求解，容易推得[13]

$$t_{ij}(x_n, y_n) = -\frac{1}{2}\delta_{ij} \quad , \tag{12}$$

$$u_i(x_n, y_n) = \frac{1}{8i}\rho(H_A + H_B)\delta_{ij} \quad , \tag{13}$$

$$H_A = \frac{\Delta s}{\alpha^2}\left\{1 + \frac{2\mathrm{i}}{\pi}\left[1 - \frac{\gamma}{3} - \lg\left(\frac{h\Delta s}{4}\right)\right]\right\} + \frac{\Delta s}{\beta^2}\left\{1 + \frac{2\mathrm{i}}{\pi}\left[1 - \frac{\gamma}{3} - \lg\left(\frac{k\Delta s}{4}\right)\right]\right\} \quad , \tag{14}$$

$$H_B = \frac{3h^2\Delta s}{8\alpha^2}\left\{\frac{1}{12} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\left[\frac{1}{9} - \frac{\gamma}{3} - \frac{\lg\left(\frac{h\Delta s}{4}\right)}{3}\right]\right\} - \frac{3k^2\Delta s}{8\beta^2}\left\{\frac{1}{12} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\left[\frac{1}{9} - \frac{\gamma}{3} - \frac{\lg\left(\frac{k\Delta s}{4}\right)}{3}\right]\right\} \quad , \tag{15}$$

式中，γ 为 Euler 常数（可取为 0.5772），Δs 为单元长度。

对式（10）进行求解得到各单元上虚拟分布荷载密度。在上述求解中，积分方程系数矩阵为非对称满阵，当计算规模较大时，其运算量和存储量都是巨大的。下面考虑结合广义极小余量法（GMRES）及快速多极子展开技术，突破常规边界元法求解大规模问题计算瓶颈。

2　快速多极子间接边界元法原理

在传统的边界元法中，采用 GMRES 迭代算法求解大型方程组，计算量庞大且需要存储大型系数矩阵。快速多极子边界元法使用树结构作为主要存储和运算对象，对核函数进行展开和传递，借助 GMRES 迭代算法，在每一次迭代中以树结构取代系数矩阵，与迭代量相乘，通过迭代精度控制，得出结果。

核函数展开方式不尽相同，本文采用 Graf 加法定理[14]对式（5）中核心函数 $H_0^{(2)}(\bullet)$ 进行多极展开：

$$H_0^{(2)}(k_i r) = \sum_{n=-p}^{p} O_{-n}(k_i, y_{\mathrm{c}} x) I_n(k_i, y_{\mathrm{c}} y) \quad , \tag{16}$$

式中，p 为展开截断数，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{c}}$ 为多极展开中心，且满足 $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{y}}\right| < \left|\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{x}}\right|$，如图 2。函数 $O_n(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{x}})$ 和 $I_n(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{y}})$ 分别定义如下：

$$O_{-n}(k_i, y_{\mathrm{c}} x) = H_{-n}^{(2)}(k_i \mid y_{\mathrm{c}} x \mid)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi} \quad , \tag{17}$$

$$I_n(k_i, y y_{\mathrm{c}}) = \mathrm{J}_n(k_i \mid y_{\mathrm{c}} y \mid)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \quad , \tag{18}$$

式中，$\mathrm{J}_n(g)$ 为第一类贝塞尔函数，ϕ，φ 分别为向量与 x 正方向的夹角，如图 3。核函数的多极展开截断数根据经验公式[15]为

$$p = kD + c_0 \lg(kD + \pi) \quad , \tag{19}$$

式中，D 为叶子或父细胞边长，c_0 为精度控制参数。

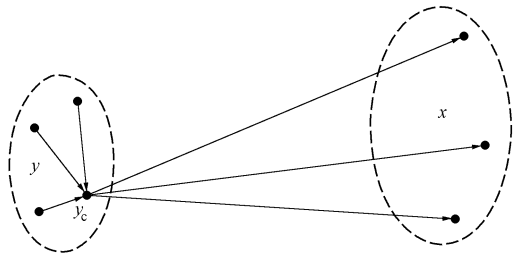


图 2　多极展开

Fig. 2 Multipole expansion

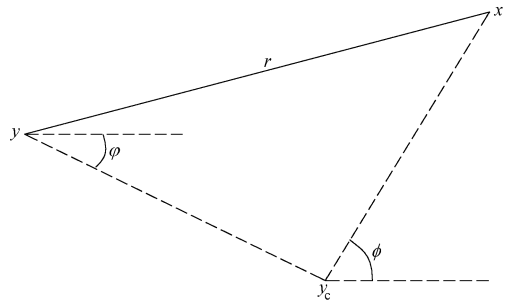


图 3　Graf 加法平面参数

Fig. 3 Graf addition plane parameters

将式（16）代入式（2）可得积分式的多极展开：

$$\int_S \phi_j(y) G_{ij}(x,y)\mathrm{d}S_y = \frac{1}{4\pi\mu}\sum_{n=-p}^{p} M_n(k, y y_{\mathrm{c}}) N_{ij}^{O,k}(y_{\mathrm{c}} x) + M_n(h, y y_{\mathrm{c}}) N_{ij}^{O,h}(y_{\mathrm{c}} x) \quad , \tag{20}$$

$$N_{ij}^{C,k}(y_{\mathrm{c}} x) = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 C_n(k, y_{\mathrm{c}} x)}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} C_n(k, y_{\mathrm{c}} x) \quad , \tag{21}$$

$$N_{ij}^{C,h}(y_{\mathrm{c}} x) = -\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 C_n(h, y_{\mathrm{c}} x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad 。 \tag{22}$$

式中，C_n 为 O_n 或 I_n，$M_n(q, y y_c)$ 称为关于点 y_c 的多级展开系数，即

$$M_n(q, y y_{\mathrm{c}}) = \int_S \phi_j(y) I_n(q, y y_{\mathrm{c}})\mathrm{d}S_y \quad 。 \tag{23}$$

从式（20）可以看出基本解已经被分离成 x 和 y 独立的两部分，从而 $M(y y_{\mathrm{c}})$ 只需计算一次便可重复用于

计算不同场点 x，如图 2 所示。且由关系式（5），积分式（3）可展开为

$$\int_S \phi_j(y)T_{ij}(x,y)\,\mathrm{d}S_y = \frac{1}{4\pi\mu}\sum_{n=-p}^{p}\sum_{q=h,k} M_n(q,yy_\mathrm{c})\times \left[\lambda\left(\frac{\partial N_{1j}^{O,q}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{2j}^{O,q}}{\partial x_2}\right)n_i+\mu\left(\frac{\partial N_{ij}^{O,q}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{1j}^{O,q}}{\partial x_i}\right)n_1+ \mu\left(\frac{\partial N_{ij}^{O,q}}{\partial x_2}+\frac{\partial N_{2j}^{O,q}}{\partial x_i}\right)n_2\right] \quad , \tag{24}$$

式中，$N_{ij}^{O,q}=N_{ij}^{O,q}(y_\mathrm{c}x)$ 为式（21）、（22）所表达。将点 y_c 移动到附近新的一点 y_z ,则 $M(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_\mathrm{c})$ 可展开为

$$M_\mathrm{n}(q,yy_\mathrm{c})=\sum_{t=-\infty}^{\infty} I_{n-t}(q,y_\mathrm{c}y_z)M_t(q,yy_z) \quad 。 \tag{25}$$

式（25）即为多极展开系数传递式。进而可逐一得到各层结点的多极展开系数。

运用多极展开能够快速计算积分式（2）、（3）。然而，为了更有效地计算此积分式，可在快速多极中引进局部展开。在进行局部展开之前，需引进结点邻居和相互作用列表两个概念。如图 4 所示，两结点互为邻居是指它们位于同一层且至少共享一个角点。相互作用列表则指这两结点本身不是邻居，但是它们的父结点是邻居关系。在二维四叉树结构中，一个结点至多存在 8 个邻居结点，至多存在 27 个相互作用列表结点。

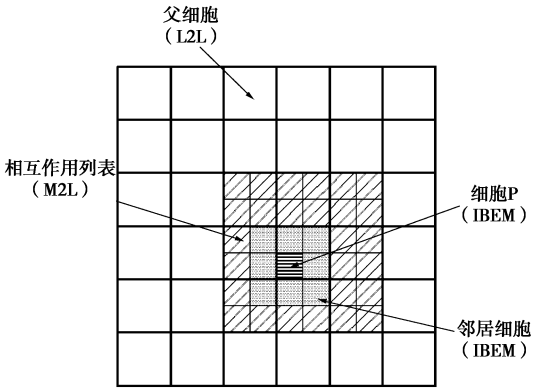


图 4 结点相互作用列表

Fig. 4 List of node interaction

如图 5 所示，设定一点 x_c 靠近场点 $\boldsymbol{x}$，且满足 $|x-x_\mathrm{c}|<|y-x_\mathrm{c}|$，对式（27）进行如下局部展开：

$$\int_S \phi_j(y)G_{ij}(x,y)\mathrm{d}S_y=\frac{1}{4\pi\mu}\sum_{n=-p}^{p}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\left[L_n^t(k,yx_\mathrm{c})N_{ij}^{I,k}(x_\mathrm{c}x)+ L_n^t(h,yx_\mathrm{c})N_{ij}^{\mathrm{I},h}(y_\mathrm{c}x)\right] \quad , \tag{26}$$

$$L_n^t(q,yx_\mathrm{c})=O_{-n-t}(q,y_\mathrm{c}x_\mathrm{c})M_n(q,yy_\mathrm{c}) \quad , \tag{27}$$

同理可得

$$\int_S \phi_j(y)T_{ij}(x,y)\mathrm{d}S_y=\frac{1}{4\pi\mu}\sum_{n=-p}^{p}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\sum_{q=h,k} L_n^t(q,yy_\mathrm{c})\cdot \left[\lambda\left(\frac{\partial N_{1j}^{I,q}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{2j}^{I,q}}{\partial x_2}\right)n_i+\mu\left(\frac{\partial N_{ij}^{I,q}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{1j}^{I,q}}{\partial x_i}\right)n_1+ \mu\left(\frac{\partial N_{ij}^{I,q}}{\partial x_2}+\frac{\partial N_{2j}^{I,q}}{\partial x_i}\right)n_2\right] \quad , \tag{28}$$

式中，$N_{ij}^{I,q}=N_{ij}^{I,q}(x_\mathrm{c}x)$ 为式（21）、（22）所表达。当点 x_c 被移动到附近新的一点 x_z，则 $L(x,x_\mathrm{c})$ 可展开为

$$L_\mathrm{m}^t(x_z)=\sum_{t=-\infty}^{\infty} I_{t-m}(x_\mathrm{c},x_z)L_n^t(x_\mathrm{c}) \quad 。 \tag{29}$$

在计算过程中，采用 GMRES 进行迭代求解运算。为加快 GMRES 求解收敛速度，在 GMRES 求解前可采用预处理技术[16]。这里采用近场格林函数解构造一窄带稀疏矩阵，对方程组进行预处理。同时考虑半空间介质黏滞阻尼参数，能够有效提高收敛速率。一旦边界单元上施加的虚拟均布荷载密度求得，即可利用式（2）、（3）求出空间域内任意一点散射场位移和应力，叠加上自由场作用即可得出总场反应。

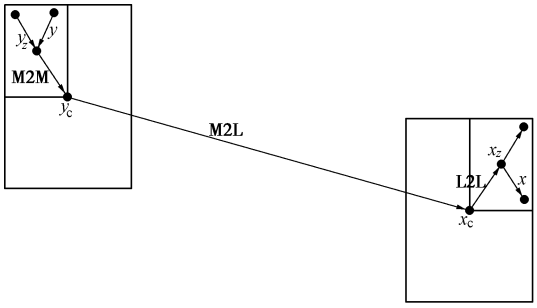


图 5 FMM-IBEM 展开相关点及传递

Fig. 5 Related points for FMM-IBEM and transfer

3 方法精度、效率及稳定性检验

如图 6 所示，以半圆形峡谷地形为例，计算 SV 波以不同角度（θ_β=0°，30°）入射下的地表位移响应，并同文献[13]计算结果进行对比。可以明显看出本文采用的 FMM-IBEM 数值解与常规边界元法计算结果吻合良好，从而验证了方法的准确性。计算参数取值：定义无量纲频率为$\eta=2r/\lambda_\mathrm{s}=2$，$r$ 为峡谷半径，λ_s 剪切波波长。基岩半空间剪切波速 c_β 为 800 m/s，密度ρ为 2000 kg/m^3，泊松比 ν 为 0.25；黏滞阻尼比ξ为 0.01，峡谷半径 r 为 500 m，地表边界离散单元数 L 为 300，凹陷边界离散单元 N 为 301。

在精度检验基础上，进而验证 FMM-IBIEM 的计算效率。模型计算参数同上（θ_β=0°），计算自由度从 1802 增大到 180002。图 7 为 FMM-IBEM 和 IBEM 的 CPU 计算时间随自由度变化关系曲线，可知采用普通 IBEM 计算时，CPU 计算时间随自由度急剧增加，近似呈二次曲线（O（N^2））变化，当 DOF$_\mathrm{s}$=12002 时计算时间达到 50713.58 s（约 14 h）；然而本文方法计

算时间近似以 $O(N\log_2 N)$量级增长，计算自由度达到 180002 时计算时间仅 2059.57 s（约 0.5 h）。因此，本文方法极大提高了传统 IBEM 方法对大规模问题的计算效率。

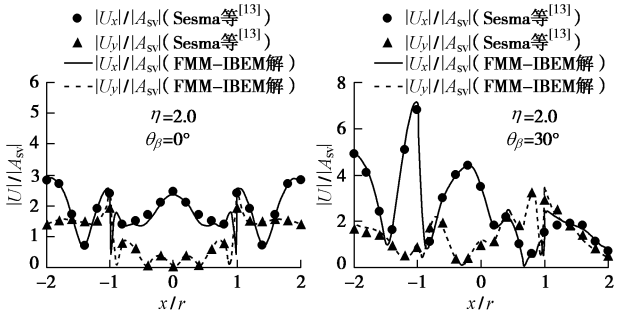


图 6 FMM-IBEM 解与 Sanchez-Sesma et al (1991)结果对比

Fig. 6 Comparison between results of FMM-IBEM method and those of Sanchez-Sesma et al (1991)

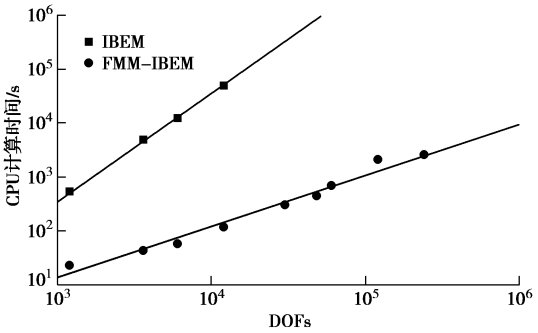


图 7 FMM-IBEM 与 IBEM 的 CPU 时间比较

Fig. 7 Comparison between the CPU time of FMM-IBEM and that of IBEM

图 8 为两种方法所需存储量随自由度变化关系曲线的对比，可知采用 IBEM 计算时，占用内存随自由度迅速增加，并呈二次曲线变化，当 DOFs=12002 时占用内存已达到 3.4 GB。若采用 FMM-IBEM 则能大大减少内存占用，当 DOF$_s$= 12002 时仅需 0.28 GB 左右，而当 DOF$_s$= 120002 时也仅需要 9.8 GB 左右。因此，相比常规 IBEM，FMM-IBEM 在计算时间还及存储量方面均有数量级的改善，为实际大尺度高频地震波散射问题快速求解奠定了基础。

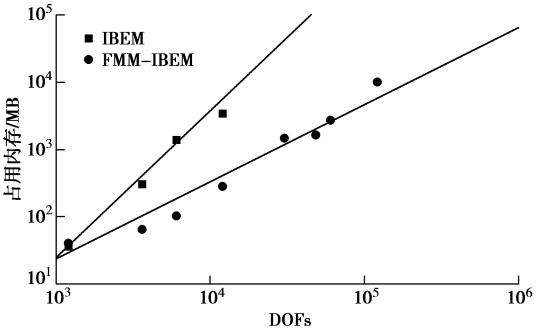


图 8 FMM-IBEM 与 IBEM 的存储量比较

Fig. 8 Comparison between memory of FMM-IBEM and that of IBEM

表 1 给出了随离散单元数增加，凹陷地形地表位移的收敛情况，计算参数取：$h/r=1.0$，$\xi=0.01$，$\eta=5.0$，$\nu=0.25$。凹陷地表边界离散单元数 N 分别取 461，521 和 581，水平地表边界离散单元数 L 相应取 420，460 和 520。从表 1 可以看出，即便对于 $\eta=5.0$ 高频波入射情况，随着离散单元数的增加，位移结果收敛非常好，相对误差保持在 10^{-3} 水平，反映了该方法具有很好的数值稳定性。

表 1 地表位移幅值数值稳定性检验 (η =5.0)

Table 1 Numerical stability tests on amplitudes of surface displacement (η=5.0)

x/a	$N=461, L=420$		$N=521, L=460$		$N=581, L=520$	
	$\lvert u_x\rvert$	$\lvert u_y\rvert$	$\lvert u_x\rvert$	$\lvert u_y\rvert$	$\lvert u_x\rvert$	$\lvert u_y\rvert$
−4.0	2.043	0.349	2.041	0.349	2.040	0.349
−3.6	1.961	0.561	1.950	0.560	1.952	0.561
−3.2	2.336	0.525	2.369	0.529	2.337	0.528
−2.8	2.183	0.764	2.153	0.765	2.186	0.770
−2.4	2.570	0.567	2.579	0.569	2.579	0.576
−2.0	2.054	0.754	2.056	0.757	2.063	0.765
−1.6	2.290	0.498	2.302	0.494	2.298	0.491
−1.2	0.475	0.798	0.460	0.792	0.468	0.798
−0.8	1.081	0.990	1.097	0.993	1.074	0.996
−0.4	1.958	0.617	1.956	0.617	1.954	0.616
0.0	2.069	0	2.064	0	2.060	0

需要指出的是，以上计算结果、CPU 计算时间及内存统计，均是在 128G 内存、64 位 Win7 操作系统的工作站（Intel（E5-2680）2.7 GHzCPU），基于 MatlabR2012a 进行编程运算得到，且为 GMRES 迭代收敛时所需计算时间及内存。

4 算例分析

采用上面发展的 FMM-IBEM 方法求解局部场地对平面 SV 波的高频散射。考虑入射角度与频率的变化，着重对比不同几何特征峡谷及凸起地形对平面 SV 波的散射响应。为更全面地反映局部场地对地震波散射的频谱特性，分别给出了 SV 波垂直入射下峡谷、凸起地表典型点位的位移幅值谱曲线。为研究高频散射规律，入射频率取为 0～25 Hz。地表观察点取 x/a=−4，−2，−1，−0.5 和 0。

4.1 峡谷地形对平面 SV 波的高频散射

计算模型如图 9 所示，峡谷半宽 r 为 500 m，深度 h 为 0.5r，记水平地表边界为 H，峡谷地表边界为 L，基岩半空间介质剪切波速 c_β =500 m/s，密度ρ=2000 kg/m^3，泊松比 ν =0.25；取无量纲频率 η =2r/λ_s，则 $f=\eta\, c_\beta/2r$，基于复阻尼理论 $G^*=G(1+2i\xi)$，取阻尼系数 ξ =0.01。地表离散宽度取为 4r（散射波的空间衰减使得影响范围有限），单元网格按每波长 10 个单元进行离散，并对峡谷角部进行适当细化。下文所有结果

均进行过收敛性分析。

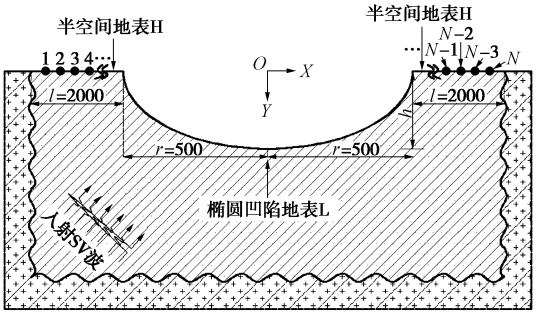
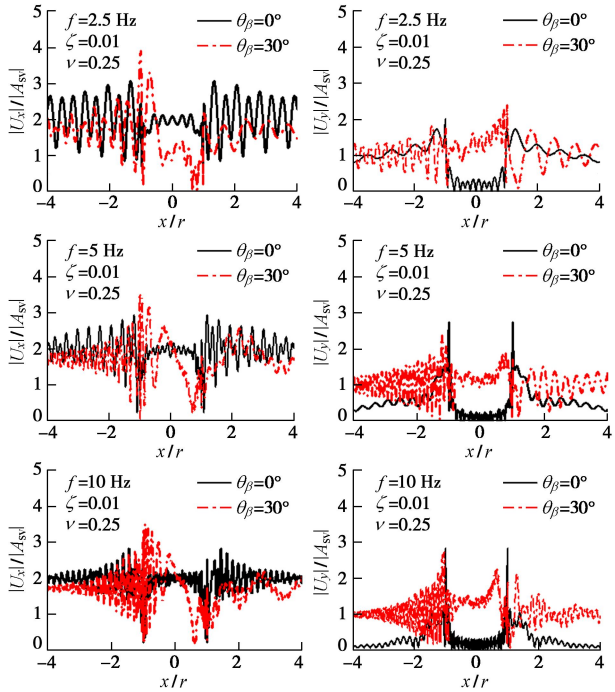


图 9 峡谷计算模型

Fig. 9 Computational model for vally

图 10 给出了 SV 波以不同角度入射下（θ_β=0°，30°）的峡谷地表位移幅值曲线，入射频率取 f=2.5，5.0，10.0，25 Hz，相应的无量纲频率 η=5.0，10.0，20.0，50.0。结果表明峡谷对地震波的散射显著依赖于入射波频率和角度。当 SV 波垂直入射时：随频率增大，地表位移空间变化更为剧烈，但凹陷面上位移幅值有逐渐降低趋势，如频率为 25 Hz 时位移反应接近自由场幅值，这在物理上是合理的。同样对于|x/r|>2 范围内凹陷外部地表，峡谷散射效应随频率增大也逐渐减弱，当频率达到 25 Hz 时位移幅值基本接近自由场位移幅值 2.0；对于峡谷角点附近半空间地表（1<|x/r|<2），位移幅值并未随频率的增大有明显的变化，最大值保持在 3.0 左右，约为自由场位移幅值的 1.5 倍。另外需关注的是，峡谷角点处竖向位移同样表现出显著的放大效应，如入射频率为 10 Hz 时竖向位移峰值约达到 3.0。建于峡谷中的桥梁结构抗震设计对此需要进行特殊考虑。



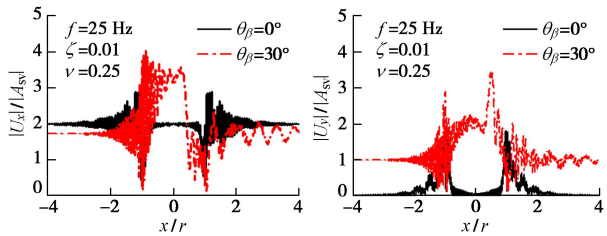


图 10 SV 波不同角度入射下峡谷地表水平和竖向位移幅值（f=2.5，5，10，25 Hz）

Fig. 10 Amplitudes of surface horizontal and vertical displacement around canyon for incident SV waves (f=2.5，5，10，25 Hz)

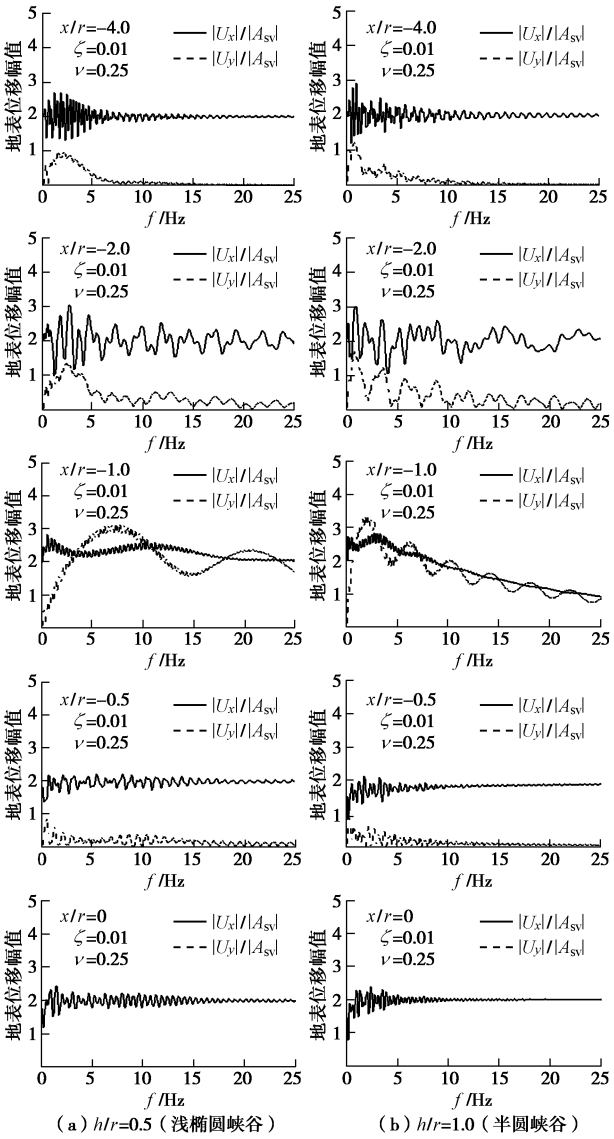
当高频 SV 波斜入射时：地震波在峡谷周围的散射及各种波型间的相干效应更为复杂，使得地表位移幅值空间分布更不均匀，一般在迎波面一侧，由于入射波、反射波和衍射波的聚焦效应，水平位移放大效应更为显著，空间振荡也更为剧烈。迎波面角点附近水平最大位移幅值为 4.09（f=25 Hz），约为自由场峰值的 2.2 倍；且迎波面位移幅值明显大于背波面，呈现一种类似“屏障”作用，这与文献[17]结论基本一致。

图 11 则给出了 SV 波垂直入射下不同深宽比（h/r=0.5，1）峡谷的地表典型点位位移幅值谱曲线。如图所示，观察点 x/r=−4 仅在 0<f<5 Hz 范围内表现出一定的位移放大效应，最大位移幅值为 2.7，当 f>5 Hz 时位移幅值逐渐趋近自由场。峡谷面上观察点（x/r=−0.5，0）位移幅值在整个宽频范围内放大效应较弱，峰值在 2.5 上下；峡谷角点（x/r=−1）在很宽的频带范围（0<f<10 Hz）位移放大效应均比较显著，水平位移峰值达到 2.8，竖向位移幅值在 5＜f＜10 Hz 范围内达到最大值 3.12，甚至超过了水平位移谱值（h/r=0.5 情况），这主要是由于峡谷角部发生的波型转换产生的面波所致。另外，通过对比不同深宽比情况位移幅值谱曲线，发现深宽比对峡谷外部水平地表位移幅值谱影响较小（如|x/r|=2.0 和 4.0），但对峡谷面上位移幅值谱有明显影响，如角点 x/r=−1 处在 h/r=0.5，1 时最大竖向位移幅值分别为 3.121，3.417，较深峡谷角部能量集中更为显著；同时两种深宽比情况位移谱峰值频率发生很大偏移，如最大竖向位移幅值对应频率分别为 7.33，2.16；由此可见，高频波垂直入射下，较深峡谷底部受衍射波的影响减弱，更接近于“镜面反射”。

4.2 凸起地形对平面 SV 波的高频散射

计算模型如图 12 所示，凸起半宽 r 为 500 m，取高度 h=0.5r，记水平地表边界为 H，凸起地表边界为 L，基岩半空间剪切波速 c_β 为 500 m/s，密度 ρ 为 2000 kg/m^3，泊松比 ν 为 0.25；取无量纲频率 η =2r/λ_s，则 f 为 η c_β /2r，基于复阻尼理论 $G^*=G(1+2\mathrm{i}\xi)$，取阻尼系数 ξ 为 0.01。地表离散宽度取为 4r，单元离散按每

波长 10 个单元进行划分，并对山体角部进行适当细化。



（a）h/r=0.5（浅椭圆峡谷）　（b）h/r=1.0（半圆峡谷）

图 11 SV 波垂直入射下峡谷附近位移幅值谱曲线

Fig. 11 Spectra of surface displacement amplitudes around canyon for incident SV waves

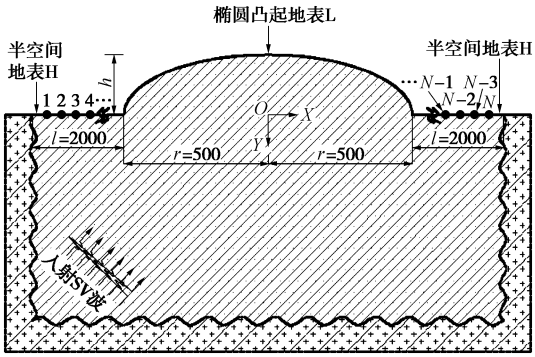


图 12 凸起地形地震响应计算模型

Fig. 12 Computational model for seismic response of hill topography

图 13 给出了不同角度 SV 波（θ_β=0°，30°）入射下凸起地表位移幅值曲线，入射频率取f=2.5，5.0，10.0，25(Hz)，相应的无量纲频率η=5.0，10.0，20.0，50.0。结果表明：SV 波垂直入射时，由于凸起地形存在使得地震波能主要聚集在凸起范围内，凸起顶部附近地表位移幅值放大显著，水平、竖向最大位移幅值分别达到 4.432，2.373。地表最大位移幅值空间分布强烈依赖于入射波频率，随着入射频率增大，位移空间分布和峰值位置发生很大变化。高频 SV 波斜入射时，迎波面一侧地表位移幅值要小于背波面一侧，如当 f=2.5，5，10，25 Hz 时，背波面凸起地表水平最大位移幅值分别为 3.520，3.411，3.079，2.437；同时背波面一侧水平地表位移反应受山体激发的散射波影响更为显著。

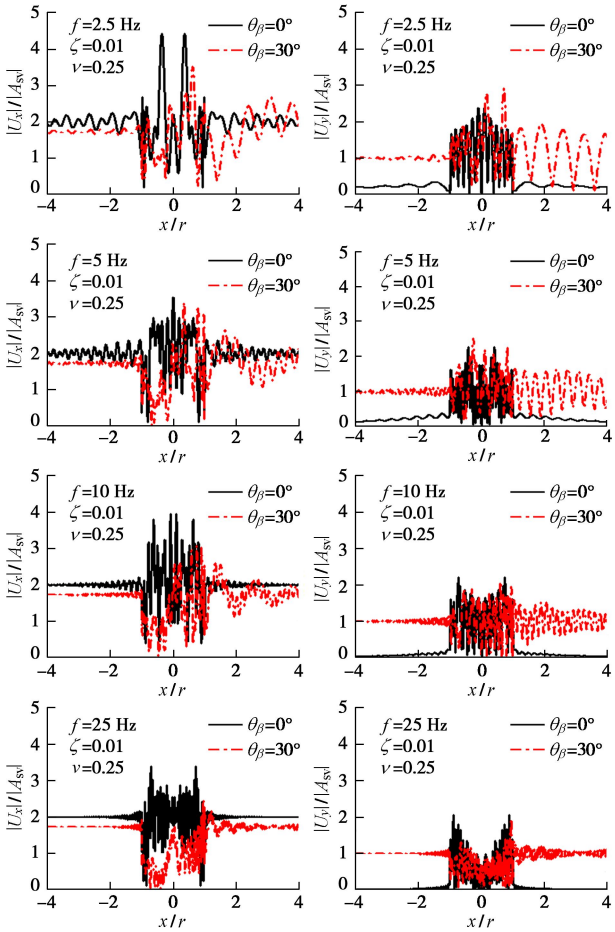
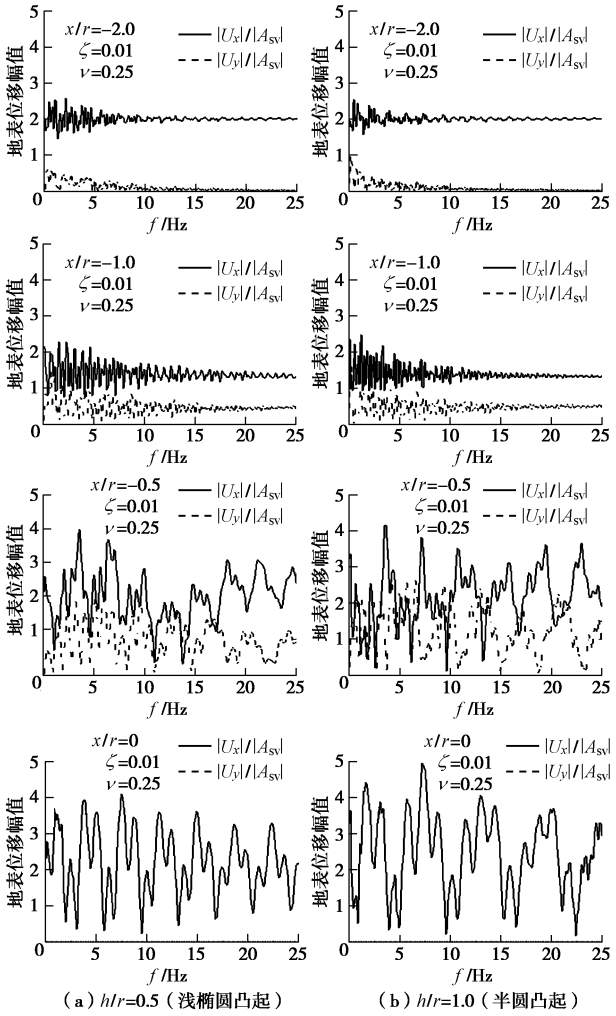


图 13 SV 波不同入射角度下入射凸起地表位移幅值（f= 2.5，5，10，25 Hz）

Fig. 13 Amplitudes of surface displacement around hill for incident SV waves (f=2.5，5，10，25 Hz)

图 14 进一步给出了 SV 波垂直入射下不同高宽比（h/r=0.5，1）凸起地表点位移幅值谱。可以看出，凸起顶部附近（x/r=−0.5，0）位移谱放大效应十分明显且出现多个峰值频率（部分频率对应山体的自振频

率）；山脚处（x/r=−1）在整个宽频范围内位移放大不明显，大多频率情况位移幅值要小于半空间自由场位移—该规律同实际地震中山脚震害较轻而山顶震害严重现象一致。对于山体外部半空间地表观察点 x/r=−2，在 $0<f<5$ Hz 频段内最大位移幅值约为 2.7，而在 $5<f<25$ Hz 频段内曲线较为平缓且位移幅值基本接近自由场位移。另外，通过对比不同深宽比凸起地表位移谱曲线，可以发现较高山体山顶附近位移放大效应更为显著，如观察点 x/r=0 在 h/r=0.5，1 时最大水平位移幅值分别为 4.099，4.940，这是由于地震波能量在较高陡山体中更容易汇聚；而通过对比半空间地表观察点（x/r=−2）在 h/r=0.5，1 情况下的谱曲线，发现山体外部位移谱受山体高度影响不显著。



（a）h/r=0.5（浅椭圆凸起） （b）h/r=1.0（半圆凸起）

图 14 SV 波垂直入射下凸起地表点位位移谱曲线

Fig. 14 Spectra of surface displacement amplitudes on hill for incident SV waves

5 结 论

本文结合快速多极子展开技术和间接边界元法，发展了一种快速多极子间接边界元法（FMM-IBEM），实现了局部场地对地震波二维散射宽频高效求解。进而研究了不同频率、角度 SV 波入射下，峡谷、凸起地形对地震波的宽频散射特征。算例分析表明：

（1）FMM-IBEM 能够高效精确地求解弹性半空间局部场地对地震波宽频散射问题，同时能够大幅度降低存储需求，计算量和存储量约为 O（N）量级。因此可在目前主流 PC 上实现百万自由度散射问题分析。

（2）峡谷、凸起地形的存在使得高频地震波能量发生局部聚焦效应，在峡谷角点或凸起顶部附近波的相干效应强烈，从而造成地震动的局部放大。

（3）高频平面 SV 波入射峡谷地形：垂直入射时，峡谷角部附近位移放大最为显著，在很宽的频带范围内水平和竖向位移幅值均达到 3.0 上下；峡谷底部则散射效应较弱，接近“镜面反射”；斜入射下，迎波面一侧水平位移反应明显大于背波面。深宽比对峡谷面上位移谱的幅值和峰值频率具有显著影响，但对峡谷外部水平地表反应影响不明显。

（4）凸起地形对地震波的散射效应相比凹陷更为强烈。半圆凸起顶部附近水平位移幅值接近 5.0，且出现多个“共振”频率点。高频波情况下，山脚附近位移反应反而受到抑制，幅值在 1.33 附近小幅振荡。高频 SV 波斜入射时，凸起背波面一侧地表位移明显大于迎波面。

本文主要阐述 FMM-IBEM 方法求解地震波散射（二维平面内）的基本思路和推导步骤，并结合简单模型进行方法验证和展示，对于实际大尺度复杂场地的宽频地震动模拟还有进一步拓展研究。

参考文献：

[1] GAO Y, ZHANG N, LI D, et al. Effects of topographic amplification induced by a u-shaped canyon on seismic waves[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2012, **102**(4): 1748 – 1763.

[2] LEE V W, AMORN W A. Scattering of anti-plane (SH) waves by a semi-elliptical hill: I shallow hill[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2013, **52**: 116 – 125.

[3] YUAN X. A whole-space transform formula of cylindrical wave functions for scattering problems[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2014, **13**(1): 23 – 28.

[4] 梁建文, 张郁山, 顾晓鲁, 等. 圆弧形层状沉积河谷场地在平面 SH 波入射下动力响应分析[J]. 岩土工程学报, 2000, **22**(4): 396 – 401. (LIANG Jian-wen, ZHANG Yu-shan, GU Xiao-lu, et al. Surface motion of circular-arc layered alluvial valleys for incident plane SH waves[J]. Chinese Journal of

Geotechnical Engineering, 2000, **22**(4): 396 – 401. (in Chinese))

[5] CHEN G, JIN D, ZHU J, et al. Nonlinear analysis on seismic site response of Fuzhou Basin, China[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2015, **105**(2A): 928 – 949.

[6] GRAVES R W. Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1996, **86**(4): 1091 – 1106.

[7] MANOLIS G D. Elastic wave scattering around cavities in inhomogeneous continua by the BEM[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, **266**(2): 281 – 305.

[8] 巴振宁, 梁建文, 梅雄一. 层状饱和半空间中沉积谷地对斜入射平面 P1 波的三维散射[J]. 工程力学, 2013, **30**(9): 47 – 55. (BA Zhen-ning, LIANG Jian-wen, MEI Xiong-yi. 3D scattering by an alluvial valley embedded in a fluid-saturated, layered half-space for obliquely incident plane p1 waves[J]. Engineering Mechanics, 2013, **30**(9): 47 – 55. (in Chinese))

[9] 刘中宪, 梁建文, 赵瑞斌. 流体饱和层状半空间中沉积谷地对地震波的散射—IBIEM 求解[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(3): 512 – 522. LIU Zhong-xian, LIANG Jian-wen, ZHAO Rui-bin. Indirect boundary integral equation method for solving scattering of seismic waves by an alluvial valley in fluid poroelastic layered half-space[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(3): 512 – 522.

[10] FUJIWARA H. The fast multipole method for solving integral equations of three-dimensional topography and basin problems[J]. Geophys J Int, 2000, **140**: 198 – 210.

[11] GRASSO E, CHAILLAT S, BONNET M. Application of the multi-level time-harmonic fast multipole BEM to 3-D visco-elastodynamics[J]. Eng Anal Bound Elem, 2012, **36**: 744 – 758.

[12] 刘中宪, 唐河仓, 王　冬. 弹性波二维散射快速多极子间接边界元法求解[J]. 工程力学, 2015(5): 6 – 12. (LIU Zhong-xian, TANG He-cang, WANG Dong. FMM-IBEM solution to two-dimensional scattering of elastic waves[J]. Engineering Mechanics, 2015(5): 6 – 12. (in Chinese))

[13] SÁNCHEZ-SESMA F J, CAMPILLO M. Diffraction of P, SV, and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1991, **81**(6): 2234 – 2253.

[14] UTSUNOMIYA T, WATANABE E, NISHIMURA N. Fast multipole algorithm for wave diffraction/radiation problems and its application to VLFS in variable water depth and topography[C]// Proc 20th Int OMAE Conf, 2001.

[15] SAKUMA T, YASUDA Y. Fast multipole boundary element method for large-scale steady-state sound field analysis: part I setup and validation[J]. Acta Acustica, 2002, **88**(4): 513 – 525.

[16] 王海涛. 快速多级边界元法在二维弹性力学中的应用[D]. 北京: 清华大学, 2002. (WANG Hai-tao. Application of fast multipole boundary element method for two dimensional elasticity[D]. Beijing: Tsinghua University, 2002. (in Chinese))

[17] 钟　慧, 张郁山. 圆弧状凹陷地形对平面 SV 波散射问题的宽频带解析解[J]. 中国地震, 2010(2): 142 – 155. (ZHONG Hui, ZHANG Yu-shan. Broad-frequency-band analytical solution to scattering of plane SV wave by arc-shaped canyon topography[J]. Earthquake Research in China, 2010(2): 142 – 155. (in Chinese))