

DOI: 10.11779/CJGE201710010

任意荷载下分数阶导数黏弹性饱和土体一维固结

汪 磊^{1, 2}, 孙德安^{*1}, 解 益³, 李培超³

(1. 上海大学土木工程系, 上海 200444; 2. 上海工程技术大学城市轨道交通学院, 上海 201620; 3. 上海工程技术大学机械工程学院, 上海 201620)

摘要: 将分数阶导数理论引入 Kelvin–Voigt 模型, 来描述黏弹性饱和土体的力学行为。对饱和土体一维固结方程和分数阶导数 Kelvin–Voigt 本构方程实施 Laplace 变换, 联立求解得到变换域内有效应力和沉降的解析解。采用 Crump 方法实现 Laplace 数值反演, 获得了任意荷载情况下物理空间内一维固结问题的半解析解。并将指数荷载情况下分数阶导数模型退化到黏弹性情形, 结果与已有文献解析解相同, 验证了本研究提出任意荷载情况下分数阶导数黏弹性解的可靠性。最后, 分析了相关参数对固结沉降的影响。研究表明, 任意荷载情形下分数阶导数黏弹性饱和土体一维固结发展过程与黏滞系数和分数阶次有关, 分数阶次越大, 固结沉降发展越快; 黏滞系数越大, 固结沉降变化越慢; 荷载变化趋势与由荷载参数变化引起的沉降变化规律是一致的, 且最终沉降量一致。本研究有助于深入认识分数阶黏弹性饱和土体的固结行为。

关键词: 任意荷载; 分数阶导数; 黏弹性; 饱和土体; 一维固结

中图分类号: TU447 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2017)10-1823-09

作者简介: 汪 磊(1985-), 男, 讲师, 主要从事土的固结研究。E-mail: wanglei@sjtu.edu.cn。

One-dimensional consolidation of fractional order derivative viscoelastic saturated soils under arbitrary loading

WANG Lei^{1, 2}, SUN De-an¹, XIE Yi³, LI Pei-chao³

(1. Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200444, China; 2. School of Urban Railway Transportation, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China; 3. School of Mechanical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

Abstract: The theory of fractional calculus is introduced into the Kelvin–Voigt constitutive model to describe the mechanical behavior of viscoelastic saturated soils. Applying the Laplace transform upon one-dimensional consolidation equation of saturated soils and the fractional order derivative Kelvin–Voigt constitutive equation, the analytical solutions of the effective stress and the settlement are derived in the Laplace domain. Then the semi-analytical solutions to one-dimensional consolidation problem under arbitrary loadings in physical space are obtained after implementing the Laplace numerical inverse transform using the Crump’s method. As the case of viscoelasticity, the simplified semi-analytical solutions under exponential loading in this study are the same as the available analytical solutions in literatures. It is indicated that the proposed solutions under arbitrary loading are reliable. Finally, parametric studies are conducted to analyze the effects of the related parameters on the consolidation settlement. The results show that the process of one-dimensional consolidation of viscoelastic saturated soils with fractional order derivative is related to viscosity coefficient and fractional order. The larger the fractional order is, the more quickly the consolidation settlement occurs; and the higher the viscosity coefficient is, the slower the consolidation settlement takes place. The trend of loadings is consistent with the variation pattern of soil settlement caused by the change of the load parameters, and the final settlement is identical. The present study can be of help to further understand the consolidation behavior of viscoelastic saturated soils.

Key words: arbitrary loading; fractional order derivative; viscoelasticity; saturated soil; one-dimensional consolidation

0 引言

Terzaghi 的一维固结理论采用线性应力–应变关系, 未考虑黏土的流变性, 因而在实际工程中有时并不能准确地描述实际固结过程^[1]。考虑黏土的蠕变特

性, 将其视为黏弹性介质通常更符合工程实际^[2]。陈

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11672172)

收稿日期: 2016-06-20

*通讯作者 (E-mail: sundean@sjtu.edu.cn)

宗基^[3]在20世纪50年代就对受侧限的黏弹性土层的固结和滯流进行了分析,而后赵维炳^[4]基于可广泛用于各种黏弹性土体的广义Voigt模型,推导出了饱和土体一维固结问题的普遍理论解。而蔡袁强等^[5]在任意荷载下成层黏弹性土体以及半透水边界的黏弹性土体在循环荷载下一维固结方面的研究也取得重要成果。Xie等^[6]研究了荷载随时间变化下4种流变模型黏土的一维固结特性。此后李皓玉等^[7]对移动分布荷载下层状黏弹性体系的动力响应进行了分析。

Gement 在 1936 年首先提出了黏弹性材料的分数阶导数本构模型^[8],而后分数阶导数模型逐渐成为研究热点。Taylor 等^[9]首先在固结理论中用 Kelvin 模型来描述土骨架的变形。国内 Tan^[10]引入 Maxwell 模型,建立了黏弹性固结理论。此后,李西斌等^[11]分析了变荷载下软土一维流变固结解析理论,何利军等^[12]介绍了采用分数阶导数描述软黏土蠕变的模型,尹检务等^[13]对压实土固结蠕变特征及分数阶流变模型参数进行了分析,陈亮等^[14]基于分数阶微积分理论研究了非线性黏弹性蠕变模型,孙海忠等^[15]采用分数微积分模型来研究了软土蠕变。Yin 等^[16]研究了分数阶软土蠕变过程中的力学性能,殷德顺等^[17]在流变本构模型的探讨中运用了分数阶导数理论,王智超等^[18]在分数阶导数流变本构模型研究方面也做出了贡献。

为了深入探讨黏弹性饱和土体固结机制,本文针对单层分数阶导数 Kelvin–Voigt 模型黏弹性饱和土体,推导了任意荷载下分数阶导数黏弹性饱和土体固结方程的半解析解,并对影响参数进行了分析,以更好地认识和描述分数阶黏弹性饱和土体的固结行为。另外,关于黏弹性饱和土体固结的研究多数是基于整数阶的情况,而分数阶导数黏弹性饱和土体的固结问题很少见诸于文献,因此,研究分数阶导数黏弹性饱和土体的固结问题不仅具有重要的理论意义,而且具有重要的工程实用价值。

1 分数阶微积分理论简介

1.1 分数阶微积分基本定义

在流变本构模型中运用最为普遍的是 R–L 型分数阶微积分算子理论^[19],在 Lebesgue 可积区间 $L_1(0, t)$ 上,分数 q 阶 ($\text{Re } q > 0$) 积分算子的定义为

$$\frac{d^{-q} f(t)}{dt^{-q}} = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(\tau) d\tau,$$

相应的 ν 阶 ($-1 < \text{Re } \nu - n \leq 0$) 微分算子定义为

$$\frac{d^\nu f(t)}{dt^\nu} = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-\nu-1}}{\Gamma(n-\nu)} f(\tau) d\tau \right\}. \quad (1)$$

1.2 基于分数阶导数的流变元件

关于分数阶导数关系的元件,有多种新的提法,本文介绍其中一种,Abel 黏壶,其本构关系为

$$\sigma(t) = \eta \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} \quad (0 \leq \alpha \leq 1),$$

其中, η 为黏滞系数, α 为分数阶次,都是不随时间变化的材料参数。当 $\alpha=1$ 时表现为理想牛顿流体;当 $\alpha=0$ 时表现为线弹性固体;当 $0 < \alpha < 1$ 时元件表现为分数阶黏弹性体。从分数维^[20]角度来看, α 描述了材料的多种流动状态性质,使其具有了一定的物理意义。在具体工程计算中,可根据实际土样固结沉降实验数据,采取拟合方法(如文献[13])得到 α 的取值。

2 固结方程及其求解

图 1 为拟求解的黏弹性饱和土体一维固结模型示意图。其中 $2H$, k_v , C_v , E_s , η , $q(t)$ 分别为土层厚度、渗透系数、固结系数、压缩模量、黏滞系数和外荷载。

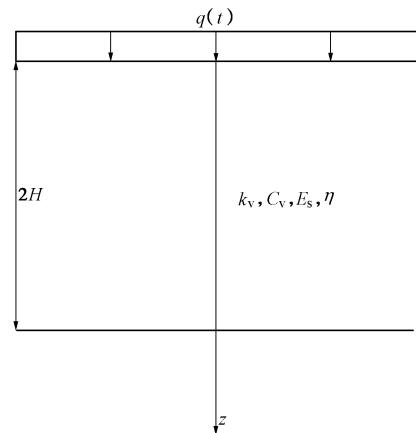


图 1 黏弹性饱和土体一维固结模型示意图

Fig. 1 Sketch of one-dimensional consolidation of viscoelastic saturated soils

除施加荷载条件外,采用与 Terzaghi 理论中相同的假设,则土体的固结渗流方程为

$$\frac{\partial \varepsilon(z, t)}{\partial t} = \frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \sigma'(z, t)}{\partial z^2}, \quad (2)$$

其中, $\sigma'(z, t)$ 是 z 处 t 时刻相对于初始有效应力的增量, $\varepsilon(z, t)$ 为相应应变, γ_w 为水的重度。对式(2)进行拉普拉斯变换得

$$\frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{\sigma}'(z, s)}{\partial z^2} = s \bar{\varepsilon}(z, s) - \varepsilon(z, 0), \quad (3)$$

其中, $\bar{\sigma}'(z, s)$ 为 $\sigma'(z, t)$ 的拉普拉斯变换式, $\bar{\varepsilon}(z, s)$ 为 $\varepsilon(z, t)$ 的拉普拉斯变换式。

分数阶导数 Kelvin–Voigt 本构模型如下图 2 所示,

为一个弹簧元件 H 与 Abel 黏壶 N 并联而成, 两元件应变相同, 但应力不同。

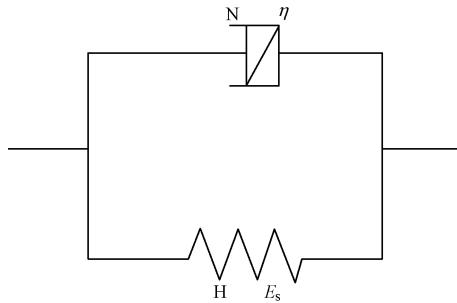


图 2 分数阶 Kelvin–Voigt 本构模型

Fig. 2 Fractional Kelvin–Voigt constitutive model

根据并联时模型中各个元件应变相同原则, 模型总应力等于两个元件应力之和, 其应力应变关系为

对于 H 体有

$$\sigma_e = E_s \varepsilon_e.$$

对于 N 体有

$$\sigma_v = \eta \frac{d^\alpha \varepsilon_v}{dt^\alpha}.$$

且有, $\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v$, $\sigma = \sigma_e + \sigma_v$ 。

其中 ε_e 和 ε_v 分别为弹簧元件 H 与 Abel 黏壶 N 的应变, σ_e 和 σ_v 分别为两者的应力, σ 为分数阶导数 Kelvin–Voigt 模型的总应力, α 为分数阶次。

分数阶导数 Kelvin–Voigt 模型的本构关系为

$$\sigma'(z, t) = E_s \varepsilon(z, t) + \eta \frac{d^\alpha \varepsilon(z, t)}{dt^\alpha}, \quad (4)$$

对式 (4) 进行拉普拉斯变换得

$$\bar{\sigma}'(z, s) = E_s \bar{\varepsilon}(z, s) + \eta s^\alpha \bar{\varepsilon}(z, s), \quad (5)$$

将式 (5) 代入式 (3) 得

$$\frac{\partial^2 \bar{\sigma}'(z, s)}{\partial z^2} - \frac{\gamma_w}{k_v} \frac{s}{(E_s + \eta s^\alpha)} \bar{\sigma}'(z, s) = 0, \quad (6)$$

求解式 (6) 得

$$\bar{\sigma}'(z, s) = C_1 e^{\sqrt{m}z} + C_2 e^{-\sqrt{m}z}, \quad (7)$$

其中 $m = s\gamma_w / [k_v(E_s + \eta s^\alpha)]$, C_1 和 C_2 为含有 s 的任意函数, 并可以通过代入边界求得。

对于双面排水情况, 初始条件和边界条件为

$$\sigma'(z, 0) = 0, \quad (8)$$

$$\sigma'(z, t) = q(t) \quad (z = 0), \quad (9)$$

$$\sigma'(z, t) = q(t) \quad (z = 2H), \quad (10)$$

其中, $q(t)$ 为任意荷载, 将式 (9) 和式 (10) 经拉普拉斯变换得

$$\bar{\sigma}'(0, s) = Q(s),$$

$$\bar{\sigma}'(2H, s) = Q(s),$$

其中, $Q(s)$ 为 $q(t)$ 的拉氏变换式。将式 (9) 和式 (10) 经拉氏变换后的表达式代入求出 C_1 和 C_2

$$C_1 = \frac{Q(s)(e^{-2H\sqrt{m}} - 1)}{e^{-2H\sqrt{m}} - e^{2H\sqrt{m}}},$$

$$C_2 = \frac{Q(s)(1 - e^{2H\sqrt{m}})}{e^{-2H\sqrt{m}} - e^{2H\sqrt{m}}},$$

将 C_1 和 C_2 代入式 (7) 得

$$\bar{\sigma}'(z, s) = \frac{Q(s)(\sinh[z\sqrt{m}] - \sinh[(z - 2H)\sqrt{m}])}{\sinh[2H\sqrt{m}]}.$$

将 m 代入上式得

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'(z, s) = & \frac{Q(s)}{\sinh\left[2H\sqrt{\frac{s\gamma_w}{k_v(E_s + \eta s^\alpha)}}\right]} \cdot \\ & \left\{ \sinh\left[z\sqrt{\frac{s\gamma_w}{k_v(E_s + \eta s^\alpha)}}\right] - \sinh\left[(z - 2H)\sqrt{\frac{s\gamma_w}{k_v(E_s + \eta s^\alpha)}}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

令 $\eta = 0$, 则式 (11) 退化为

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'(z, s) = & \frac{Q(s)}{\sinh\left(2H\sqrt{\frac{s\gamma_w}{k_v E_s}}\right)} \left\{ \sinh\left(z\sqrt{\frac{s\gamma_w}{k_v E_s}}\right) - \right. \\ & \left. \sinh(z - 2H)\sqrt{\frac{s\gamma_w}{k_v E_s}} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

在式 (11) 中令 $\alpha = 1$, 即将分数阶导数黏弹性饱和土体有效应力退化到黏弹性的情况, 则

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'(z, s) = & \frac{Q(s)}{\sinh\left[2H\sqrt{\frac{s\gamma_w}{k_v(E_s + \eta s)}}\right]} \left\{ \sinh\left[z\sqrt{\frac{s\gamma_w}{k_v(E_s + \eta s)}}\right] - \right. \\ & \left. \sinh\left[(z - 2H)\sqrt{\frac{s\gamma_w}{k_v(E_s + \eta s)}}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

将蔡袁强等^[5]一文中得到的各层有效应力拉普拉斯变换解退化到单层的情况, 则与式 (13) 完全一致。

本文探讨任意荷载下分数阶导数黏弹性饱和土体一维固结问题, 其固结沉降量

$$w(t) = \int_0^{2H} \varepsilon(z, t) dz. \quad (14)$$

经过拉普拉斯变换得

$$\bar{w}(s) = \int_0^{2H} \bar{\varepsilon}(z, s) dz. \quad (15)$$

将式 (5) 代入式 (15) 得

$$\bar{w}(s) = \int_0^{2H} \frac{\bar{\sigma}'(z, s)}{E_s + \eta s^\alpha} dz, \quad (16)$$

再将式 (11) 代入式 (16) 并积分得

$$\bar{w}(s) = \frac{2Q(s) \tanh \left[H \sqrt{\frac{s\gamma_w}{k_v(E_s + \eta s^\alpha)}} \right]}{(E_s + \eta s^\alpha) \sqrt{\frac{s\gamma_w}{k_v(E_s + \eta s^\alpha)}}}, \quad (17)$$

在此需要说明的是：对于其他边界透水的情形，只需改变边界条件，可用相同方法推导出相应结果。

3 算例验证及参数分析

关于拉普拉斯变换的数值反演，何光渝等^[21]分析了 Stehfest 和 Crump 分别提出的两种方法，认为后者较前者更精确、可靠，并且能够克服解的曲线有陡峭变化时，数值会发生振荡和弥散的缺陷。本文采用拉普拉斯变换的数值反演 Crump 方法，分别得出有效应力和沉降在拉氏变换后的反演表达式为

$$\sigma'(z, t) = \frac{e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} \bar{\sigma}'(z, a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re} \left[\bar{\sigma}' \left(z, a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right] \cos \frac{k\pi t}{T} - \operatorname{Im} \left[\bar{\sigma}' \left(z, a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right] \sin \frac{k\pi t}{T} \right\} \right], \quad (18)$$

$$w(t) = \frac{e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} \bar{w}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re} \left[\bar{w} \left(a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right] \cos \frac{k\pi t}{T} - \operatorname{Im} \left[\bar{w} \left(a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right] \sin \frac{k\pi t}{T} \right\} \right], \quad (19)$$

并编制相应计算程序，具体操作及参数选取的说明见附录。

3.1 算例验证

本算例将指数荷载情形下分数阶导数 Kelvin–Voigt 模型黏弹性饱和土体一维固结沉降的表达式退化到黏弹性饱和土体的情况，并将结果与蔡袁强等^[5]一文做比较，参考其中部分参数， $H=9.5$ m， $\gamma_w=10$ kN/m³， $k_v=1 \times 10^{-7}$ m/s， $E_s=12$ MPa， $\eta=230$ MPa·d，指数荷载形式为 $q(t)=A-Be^{-Ct}$ ，其中 $A=0.1$ MPa， $B=0.1$ MPa， $C=4.32/d$ 。指数荷载情形下分数阶导数 Kelvin–Voigt 模型黏弹性饱和土体退化到标准黏弹性饱和土体的情况，计算结果如图 3 所示。

由图 3 可知，将文献[5]中多层任意荷载情形下黏弹性地基一维固结解析解退化为单层指数荷载情形下的固结沉降计算结果，与本文退化为黏弹性饱和土体一维固结沉降相一致，由此验证了本文提出的任意荷载情况下分数阶导数黏弹性饱和土体一维固结半解析解及计算程序的可靠性。

3.2 参数分析

为考察本文推导出的固结沉降半解析解的理论正确性，并分析参数对任意荷载下分数阶导数黏弹性饱和土体固结的影响，下面以指数荷载、周期荷载、施

工荷载为例进行讨论。

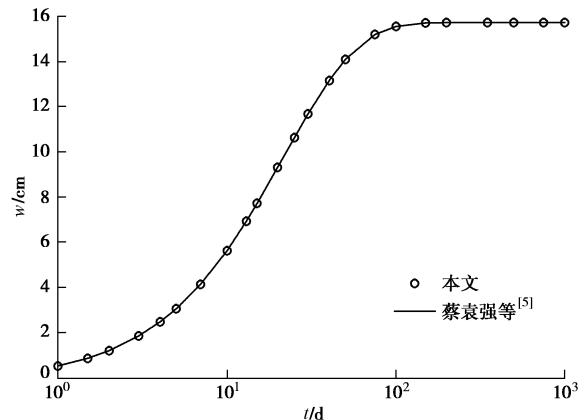


图 3 沉降曲线的验证

Fig. 3 Verification of settlement curves

(1) 指数荷载

指数荷载形式为 $q(t)=A-Be^{-Ct}$ ，分数阶次 α 取 0.5，其余参数与上述算例相同。

a) 黏滞系数 η

考察在指数荷载情形下黏滞系数 η 对固结沉降 W 的影响，结果如图 4 所示。

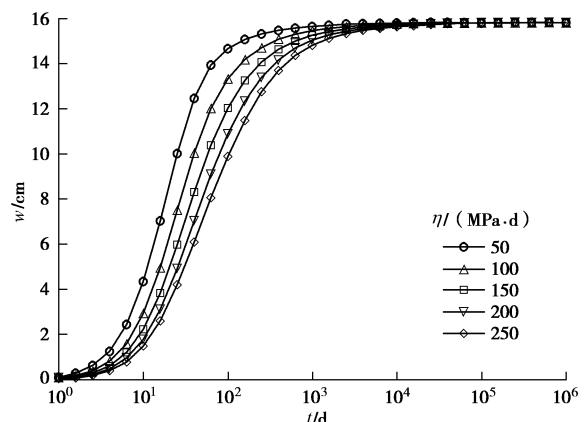


图 4 不同黏滞系数 η 下的沉降曲线

Fig. 4 Settlement curves under different viscosity coefficients

图 4 的 5 条曲线依次由左到右分别为其黏滞系数 $\eta=50, 100, 150, 200$ 和 250 MPa·d 时的沉降曲线。当其他参数不变，指数荷载作用下的分数阶导数 Kelvin–Voigt 模型黏弹性饱和土体一维固结沉降曲线随着黏滞系数 η 的增大而变得平缓，即地基中孔隙水压力的整体消散速率变慢，固结沉降速率越慢，但是最终沉降量大小是一致。黏滞系数的值反映结合水膜厚度的大小，固结压力越大，结合水膜厚度越小，结合水连结强度就越高，土颗粒克服阻力产生滑动越困难，结合水的黏滞性越强^[22]，黏滞系数就越大，导致达到最终沉降所需时间就越长。

b) 分数阶次 α

考察在指数荷载情形下分数阶次 α 对固结沉降

的影响, 结果如图 5 所示。

图 5 中的 4 条曲线由右到左依次为不同阶次 $\alpha=0.3, 0.5, 0.7$ 和 0.9 时的沉降曲线。当其他参数不变时, 指数荷载下分数阶导数 Kelvin–Voigt 模型黏弹性饱和土体一维固结过程随着不同分数阶次 α 的增大, 固结沉降发展速率变快, 其到达最终沉降所需时间变短。另外, 由 Yin 等^[16]针对软土蠕变过程提出的分数阶导数 Abel 黏壶可知, 分数阶次 α 与孔隙水压力消散率的关系, 随着不同阶次 α 的增大, 孔隙水压力消散的更快, 到达最终沉降所需时间更短。

c) 压缩模量 E_s

考察在指数荷载情形下压缩模量 E_s 对固结沉降的影响, 结果如图 6 所示。

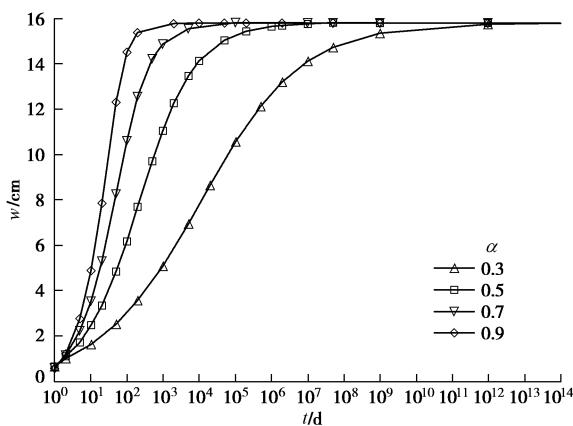


图 5 不同阶次 α 下的沉降曲线

Fig. 5 Settlement curves under different orders

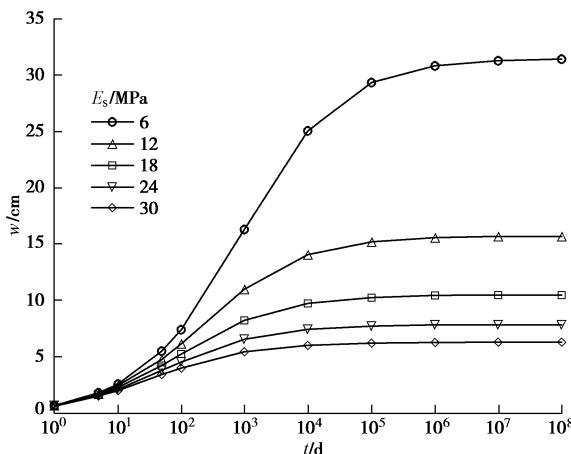


图 6 不同压缩模量 E_s 下的沉降曲线

Fig. 6 Settlement curves under different compression moduli

图 6 中的 5 条曲线由上到下依次为 $E_s=6, 12, 18, 24$ 和 30 MPa 时的沉降曲线。由于压缩模量是判断土的压缩性和计算压缩变形量的重要指标之一, 故压缩模量 E_s 会直接影响固结沉降量的大小。即其他参数不变时, 指数荷载下分数阶导数 Kelvin–Voigt 模型黏弹性饱和土体一维固结沉降 w 随着压缩模量 E_s 的增大,

土体越难被压缩, 最终沉降量也相应越小。

d) 指数荷载参数 C

考察在指数荷载情形下指数荷载参数 C 对固结沉降的影响, 结果如图 7 所示。

图 7 中的 4 条曲线由左到右依次为 $C=1.05 \times 10^{-1}, 1.05 \times 10^{-3}, 1.05 \times 10^{-5}$ 和 1.05×10^{-7} d⁻¹ 时的沉降曲线。由于指数荷载参数 C 是表征指数荷载第二项结果为零所需时间快慢的重要指标, 故指数荷载参数 C 的大小会直接影响达到最终沉降所需时间的长短。指数荷载下分数阶导数 Kelvin–Voigt 模型黏弹性饱和土体一维固结过程随着指数荷载参数 C 的增大, 固结沉降发展速率变快, 达到最终沉降量所需时间变短。

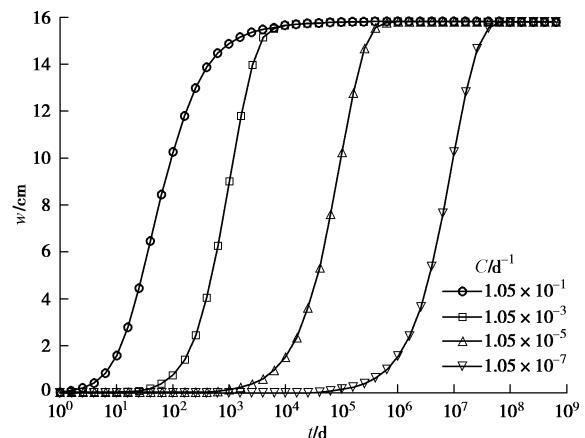


图 7 不同指数荷载参数 C 下的沉降曲线

Fig. 7 Settlement curves under different exponential loading parameters

(2) 周期荷载

周期荷载形式为 $q(t) = q_0(1 + \sin \omega t)$, 其中 $q_0 = 0.1$ MPa, $\omega = 2\pi/T$, T 为周期, 分数阶次 α 取 0.5, 其余参数与上述算例相同。

a) 黏滞系数 η

考察在周期荷载情形下黏滞系数 η 对固结沉降的影响, 结果如图 8 所示。

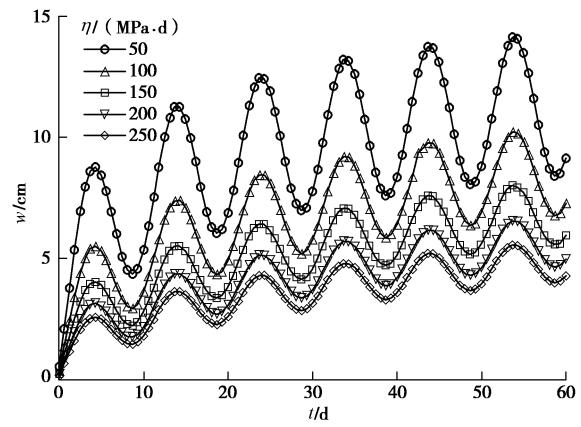


图 8 不同黏滞系数 η 下的沉降曲线

Fig. 8 Settlement curves under different viscosity coefficients

图8中的5条曲线由上到下依次为黏滞系数 $\eta=50, 100, 150, 200$ 和 $250 \text{ MPa}\cdot\text{d}$ 时的沉降曲线。当其他参数不变时,周期荷载下分数阶导数Kelvin–Voigt模型黏弹性饱和土体一维固结过程随着黏滞系数 η 的增大,固结沉降变化速率变慢,沉降变化波动性变小,且呈周期性变化,与文献[5]有相似理论变化结果。

b) 分数阶次 α

考察在周期荷载情形下分数阶次 α 对固结沉降的影响,结果如图9所示。

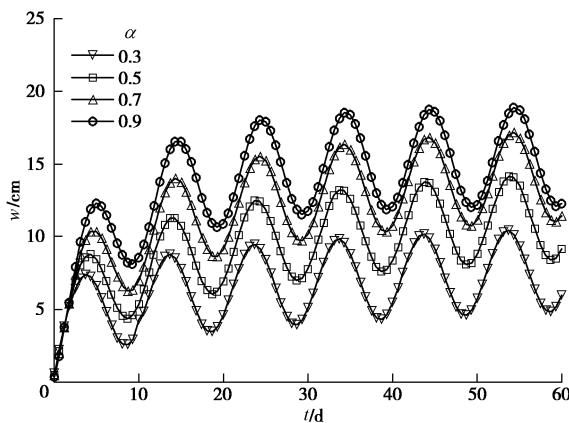


图9 不同阶次 α 下的沉降曲线

Fig. 9 Settlement curves under different orders

图9中4条曲线由下到上依次为不同阶次 $\alpha=0.3, 0.5, 0.7$ 和 0.9 时的沉降曲线。当其他参数不变时,周期荷载下分数阶导数Kelvin–Voigt模型黏弹性饱和土体一维固结过程随着不同分数阶次 α 的增大,固结沉降发展速率变快,且周期性更加明显。另外,理论沉降波动值变化明显,呈振荡增长,其到达最终沉降所需时间越短,反之其到达最终沉降相对滞后。

c) 周期 T

分数阶次 α 取 0.5 ,其余参数与上述算例相同,考察周期 T 对与固结沉降的影响,结果如图10所示。

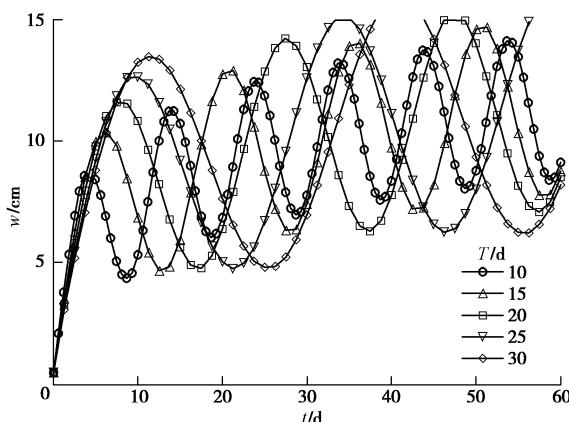


图10 不同周期 T 下的沉降曲线

Fig. 10 Settlement curves under different periods

图10中的5条曲线分别为周期 $T=10, 15, 20, 25$ 和 30 d 时的沉降曲线。其他参数不变时,周期荷载下分数阶导数Kelvin–Voigt模型黏弹性饱和土体一维固结沉降 w 随着周期 T 的增大,固结沉降发展变化越明显,波动性越大,达到最终沉降量与周期长短相关性十分明显。

(3) 施工荷载

施工荷载形式为

$$q(t)=\begin{cases} Dt & 0 < t \leq 10 \\ 10D & t > 10 \end{cases},$$

其中, D 为施工荷载速率,分数阶次 α 取 0.5 , $D=0.01 \text{ MPa}/\text{d}$,其余参数与上述算例相同。

a) 黏滞系数 η

考察在施工荷载情形下黏滞系数 η 对固结沉降的影响,结果如图11所示。

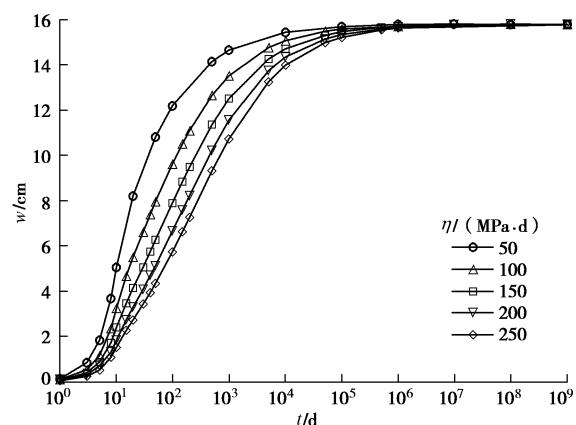


图11 不同黏滞系数 η 下的沉降曲线

Fig. 11 Settlement curves under different viscosity coefficients

图11中的5条曲线由左到右依次为黏滞系数 $\eta=50, 100, 150, 200$ 和 $250 \text{ MPa}\cdot\text{d}$ 时的沉降曲线。当其他参数不变时,施工荷载下分数阶导数Kelvin–Voigt模型黏弹性饱和土体一维固结沉降曲线随着黏滞系数 η 的增大,依次变得平缓,土体中孔隙水压力的整体消散速率变慢,并且在施工荷载结束前固结沉降速率相差不明显,但是对施工荷载结束后固结沉降速率变化显著,且最终沉降量大小一致。

b) 分数阶次 α

考察在施工荷载情形下分数阶次 α 对固结沉降的影响,结果如图12所示。

图12中的5条曲线由右到左依次为不同阶次 $\alpha=0.3, 0.5, 0.7$ 和 0.9 时的沉降曲线。其他参数不变时,施工荷载下分数阶导数Kelvin–Voigt模型黏弹性饱和土体一维固结过程随着不同分数阶次 α 的增大,固结沉降发展速率变快,其到达最终沉降所需时间变短,并且在施工荷载结束前固结沉降速率相差不明显,

但是对施工荷载结束后固结沉降速率变化显著。

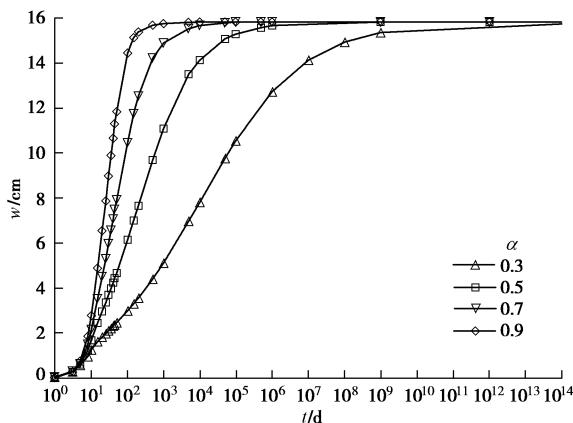


图 12 不同阶次 α 下的沉降曲线

Fig. 12 Settlement curves under different orders

c) 施工荷载速率 D

分数阶次 α 取 0.5, 其余参数与上述算例相同, 考察施工荷载速率 D 对固结沉降 w 的影响, 结果如图 13 所示。

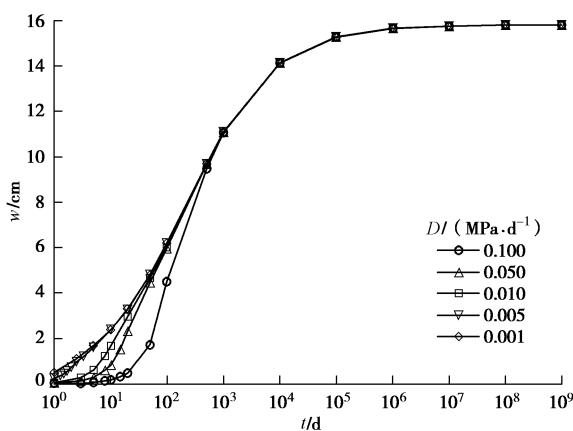


图 13 不同施工荷载速率 D 下的沉降曲线

Fig. 13 Settlement curves under different loading rates

图 13 中的 5 条依次由上到下曲线分别为施工荷载速率 $D=0.1, 0.05, 0.01, 0.005$ 和 $0.001 \text{ MPa}/\text{d}$ 时的沉降曲线。其他参数不变条件下, 施工荷载下分数阶导数 Kelvin–Voigt 模型黏弹性饱和土体一维固结沉降 w 随着施工荷载速率 D 的增大, 在施工荷载结束前, 固结沉降变化速率越快, 但施工荷载结束后, 固结沉降变化速率一致, 且最终沉降量大小一致。由于施工荷载速率 D 反映施工周期内荷载发展速度, 其只会影响固结沉降速率的变化, 对最终稳定沉降量没有影响, 故不难理解五条曲线最终重合。

4 结 论

(1) 本文基于 Terzaghi 的饱和土一维固结理论, 结合分数阶微积分理论, 推导出了任意荷载情况下分

数阶导数 Kelvin–Voigt 模型黏弹性饱和土体一维固结在物理空间内的有效应力及沉降的半解析解。

(2) 将指数荷载情形下沉降的半解析解退化到黏弹性情况与文献[5]研究成果完全吻合, 验证了本文推导出的半解析解及计算程序的可靠性。

(3) 指数荷载、周期荷载和施工荷载作用下的分数阶黏弹性饱和土体一维固结特征主要与分数阶次 α 、黏滞系数 η 、压缩模量 E_s 以及指数荷载参数与沉降量大小有关。当分数阶次 α 越大, 固结沉降发展越快; 黏滞系数 η 越大, 固结沉降变化越慢; 压缩模量 E_s 的增大, 土体越难被压缩, 最终沉降量也逐渐减小; 荷载变化趋势与由荷载参数变化引起的沉降变化规律是一致的, 且最终沉降量一致。

附录 拉普拉斯数值反演 Crump 方法

(1) 设 $f(t)$, 定义 $t \geq 0$ 时, 称函数 $F(S) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$, 为 $f(t)$ 的拉普拉斯逆变换。其中 $S = a + i\omega$ 是复变量。若 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 的任一有限区间上分段连续; 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 存在常数 $M > 0$ 及 $\alpha \geq 0$, 使 $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ 成立。则反演公式为 $f(t) = \frac{e^{at}}{\pi} \int_0^\infty [\text{Re} \{F(S)\} \cos \omega t - \text{Im} \{F(S)\} \sin \omega t] d\omega$ 其中 a 为任意大于 α 的实数。Crump 方法主要对上式运用梯形近似公式, 则

$$f(t) = \frac{e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} F(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \text{Re} \left[F \left(a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right] \cos \frac{k\pi t}{T} - \text{Im} \left[F \left(a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right] \sin \frac{k\pi t}{T} \right\} \right] + E_c,$$

E_c 为误差。其中 T 的选取, 应有 $2T > t_{\max}$, 即 $T > \frac{t_{\max}}{2}$, T 一般选取所需数值反演区间的两倍。

(2) a 的选取。若所期望的相对误差为 $E' \left(E' = \frac{E_c}{M e^{\alpha t}} \right)$, 则 a 的选择:

$$a = \alpha - \frac{\ln E'}{2T},$$

式中, α 取稍大于 $\text{Max}[\text{Re}(p)]$, p 为 $F(s)$ 的奇点。针对本文 α 取值为 0, E' 取 0.001, T 根据每组参数不同而定即可。

参考文献:

- [1] 刘忠玉, 闫富有, 王喜军. 基于非达西渗流的饱和黏土一维流变固结分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(9): 1937–1944. (LIU Zhong-yu, YAN Fu-you, WANG Xi-jun. One-dimensional rheological consolidation analysis of

- saturated clay considering on non-Darcy flow[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, **32**(9): 1937 – 1944. (in Chinese)
- [2] 刘林超, 闫启方. 分数导数模型描述的黏弹性土层中桩基水平振动研究[J]. 工程力学, 2011, **28**(12): 139 – 145. (LIU Lin-chao, YAN Qi-fang. Lateral vibration of single pile in viscoelastic soil described by fractional derivative model[J]. Engineering Mechanics, 2011, **28**(12): 139 – 145. (in Chinese))
- [3] 陈宗基. 固结及次时间效应的单向问题[J]. 土木工程学报, 1958, **5**(1): 1 – 10. (CHEN Zong-ji. Unidirectional issue several time consolidation effect[J]. China Civil Engineering Journal, 1958, **5**(1): 1 – 10. (in Chinese))
- [4] 赵维炳. 广义 Voigt 模型模拟的饱水土体一维固结理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1989, **11**(5): 78 – 85. (ZHAO Wei-bing. Generalized Voigt model to simulate the saturated soil and water body one-dimensional consolidation theory and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1989, **11**(5): 78 – 85. (in Chinese))
- [5] 蔡袁强, 徐长节, 袁海明. 任意荷载下成层黏弹性地基的一维固结[J]. 应用力学和数学, 2001, **22**(3): 307 – 313. (CAI Yuan-qiang, XU Chang-jie, YUAN Hai-ming. Under arbitrary loading viscoelastic foundation layer of one-dimensional consolidation[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, **22**(3): 307 – 313. (in Chinese))
- [6] XIE K H, XIE X Y, LI X B. Analytical theory for one-dimensional consolidation of clayey soils exhibiting rheological characteristics under time-dependent loading[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2008, **32**(14): 1833 – 1855.
- [7] 李皓玉, 杨绍普, 刘进, 等. 移动分布荷载下层状黏弹性体系的动力响应分析[J]. 工程力学, 2015, **32**(1): 120 – 127. (LI Hao-yu, YANG Shao-pu, LIU Jin, et al. Dynamic response in multilayered viscoelastic medium generated by moving distributed loads[J]. Engineering Mechanics, 2015, **32**(1): 120 – 127. (in Chinese))
- [8] GEMANT A. A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies[J]. Journal of Applied Physics, 1936, **7**(1): 311 – 317.
- [9] TAYLOR D W, MERCHANT W. A theory of clay consolidation accounting for secondary compression[J]. Journal of Mathematics and Physics, 1940, **19**(3): 167 – 185.
- [10] TAN T K. Secondary time effects and consolidation of clays[J]. Scientia Sinica, 1958, **7**(11): 1060 – 1075.
- [11] 李西斌, 贾献林, 谢康和. 变荷载下软土一维流变固结解析理论[J]. 岩土力学, 2006, **27**(增刊): 140 – 146. (LI Xi-bin, JIA Xian-lin, XIE Kang-he. Analytical solution of 1D viscoelastic consolidation of soft soils under time-dependent loadings [J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, **27**(S0): 140 – 146. (in Chinese))
- [12] 何利军, 孔令伟, 吴文军, 等. 采用分数阶导数描述软黏土蠕变的模型[J]. 岩土力学, 2011, **32**(增刊): 239 – 244. (HE Li-jun, KONG Ling-wei, WU Wen-jun, et al. A description of creep model for soft soil with fractional derivative[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(S0): 239 – 244. (in Chinese))
- [13] 尹检务, 旷杜敏, 王智超. 压实土固结蠕变特征及分数阶流变模型参数的分析[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2015, **30**(3): 46 – 51. (YIN Jian-wu, KUANG Du-min, WANG Zhi-chao. Consolidation creep characteristics of compacted clay and its parameters analysis of rheological constitutive model based on fractional calculus[J]. Journal of Hunan University of Science & Technology (Natural Science Edition), 2015, **30**(3): 46 – 51. (in Chinese))
- [14] 陈亮, 陈寿根, 张恒, 等. 基于分数阶微积分的非线性黏弹塑性蠕变模型[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2013, **45**(3): 7 – 11. (CHEN Liang, CHEN Shou-gen, ZHANG Heng, et al. A nonlinear viscoelasto-plastic creep model based on fractional calculus[J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2013, **45**(3): 7 – 11. (in Chinese))
- [15] 孙海忠, 张卫. 一种分析软土黏弹性的分数导数开尔文模型[J]. 岩土力学, 2007, **28**(9): 1983 – 1986. (SUN Hai-zhong, ZHANG Wei. Analysis of soft soil with viscoelastic fractional derivative Kelvin model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(9): 1983 – 1986. (in Chinese))
- [16] YIN De-shun, LI Yan-qing, WU Hao, et al. Fractional description of mechanical property evolution of soft soils during creep[J]. Water Science and Engineering, 2013, **6**(4): 446 – 455.
- [17] 殷德顺, 任俊娟, 和成亮, 等. 一种新的岩土流变模型元件[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, **26**(9): 1899 – 1903. (YIN De-shun, REN Jun-juan, HE Cheng-liang, et al. A new rheological model element for geomaterials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, **26**(9): 1899 – 1903. (in Chinese))
- [18] 王智超, 罗迎社, 罗文波, 等. 路基压实土流变变形的力

- 学表征及参数辨识[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, **30**(1): 208 - 216. (WANG Zhi-chao, LUO Ying-she, LUO Wen-bo, et al. Mechanical characterization and parameter identification of rheological deformation of subgrade compacted soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, **30**(1): 208 - 216. (in Chinese))
- [19] NONNENMACHER T F, METZLER R. On the Riemann-Liouville fractional calculus and some recent applications[J]. Fractals, 1995, **3**(3): 557 - 566.
- [20] MANDELBORT B B. The fractal geometry of nature[M]. San Fransico: Freeman, 1982.
- [21] 何光渝, 王卫红. 精确的拉普拉斯数值反演方法及其应用[J]. 石油学报, 1995, **16**(1): 96 - 103. (HE Guang-yu, WANG Wei-hong. Accurate numerical Laplace inversion method and its application[J]. Acta Petroleisnaca, 1995, **16**(1): 96 - 103. (in Chinese))
- [22] 张先伟, 王常明. 结构性软土的黏滞系数[J]. 岩土力学, 2011, **32**(11): 3276 - 3282. (ZHANG Xian-wei, WANG Chang-ming. Viscosity coefficient of structural soft clay[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(11): 3276 - 3282. (in Chinese))

2017年岩土工程西湖论坛: 岩土工程测试技术 (二号通知)

随着我国基本建设工程的进一步推进, 岩土工程测试面临着更严峻的挑战, 对相关测试技术也有着更高的要求。为顺应国家、社会需求, 探讨解决岩土工程测试技术面临的重大问题, 组织召开“2017年岩土工程西湖论坛: 岩土工程测试技术”学术会议。

主办单位: 中国工程院土木、水利与建筑工程学部; 中国土木工程学会土力学及岩土工程分会; 浙江大学滨海和城市岩土工程研究中心。

支持单位: 浙江省科协技术协会。

协办单位: 浙大永拓信息经济与智慧城市发展研究中心; 浙江开天工程技术有限公司; 杭州市勘测设计研究院; 浙江省建筑设计研究院有限公司; 中交天津港湾工程有限公司; 中淳高科桩业股份有限公司(浙东建材)。

会议时间: 2017年11月9~10号(8日报到)。

会议地点: 杭州梅地亚宾馆。

会议主题: 岩土工程测试理论、技术新进展。

大会秘书处: 秘书: 陆水琴15967126989, lusq87@163.com; 王笑笑13646828087, wangxiuxiu713@163.com。

(大会组委会 供稿)