

DOI: 10.11779/CJGE201710007

# 考虑基体变形和微凸体变形相互作用的岩石节理闭合变形理论模型

唐志成<sup>1,2</sup>, 黄润秋<sup>2</sup>, 焦玉勇<sup>\*1</sup>, 谭 飞<sup>3</sup>, 朱 星<sup>2</sup>

(1. 中国地质大学(武汉)工程学院, 湖北 武汉 430074; 2. 成都理工大学地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室, 四川 成都 610059;  
3. 中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

**摘要:** 地下岩体工程建设和运营过程中, 需要考虑节理岩体的水力学性质, 这与节理的闭合变形密切相关。对法向应力作用下节理微凸体的变形特征进行详细分析, 逐个计算接触微凸体的法向变形和接触应力; 采用接触理论计算微凸体基圆半径之外的基体变形, 并以此调整微凸体的法向位置, 进而提出新的闭合变形理论模型。新模型可反映节理的基体变形和微凸体变形相互作用的影响, 也能体现形貌分量和接触类型对闭合变形的影响。与已有的理论模型比较, 新模型的计算值更为接近试验值。采用叠加原理, 新模型计算得到的初始法向刚度最小; 但随法向应力的增加, 法向刚度增加速率逐步加快。

**关键词:** 岩石节理; 闭合变形; 接触力学; 变形相互作用

中图分类号: TU451 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2017)10-1800-07

作者简介: 唐志成(1983-), 男, 教授, 主要从事岩石力学方面的科研工作。E-mail: zctang@cug.edu.cn。

## Theoretical closure model for rock joints considering interaction of deformations of substrate deformation and asperity

TANG Zhi-cheng<sup>1,2</sup>, HUANG Run-qiu<sup>2</sup>, JIAO Yu-yong<sup>1</sup>, TAN Fei<sup>3</sup>, ZHU Xin<sup>2</sup>

(1. Faculty of Engineering, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China; 2. State Key Laboratory of Geohazard Prevention and Geoenvironment Protection, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China; 3. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

**Abstract:** The closure behavior of rock joints remains a problem of interest with applications in many practical engineering cases. Based on a comprehensive assessment of realistic closure behavior, a Hertz-based theoretical model is proposed to predict the closure behavior of a rock joint under compressive loading. In the present study, special attention is focused on the role of mechanical interaction of asperities during the closure process. The vertical positions (perpendicular to the least square plane) of asperities are adjusted by using the discrete methodology based on the Hertz solution of substrate deformation outside the contact region. The factors influencing the closure behavior of rock joints can be considered by the model, namely (1) the surface morphology component, (2) the contact state between the upper and lower blocks (or the composite topography), and (3) the deformation due to asperity itself, the substrate deformation due to the deformed asperity and the deformation caused by the mechanical interaction due to the adjacent deformed asperities. The validity is demonstrated by comparing the experimental results with the curves predicted by Xia model, Tang model and the proposed model. The results show that the closure behavior predicted by the proposed model is in good agreement with experimental data, with small discrepancies between the predicted and the measured values. A preliminary explanation for the discrepancies of contact stiffness predicted by Xia model, Tang model and the proposed model associated with different underlying principles is also put forward.

**Key words:** rock joint; closure deformation; contact mechanics; mechanical interaction

## 0 引言

在诸如地下水水源开采、核废料地质处置等岩石地下建筑工程中, 评价节理岩体的水力学性质是至关重要的。由于包含于其中的节理通常是地下水/气流动

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(41672302, 11672360, 41402247); 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室开放基金项目(SKLGP2014K018)

收稿日期: 2016-07-13

\*通讯作者 (E-mail: yyjiao@cug.edu.cn.)

的主要通道, 因此有必要研究法向应力作用下节理的闭合变形性质。在实验室尺度下展开节理闭合变形性质的研究是全面理解大尺度节理岩体水力学性质的基础。

Greenwood-Williamson (GW) 模型<sup>[1]</sup>是众多粗糙节理接触变形理论的基础。该模型假定粗糙节理面由多个相互独立、半径相等的微凸体构成, 高度分布服从高斯分布函数。GW 模型的最大缺陷在于忽视了法向应力作用下基体变形和微凸体变形相互作用的影响<sup>[2]</sup>。根据 Cook<sup>[3]</sup>、Hopkins<sup>[4]</sup>的研究: 随法向应力的增加, 邻近微凸体的变形相互作用越来越明显, 不能忽视其对节理闭合变形的影响。Xia 等<sup>[5]</sup>认为岩石节理形貌中的起伏体对闭合变形的影响与微凸体对闭合变形的影响是不同的, 结合 Brown-Scholz (BS) 模型<sup>[6]</sup>提出考虑起伏体影响的节理闭合变形理论模型, 亦没有考虑基体变形和微凸体变形相互作用的影响。另一方面, 微凸体变形引起的基体变形也是影响节理闭合变形的重要因素, 部分学者采用数值方法<sup>[7]</sup>、解析方法<sup>[8]</sup>研究了这一问题, Tang 等<sup>[9]</sup>、唐志成等<sup>[10]</sup>基于 Hertz 接触理论提出了考虑基体变形的闭合变形理论模型。此外, 国内学者<sup>[11]</sup>提出岩石节理闭合变形经验模型。

节理闭合变形受多种因素影响, 一般包括: 形貌分量(起伏体、微凸体)、接触类型和材料变形(微凸体变形、基体变形、微凸体变形相互作用)3个方面。目前基于 Hertz 接触理论的闭合变形模型要么没有考虑微凸体变形相互作用的影响<sup>[1, 5, 9]</sup>, 要么没有考虑基体变形的影响<sup>[1, 5, 7]</sup>。为此, 本文在改进的 GW 模型的基础上, 结合第一作者之前的研究成果<sup>[9]</sup>, 通过逐个分析接触微凸体的变形特征提出考虑上述3大类因素影响的节理闭合变形理论模型。

## 1 形貌描述方法

Brown 等<sup>[6]</sup>认为节理的接触变形不仅仅取决于单个节理面, 更与节理上下两个面的接触相关, 引入“组合形貌”分析不同接触节理的闭合变形问题。如图 1 所示, 接触在组合形貌高度的最大处产生(两个表面距离最近的点), 而最大处并非都与微凸体的峰点对应。组合形貌计算公式为<sup>[5]</sup>

$$z_c(i, j) = z_{\text{上}}(i, j) + z_{\text{下}}(i+l, j+k) \quad \text{。} \quad (1)$$

式中  $z_c(i, j)$  为节理三维组合形貌数据点  $(i, j)$  处的高度;  $z_{\text{上}}(i, j)$  为上表面数据点  $(i, j)$  处的高度;  $z_{\text{下}}(i+l, j+k)$  为下表面数据点  $(i+l, j+k)$  处的高度,  $l$ ,  $k$  分别为节理沿  $x$ ,  $y$  方向的采样间隔数(本文中, 节理的两面只沿同一方向错位, 即  $k=0$  )。

根据国际岩石力学学会 (International Society for

Rock Mechanics, ISRM)<sup>[12]</sup>, 节理的形貌一般可分为高频的粗糙度分量(微凸体)和低频的起伏度分量(起伏体)。通过傅立叶变换可对二者进行分离<sup>[5]</sup>, 典型的含起伏度分量的节理剖面线如图 2 所示。依据节理单个面的形貌特征及其组合形貌特征, 节理的接触可分为 3 种类型<sup>[5]</sup>:

(1) 类型 I: 节理两个面只含粗糙度, 对应的组合形貌也只含粗糙度。该类型的节理可转化为一个光滑平面与一个由该节理的组合形貌形成的随机粗糙面的接触闭合问题。

(2) 类型 II: 节理两个面均含有起伏度和粗糙度, 但组合形貌只含有粗糙度。该类型的节理可转化为一个光滑平面与一个由该节理的组合形貌形成的随机粗糙面的接触闭合问题。

(3) 类型 III: 节理两个面均含有起伏度和粗糙度, 其组合形貌也含有起伏度和粗糙度。该类型的节理可转化为一个光滑平面与一个由该节理组合形貌形成的含起伏度粗糙面的接触闭合问题。

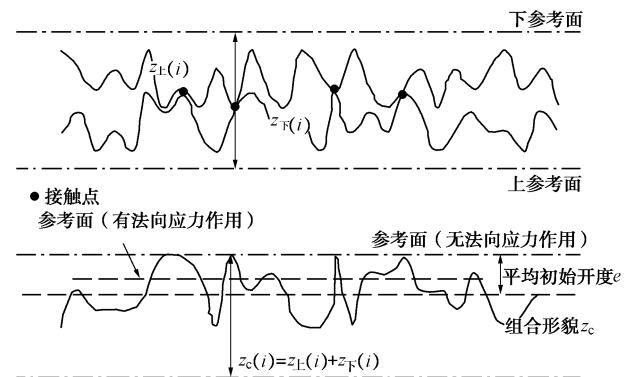


图 1 节理剖面线的组合形貌

Fig. 1 Sketch of two rough surface profiles of a joint and associated composite topography

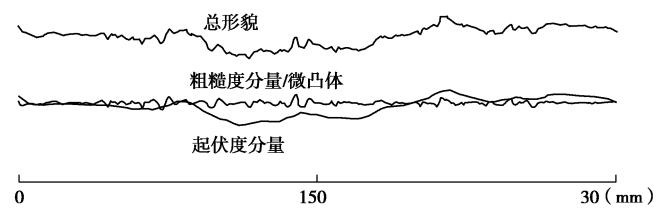


图 2 节理形貌及其分量<sup>[12]</sup>

Fig. 2 Total topography and two components<sup>[12]</sup>

## 2 闭合变形模型

### 2.1 微凸体的变形特征

法向应力作用下单个微凸体的变形如图 3 所示(均视为弹性变形), 除微凸体正下方的基体产生协调

变形之外, 微凸体邻近区域也产生一定的变形<sup>[3-4]</sup>。若微凸体产生的变形为  $\delta_a$ , 基体产生的协调变形为  $\delta_b$ , 根据变形协调原则<sup>[9]</sup>:  $\delta = \delta_a + \delta_b$ 。

将微凸体的法向变形刚度和基体的法向变形刚度视为串联弹簧模型, 则有<sup>[9]</sup>

$$F_{ci} = k\delta, \quad (2)$$

$$k = \left[ \frac{1}{k_a(\delta_a)} + \frac{1}{k_b} \right]^{-1}, \quad (3)$$

$$\delta_a = \frac{\delta}{1 + \frac{3}{2\sqrt{\rho}} \sqrt{\delta} \left( 1 + \frac{3}{2\sqrt{\rho}} \sqrt{\delta/2} \right)}, \quad (4)$$

$$k_a = 2\sqrt{\rho} E_a \sqrt{\delta_a}, \quad (5)$$

$$k_b = \frac{4}{3} r_b E_b. \quad (6)$$

式中  $F_{ci}$  为第  $i$  个微凸体的接触力;  $\delta$  为计算过程中节理面的给定变形;  $k$  为微凸体、基体串联后的刚度系数;  $k_a$ ,  $k_b$  分别为微凸体、基体的劲度系数;  $\rho$  为微凸体的半径;  $E_a$ ,  $E_b$  分别为微凸体、基体的弹性模量。

微凸体基圆之外区域 ( $r > r_b$ ) 的法向变形可由式 (6) 确定<sup>[2]</sup>。根据 Brown 等<sup>[6]</sup>, 接触变形首先产生于组合形貌中高度最大的微凸体, 且该变形引起邻近微凸体法向位置的调整, 从而产生新的接触变形并进一步调整微凸体的法向位置。重复这一过程直至达到平衡, 是为微凸体变形相互作用。微凸体法向位置调整的计算流程图见图 4。

$$U_z(r) = \frac{F_{ci}}{2r_b E_b} \left[ (2r_b^2 - r^2) \sin^{-1}(r_b^2/r) + r_b \sqrt{r^2 - r_b^2} \right]. \quad (7)$$

式中  $U_z(r)$  为微凸体基圆之外区域的变形;  $r$ ,  $r_b$  的含义见图 3。

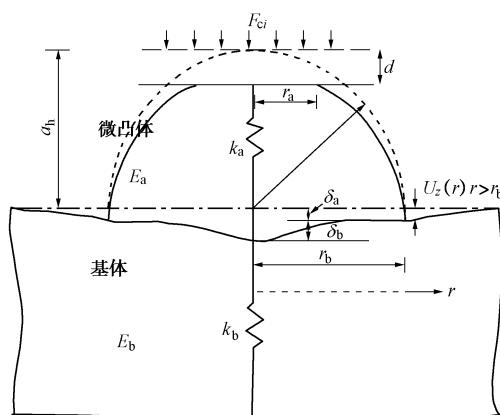


图 3 法向应力作用下微凸体的变形

Fig. 3 Deformation characteristics of single asperity under normal stress

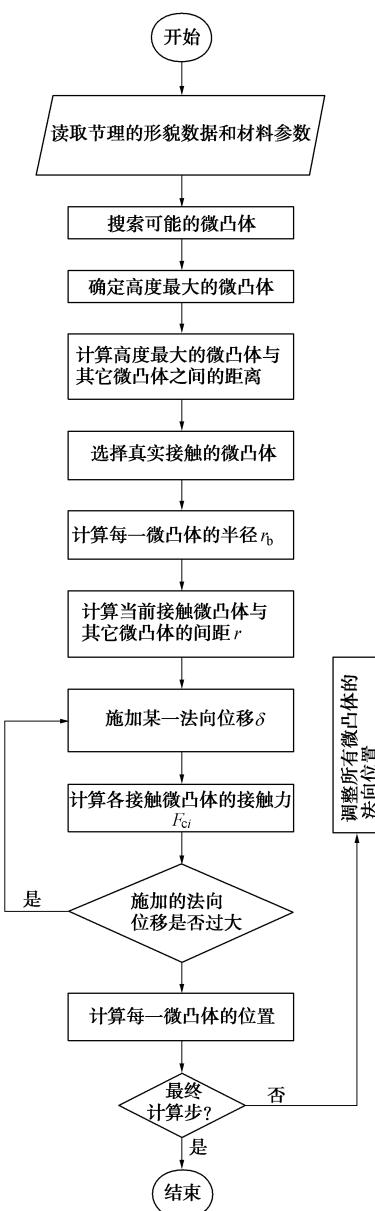


图 4 微凸体法向位置调整计算流程图

Fig. 4 Flow chart of position adjustment of asperities between a flat surface and a rough surface

## 2.2 新模型

为考虑起伏体与微凸体的接触, 如图 5 所示, 做出如下假定<sup>[5]</sup>: 起伏体在接触处的某一区域内可近似为半径为  $R$  的球体且变形服从 Hertz 接触理论; 接触压力分布函数  $q(r)$  在接触中心处最大, 大小由“接触圆面上以  $2a$  为底、 $b$  为基圆半径的箕舌线旋转体的纵坐标”表示。根据变形协调原则, 当作用在起伏体上的外荷载为  $P$  时, 起伏体的变形  $w(r)$ 、微凸体的变形  $u(r)$ 、接触区域内的压力分布函数  $q(r)$  可分别表示为<sup>[5]</sup>

$$w(r) = \frac{2P}{\pi E' b c} \int_0^{\pi/2} \left[ a \tan \left( \frac{1}{2b} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \right) - \frac{2b}{a^2 + 4b^2} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \right] d\varphi, \quad (8)$$

$$u(r) = \frac{a^2 - r^2}{2R} + w(a) - w(r) \quad , \quad (9)$$

$$q(r) = \frac{P}{\pi c} \left( \frac{1}{r^2 + 4b^2} - \frac{1}{a^2 + 4b^2} \right) \quad . \quad (10)$$

式中  $E'$  为等效弹性模量;  $c = \ln\left(\frac{a^2 + 4b^2}{4b^2}\right) - \frac{a^2}{a^2 + 4b^2}$ ; 其它参数含义见图 5, 其中  $r$  为距离接触中心的距离。

另一方面, 为考虑微凸体变形相互作用对接触压効的影响, 采用对单个微凸体接触压力  $F_{ci}$  逐个求和的方法确定整个节理面的接触压力  $F_c$ :

$$F_c = \sum_{i=1}^N F_{ci} \quad . \quad (11)$$

式中  $N$  为接触微凸体的个数;  $i$  为自然数, 表示第  $i$  个接触微凸体。

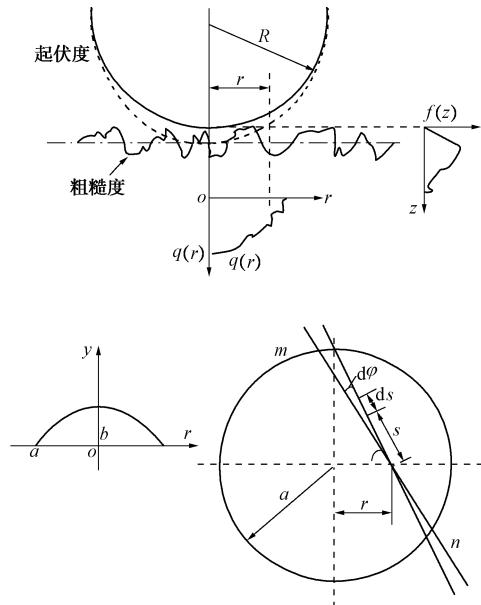


图 5 起伏体与粗糙度的接触<sup>[5]</sup>

Fig. 5 Contact between waviness and unevenness of composite topography for a rock joint<sup>[5]</sup>

对同一接触而言, 起伏体与微凸体之间的接触力是作用力与反作用力的关系, 因此在接触区域内的压効分布是相同的。但是在接触区域内, 可能有多个微小的接触, 为此假定在特殊点处满足平衡条件, 则认为接触力的作用效果是相同的, 由此得到节理的闭合变形曲线。求解时, 先给  $a, b$  赋非零初始值, 由式(8)计算起伏体的变形、式(9)计算微凸体的变形; 结合式(10)、(11)计算含粗糙度节理的接触压効; 最后, 通过迭代计算并在特殊点处满足平衡条件得到节理的闭合变形: 接触中心处压効相等、作用在起伏体上的外荷载  $P$  与微凸体变形产生的总接触压効  $F_c$  相等。在

应用上述模型之前, 需要区分节理的起伏体分量和粗糙度分量, 采用傅里叶级数对形貌的起伏体分量和粗糙度分量进行分离<sup>[5]</sup>, 求解新模型的计算流程图见图 6。

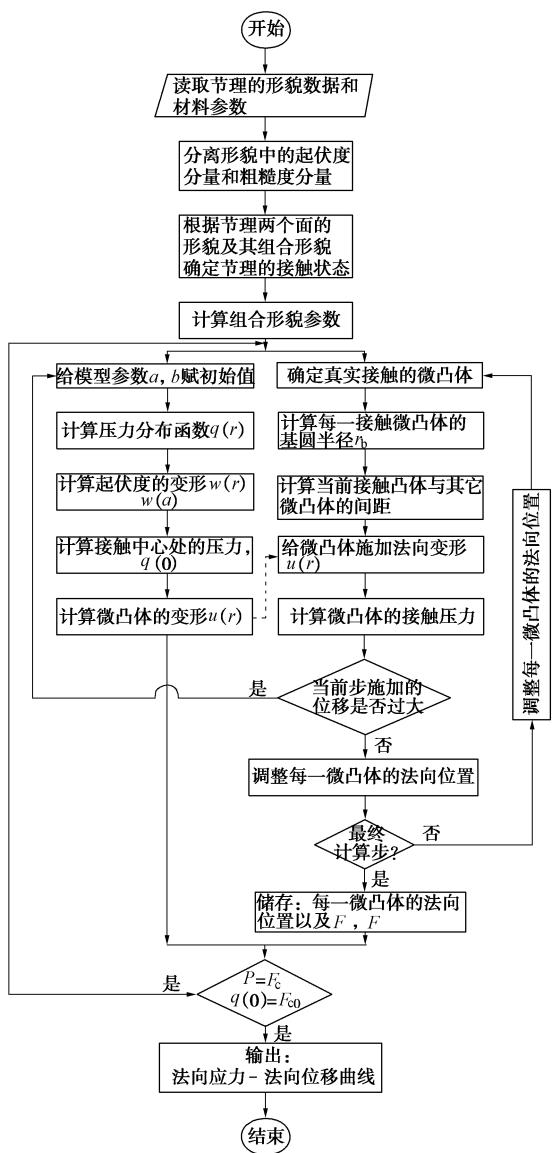


图 6 模型求解计算流程图

Fig. 6 Flow chart for solving proposed model

### 3 试验验证

#### 3.1 闭合变形试验

采用巴西劈裂法劈裂花岗岩获得若干具有不同表面形貌的岩石节理, 平面尺寸长×宽=300 mm×150 mm, 选用其中 2 个具有明显形貌差异的岩石节理作为制备模拟岩石节理的模板, 分别命名为 J-I、J-II。先用硅胶复制岩石节理的形貌, 然后以此为模板浇筑水泥砂浆制备节理试件, 每组 4 个。模拟材料的配比、养护条件和力学参数列于表 1 (其中:  $\sigma_c$  为单轴压缩强度;  $\sigma_t$  为抗拉强度;  $\varphi_0$  为基本摩擦角;  $E$  为弹性模



表 1 模拟材料的主要特征参数

Table 1 Main features of model materials

水泥:砂:水(质量比)	养护条件	$\sigma_c$ /MPa	$\sigma_t$ /MPa	$\phi_b$ (°)	$E$ /GPa	$\nu$	$\rho$ /(kg·m <sup>-3</sup> )
3:2:1	温度=25°C 湿度=90% 天数=28 d	27.5	1.54	35.0	6.1	0.16	2200

表 2 模型参数

Table 2 Input parameters for validity of proposed model

错开位移 量/mm	J-I				J-II			
	$\eta$ /mm <sup>-2</sup>	$\beta$ /mm	$R$	$e_0$	$\eta$ /mm <sup>-2</sup>	$\beta$ /mm	$R$	$e_0$
5	0.1666	6.3248	$\infty$	1.36	0.0970	5.1626	141.8	2.18
10	0.1727	6.2276	$\infty$	1.93	0.0950	5.4584	144.3	2.66
15	0.1738	6.4430	$\infty$	2.24	0.0955	5.3642	143.2	3.02

$\eta$  为峰点密度;  $\beta$  为峰点平均曲率半径;  $R$  为起伏体半径。

量;  $\nu$  为泊松比;  $\rho$  为材料的密度)。采用国际岩石力学学会建议的方法获得模拟材料的单轴压缩强度、抗拉强度、弹性模量和泊松比等; 采用平直节理在低法向应力下的直剪试验获得模拟材料节理的基本摩擦角。采用 TJXW-3D 型便携式岩石三维表面形貌仪(精度为 20  $\mu\text{m}$ )获取节理的形貌数据。

在试验前, 将节理的上、下面分别错开 5, 10, 15 mm 获得不同的组合形貌进行闭合变形试验, 具体操作方法如下<sup>[11]</sup>:

(1) 将节理的上、下试块处于紧贴的偶合状态, 此时节理上、下面壁的错开位量为 0 mm。

(2) 在节理面所在平面画间距为 1 mm 的等间距直线。

(3) 固定下半个节理试块, 将上半个节理试块沿剪切方向移动, 如 5, 10, 15 mm 等, 得到不同接触状态的节理试件。在移动过程中, 将节理的上半个试块抬高几厘米以避免试件接触, 造成微凸体的破损。

节理的闭合变形试验在同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室的 CSS-342 岩体剪切试验机上完成。闭合变形试验中施加的法向应力为 3.0 MPa, 试验前先施加 50 kPa 的法向应力稳定试验系统, 然后以 0.002 MPa/s 的速率加载到设定值。试验过程中, 在节理的四个角点处设置监测点用 LVDT 记录该点的闭合变形, 精度为 0.001 mm, 节理的闭合变形由 4 个角点记录结果的平均值确定。对错开位移量的节理试件, 在闭合变形试验时需特别注意上半试块的位置, 在施加 50 kPa 的稳定荷载时应使得试块与试验机的作动器完全接触, 不能出现偏心加载。

试验结果如图 7 所示, 呈典型的非线性特征。可以明显的看出, 虽然单个节理面的形貌是相同的, 但其闭合变形随错开位移量的不同而不同, 总体趋势是

在相同的法向应力作用下闭合变形随上、下表面错开位移量的增加而增加, 说明与节理闭合变形直接相关的是不同接触下的组合形貌。

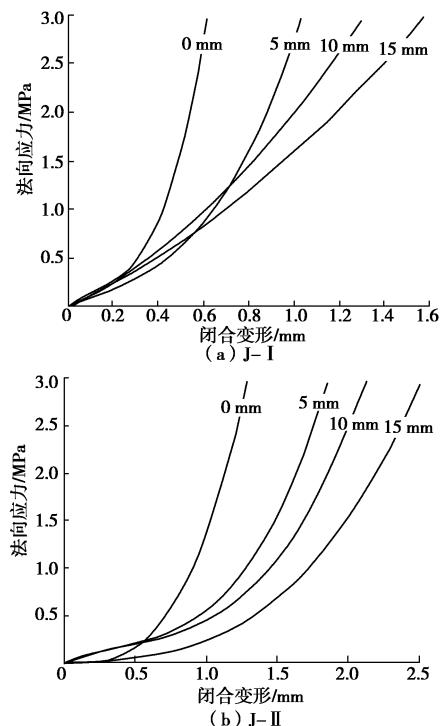


图 7 闭合变形试验曲线

Fig. 7 Curves of closure deformation tests

### 3.2 比较分析

模型计算所需要的参数见表 2。根据 Xia 等<sup>[5]</sup>, J-I 属于类型 I, J-II 属于类型 III。新模型的计算曲线与试验曲线的比较见图 8, 9。为进一步验证新模型的合理性, 图 8, 9 亦提供了 Xia 等模型和 Tang 等模型的计算曲线<sup>[5, 9]</sup>。总体上可以看出, 本文提出的模型由于考虑了基体变形和微凸体变形相互作用, 计算曲线更

为接近试验曲线。

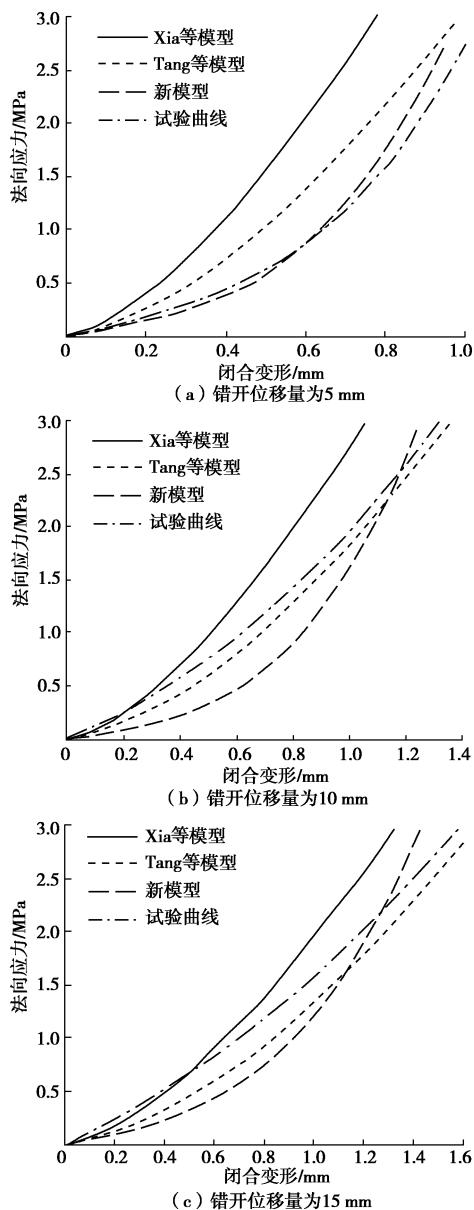


图8 试验曲线与模型计算曲线比较(J-I)

Fig. 8 Comparison between experimental and theoretical closure deformation curves for J-I

当法向应力较小时, 新模型得到的初始法向刚度小于Xia等模型和Tang等模型计算得到的初始法向刚度; 但随法向应力的增加, 新模型计算得到的法向刚度增加速率大于Xia等模型和Tang等模型计算得到的法向刚度增加速率。原因可能在于新模型在分析微凸体变形相互作用时, 采用离散方法逐个搜索可能的接触点, 初始接触变形始于组合形貌高度最大点; 随法向应力增加, 越来越多的微凸体产生接触变形(邻近的多个微凸体可能会融合成为一个更大的微凸体), 从而导致法向刚度快速增加。

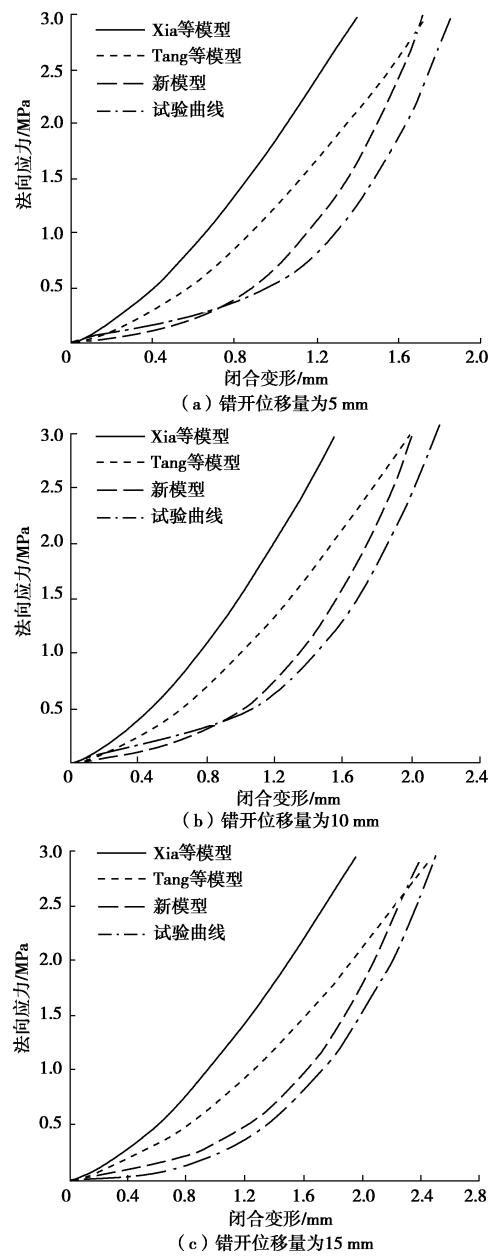


图9 试验曲线与模型计算曲线比较(J-II)

Fig. 9 Comparison between experimental and theoretical closure deformation curves for J-II

与其他学者研究节理闭合变形时做的前提假设一致<sup>[3-9]</sup>, 本文提出的模型亦将微凸体的变形视为弹性的。事实上, 即便施加的名义法向应力很小, 由于接触面积非常少, 真实的接触应力也是非常大的(相对于名义法向应力)。在闭合变形过程中, 节理面会产生塑形变形, 部分情况下微凸体甚至会产生破坏<sup>[5,14-16]</sup>。此外, 微凸体的空间几何形态在接触变形的过程中会产生一定的变化, 会影响接触处的切向摩擦力, 从而影响接触力的分布和接触变形。

## 4 结 论

法向应力作用下, 微凸体变形相互作用和基体变

形均与节理的闭合变形直接相关。之前基于节理组合形貌的理论模型未能充分考虑二者对闭合变形的影响。将微凸体和基体的变形均视为弹性的,逐个确定组合形貌中可能接触的微凸体并分析其变形,采用接触理论求解微凸体变形引起的基体变形、微凸体基圆区域之外的基体变形,利用叠加原理求解接触变形和接触应力的关系,进而提出新的闭合变形理论模型。新模型能够考虑起伏体和接触类型对节理闭合变形的影响。与已有的理论模型比较,新模型的计算值更为接近试验值。

### 参考文献:

- [1] GREENWOOD J A, WILLIAMSON J B P. Contact of nominally flat surfaces[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1966, **295**(1442): 300 – 319.
- [2] CIAVARELLA M, DELFINE V, DEMELIO G A “re-vitalized” Greenwood and Williamson model of elastic contact between fractal surfaces[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2006, **54**(12): 2569 – 2591.
- [3] COOK N G W. Natural joints in rock: Mechanical, hydraulic and seismic behaviour and properties under normal stress[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1992, **29**(3):198 – 223.
- [4] HOPKINS D L. The implications of joint deformation in analyzing the properties and behavior of fractured rock masses, underground excavations, and faults[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2000, **37**(1/2): 175 – 202.
- [5] XIA C C, YUE Z Q, THAM L G, et al. Quantifying topography and closure deformation of rock joints[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2003, **40**(2): 197 – 220.
- [6] BROWN S R, SCHOLZ C H. Closure of rock joints[J]. Journal of Geophysics Research: Solid Earth, 1986, **91**(B5): 4939 – 4948.
- [7] LEE SD, HARRISON JP. Empirical parameters for non-linear fracture stiffness from numerical experiments of fracture closure[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2001, **38**(5): 721 – 727.
- [8] MARACHE A, RISS J, GENTIER S. Experimental and modelled mechanical behaviour of a rock fracture under normal stress[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2008, **41**(6): 869 – 892.
- [9] TANG Z C, LIU Q S, XIA C C, et al. Mechanical model for predicting closure behavior of rock joints under normal stress[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2014, **47**(6): 2287 – 2298.
- [10] 唐志成, 夏才初, 宋英龙, 等. 考虑基体变形的节理闭合变形理论模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, **31**(增刊1): 3068 – 3074. (TANG Zhi-cheng, XIA Cai-chu, SONG Ying-long, et al. Joint closure deformation model based on asperity-substrate deformation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, **31**(S1): 3068 – 3074. (in Chinese))
- [11] 俞 缙, 赵晓豹, 赵维炳, 等. 改进的岩石节理弹性非线性法向变形本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(9): 1316 – 1321. (YU Jin, ZHAO Xiao-bao, ZHAO Wei-bing, et al. Improved nonlinear elastic constitutive model for normal deformation of rock fractures[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(9): 1316 – 1321. (in Chinese))
- [12] ISRM. Suggested methods for the quantitative description of discontinuities in rock masses[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1978, **15**(6): 319 – 368.
- [13] 唐志成. 不同接触状态节理和柱状节理岩体的力学性质[D]. 上海: 同济大学, 2013. (TANG Zhi-cheng. Mechanical behaviors of rock joint under different contact state and columnar jointed rock mass[D]. Shanghai: Tongji University, 2013. (in Chinese))
- [14] SWAN G. Determination of stiffness and other joint properties from roughness measurements[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 1983, **16**(1): 19 – 38.
- [15] MATSUKI K, WANG E Q, GIWELLI A A, et al. Estimation of closure of a fracture under normal stress based on aperture data[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2008, **45**(2): 194 – 209.
- [16] LANARO F, STEPHANSSON O. A unified model for characterization and mechanical behavior of rock fractures[J]. Pure and Applied Geophysics, 2003, **160**(5/6): 989 – 998.