

DOI: 10.11779/CJGE201709010

复变函数法分析盾构隧道开挖引起的土体位移和衬砌变形

张治国^{1, 2, 3}, 杨 轩², 宫剑飞³, 王卫东⁴

(1. 国土资源部丘陵山地地质灾害防治重点实验室, 福建 福州 350002; 2. 上海理工大学环境与建筑学院, 上海 200093;
3. 中国建筑科学研究院建筑安全与环境国家重点实验室, 北京 100013; 4. 华东建筑设计研究院有限公司, 上海 200002)

摘要: 盾构隧道开挖引起的地层变形历来是人们所关注的重要课题。目前, 既有成果较少考虑隧道衬砌与土体相互作用所带来的影响, 尤其是较少针对衬砌变形进行分析, 就此基于隧道椭圆化变形边界条件, 提出了考虑衬砌与土体两种不同介质相互作用下的地层位移和衬砌变形复变函数解答。在该方法中, 隧道埋深只影响共形映射后圆环域的环壁厚度, 而解析区域依然保持圆形, 具有不会对函数解析产生影响的优势; 此外, 该法经共形映射后保证了边界连续性, 避免了既有应力函数法为保证隧道扰动土体无穷远处位移为零, 而对解析解进行修正所导致物理意义不明确的缺陷。通过实例分析, 得到了隧道开挖引起的地表沉降, 并与实测数据进行了对比验证; 通过参数分析, 获取了扰动地层和隧道衬砌变形的影响规律。结果表明: 复变函数解答得到的土体位移曲线与实测值吻合较好, 且地表最大沉降值更接近于实测值; 隧道的埋深和半径对土体位移和衬砌变形均有较大影响, 衬砌厚度对其影响虽然较小, 但仍不可忽略; 衬砌径向位移曲线呈仰卧的鸭蛋形, 关于 $90^\circ / 270^\circ$ 轴对称, 拱顶和拱底被压扁, 拱顶压缩量明显大于拱底, 左、右两侧压缩量小于上、下两侧, 表现为收缩之后又被压扁向左、右两侧突出, 且随着埋深的增大, 衬砌整体上浮; 衬砌环向位移曲线呈侧立的苹果形, 关于 $0^\circ / 180^\circ$ 轴对称, 且在 90° 和 270° 处取值为零, 随着隧道埋深的增大, 环向位移绝对值增大。

关键词: 盾构隧道; 复变函数; 椭圆化变形; 土体位移; 衬砌变形

中图分类号: TU43; U45 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2017)09-1626-10

作者简介: 张治国(1978-), 男, 博士, 博士后, 副教授, 硕士生导师, 主要从事地下工程施工对周边环境影响控制方面的研究工作。E-mail: zgzhang@usst.edu.cn。

Complex variable analysis of soil displacement and liner deformation induced by shield excavation

ZHANG Zhi-guo^{1, 2, 3}, YANG Xuan², GONG Jian-fei³, WANG Wei-dong⁴

(1. Key Laboratory of Geohazard Prevention of Hilly Mountains, Ministry of Land and Resources, Fuzhou 350002, China; 2. School of Environment and Architecture, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 3. State Key Laboratory of Building Safety and Environment, China Academy of Building Research, Beijing 100013, China; 4. East China Architecture Design and Research Institute Co., Ltd., Shanghai 200002, China)

Abstract: The ground deformation caused by shield excavation is always a key issue. The current studies give little attention on the impacts of interaction between tunnel liner and soils. Particularly the deformation analysis of the liner is not conducted. A complex variable solution for ground displacement and liner deformation is proposed considering the interaction of liner-soil and the boundary condition for the oval deformation. In this method, the depth of tunnel affects only the thickness of ring walls after conformal mapping and the analytical region remains round. It will not affect the function analysis. Besides, after the conformal mapping this method guarantees the continuity of boundary. It can make the soil displacements zero at infinity and avoid the analytical defects. That occurs via correcting analytical solution by which the existing stress function methods keep infinity soil displacement zero. Through the case analysis, the ground settlements induced by tunnel excavation are obtained and compared with the measured data. The deformation influence law of ground and tunnel liner is acquired through parameter analyses. The results indicate that the vertical

基金项目: 国家自然科学基金项目(41772331); 上海自然科学基金项目(15ZR1429400); 国土资源部丘陵山地地质灾害防治重点实验室课题(2015k005); 建筑安全与环境国家重点实验室课题(BSBE2015-01)
收稿日期: 2016-06-11

displacement curves of soils are in good agreement with the measured values. The surface maximum settlement is closer to the actual one. The depth and radius of tunnel have a great influence on the soil displacement and liner deformation. Although the influence of thickness of liner is less, it cannot be ignored. The radial displacement of liner presents a shape of supine duck egg, which is symmetrical to the axis $90^\circ/270^\circ$. Its value is negative, which means that the liner shrinks as a whole. The vault and arch bottom get squashed. The shrinkage in vault is greater than that in arch bottom. The shrinkage at the left and right sides is less than that at the upper and lower sides, which shows that the liner is crushed to the left and right sides after being compressed. With the increase of the tunnel depth, the liner comes up overall. The tangential displacement of the liner presents a shape of a toppled apple which is symmetrical to the axis $0^\circ/180^\circ$. The values in 90° and 270° are zero. The absolute values of tangential displacement increase with the increase of depth.

Key words: shield tunnel; complex variable; oval deformation; soil displacement; liner deformation

0 引言

盾构隧道开挖对周围土体和建筑物有较大影响, 尤其城市地区, 由于周边建筑环境的复杂性以及人口的高度集中性, 准确地预测由盾构开挖引起的土体位移, 对公共财产安全有着极其重要的意义。目前, 针对盾构隧道开挖问题的研究, 国内外学者主要采用经验法、数值分析法和解析(半解析)法。

在经验法中, Mair 等^[1]、Celestino 等^[2]、周济民等^[3]、张剑晨等^[4]基于大量工程实测数据, 提出了土体位移经验解法。在解析(半解析)法中, 典型方法有: 镜像法(Loganathan 等^[5]、叶飞等^[6]、林存刚等^[7])、极坐标系下的应力函数法(Bobet^[8]、Chou 等^[9]、Park^[10-11]、Puzrin 等^[12]、张治国等^[13])、复变函数法(Verruijt^[14-15]、王立忠等^[16]、苏锋等^[17]、韩凯航等^[18], 宋浩然等^[19])、弹性力学 Mindlin 解法(魏纲等^[20]、唐晓武等^[21]、梁荣柱等^[22])和随机介质理论(施成华等^[23]、刘庆潭等^[24]、蔡海兵等^[25])。解析法(半解析)采用间隙参数^[26]的概念, 大都通过明确的理论推导得到, 可有效预估隧道施工诱发的土体变形。

在极坐标系下的应力函数法方面, Bobet^[8]以及 Chou 等^[9]从 Airy 应力函数^[27]出发, 考虑隧道衬砌与土体两种不同介质的组合作用, 给出了浅埋隧道应力函数法解答, 但只考虑了隧道边界的均匀径向收缩, 未能反映出隧道边界的椭圆化变形。Park^[10-11]提出了 4 种固定边界形式下土体变形的弹性解, 但并未考虑衬砌和土体相互作用的影响。Puzrin 等^[12]基于隧道边界均匀收敛模式和 4 种非均匀收敛模式, 提出了该边界条件下的弹性问题解析解, 该方法参数明晰, 测定方便, 也使非均匀收敛变形得到了清晰的表达, 但未考虑衬砌与土体间的相互协调变形关系。张治国等^[13]综合考虑了土体与衬砌的协调变形和隧道边界的非均匀收敛变形, 得出了浅埋隧道弹性解析解。但是, 上述解法均存在如下缺陷, 即位移解析式中带有 $\ln r$ 项, 使得隧道土体的位移分量随距离的增加持续递增, 显

然不满足实际的位移边界条件。

复变函数法可以把只含有一个圆形孔洞的半无限空间共形映射为圆环域, 然后在该圆环域内运用解析函数理论, 代入该区域的边界条件从而求得解析函数的各项系数。在该法中, 隧道埋深只影响共形映射后圆环域的环壁厚度, 而解析区域依然保持圆形, 不会对函数解析产生影响, 这正是其它方法对于解决隧道变形问题所不具有的优势。此外, 半无限空间上无穷远处的点经共形映射后都成为了新平面上的一个点, 在理论上保证了边界的连续性, 这一优势可保证土体位移在无穷远处为零(符合实际情况), 避免了既有应力函数法为保证土体无穷远处位移为零而对解析解进行修正所导致物理意义不明确的缺陷。

在复变函数法方面, Verruijt^[14]采用该方法给出了隧道洞周在均布径向位移边界条件下的解。Verruijt^[15]给出了隧道洞周在均布径向应力条件下的复变函数解。王立忠等^[16]同样采用复变函数法给出了在 Park^[10]提出的隧道边界 4 种固定径向变形模式下边界条件的弹性解。韩凯航等^[18]基于复变函数法结合柯西-黎曼方程, 对隧道土体位移隐式解析解中的解析函数求导, 得出了土体位移函数的显式表达式。宋浩然等^[19]基于复变函数法求解了海底浅埋隧道的围岩应力场。实际上, 上述解法均未体现地层土体和隧道衬砌之间的相互作用协调变形关系, 不能计算衬砌变形。

本文基于隧道边界土体与衬砌的协调变形关系以及椭圆化变形的边界条件, 采用复变函数法求解了盾构隧道开挖引起的土体位移, 并对比实测数据以验证其可靠性和实用性; 此外, 由隧道边界土体和衬砌的位移协调变形关系, 求解了衬砌的径向和环向位移, 并获取了衬砌位移沿圆周的分布规律。

1 基本假设

在盾构隧道施工过程中, 从隧道开挖到衬砌的安装时间较为短暂, 孔隙水压力消散缓慢, 因此本文不

考虑隧道施工过程的排水状态, 现给出盾构隧道力学模型的基本假设:

- (1) 隧道在纵向上无限长, 满足平面应变条件。
- (2) 土体和衬砌均为各向同性均质弹性体。
- (3) 计算平面为只含有一个半径为 r_0 的圆孔的半无限空间平面。
- (4) 土体与衬砌之间存在空隙, 且二者在相互作用下发生协调变形。
- (5) 衬砌与土体之间无摩擦。

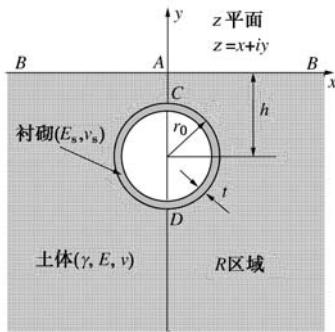


图 1 含一个圆孔的半无限空间

Fig. 1 Half plane with a circular hole

图 1 为在直角坐标系 z 平面上半无限平面隧洞的构形简图。图中, A 为坐标原点, B 为无穷远处的点, C 为隧道拱顶, D 为隧道拱底, h 为隧道轴线埋深, r_0 为衬砌外边缘的半径, R 区域为半无限空间中衬砌与土体接触面以外的区域。 γ 为土体的重度, E 为土体的弹性模量, ν 为土体的泊松比; t 为衬砌的厚度, E_s 为衬砌的弹性模量, ν_s 为衬砌的泊松比。

2 复变函数基本理论

2.1 解析函数和边界条件

根据 Muskhelishvili 平面问题复变函数解法^[28], 土体各位移分量可通过在 R 区域内的解析函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 表达出来。位移公式为

$$2G(U_x + iU_y) = \kappa \cdot \phi(z) - z \cdot \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (1)$$

式中, G 为土体剪切模量, U_x 为土体水平位移, U_y 为土体竖向位移, 本文计算问题为平面应变问题, 故取 $\kappa = 3 - 4\nu$, ν 为土体泊松比。在 z 平面地表 $z = \bar{z}$ 处, 土体无应力; 在衬砌与土体接触面 $|z + ih| = r_0$ 处有已知的位移, 则边界条件如下:

$$z = \bar{z} : \phi(z) + z \cdot \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} = 0, \quad (2)$$

$$|z + ih| = r_0 : 2G(U_x + iU_y) = \kappa \cdot \phi(z) \\ - z \cdot \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (3)$$

2.2 从 z 平面到 ζ 平面的共形映射

z 平面半无限空间中的单孔隧洞问题, 经过共形

映射公式变换, 转换为 ζ 平面上两个定直径圆环问题, 如图 2 所示, 共形映射公式为

$$z = \omega(\zeta) = ih \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}, \quad (4)$$

式中, $\alpha = (h - \sqrt{h^2 - r_0^2})/r_0$, $\omega(\zeta)$ 为解析函数。图 1 中 z 平面上的点 A , B , C , D 分别映射成为图 2 中 ζ 平面上的点 A' , B' , C' , D' , 衬砌与土体接触面 $|z + ih| = r_0$ 映射为圆环 $|\zeta| = \alpha$, 地表水平线 $z = \bar{z}$ 映射为圆环 $|\zeta| = 1$, R 区域映射为两个圆环域之间的 Θ 区域。

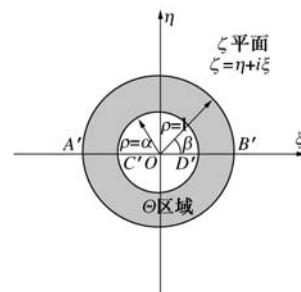


图 2 映射后区域

Fig. 2 Region after conformal mapping

2.3 解析函数在 ζ 平面上的 Laurent 级数展开

$\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在 R 区域内是解析函数, 因此, $\phi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 也是解析函数。 $\phi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 可展开成 Laurent 级数形式:

$$\phi(z) = \phi(\omega(\zeta)) = \phi(\zeta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k}, \quad (5)$$

$$\psi(z) = \psi(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \zeta^{-k}, \quad (6)$$

式中, a_0 , a_k , b_k , c_0 , c_k , d_k 均为待定系数, 其值由边界条件确定。

2.4 确定期数系数

由于 $z \cdot \overline{\phi'(z)} = \omega(\zeta) \cdot \overline{\phi'(\zeta)} / \overline{\omega'(\zeta)}$, 将 ζ 用复平面极坐标表示, 即 $\zeta = \rho \sigma$ (ρ 为 ζ 平面半径, $\sigma = \exp(i\beta)$), 则:

$$\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = -\frac{1}{2} \frac{(1 + \rho\sigma)(\sigma - \rho)^2}{(1 - \rho\sigma)\sigma^2}. \quad (7)$$

将边界条件从 z 平面转化到 ζ 平面上, 式 (2) 可改写为

$$|\zeta| = 1 : \phi(\zeta) + \omega(\zeta) \frac{\overline{\phi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} + \overline{\psi(\zeta)} = 0. \quad (8)$$

将式 (5) ~ (7) 代入式 (8) 解得

$$c_0 = -\bar{a}_0 - \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} b_1, \quad (9)$$

$$c_k = -\bar{b}_k + \frac{1}{2} (k-1)a_{k-1} - \frac{1}{2} (k+1)a_{k+1}, \\ k = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d_k &= -\bar{a}_k + \frac{1}{2}(k-1)b_{k-1} - \frac{1}{2}(k+1)b_{k+1}, \\ k &= 1, 2, 3, \dots \quad . \end{aligned} \quad (11)$$

式(3)可改写为

$$\begin{aligned} |\zeta| &= \alpha : \left[\kappa \cdot \phi(\zeta) - \omega(\zeta) \cdot \frac{\overline{\phi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} - \overline{\psi(\zeta)} \right] \Big|_{\zeta=\alpha\sigma} = \\ 2G(U_x + iU_y) &= f(\zeta) = f(\alpha\sigma) \quad . \end{aligned} \quad (12)$$

令 $f^*(\alpha\sigma) = (1-\alpha\sigma) \cdot f(\alpha\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sigma^k$, 将式(5)~

(7)、(9)~(11)代入式(12)中, 可解得

$$\begin{aligned} (1-\alpha^2)(k+1)\overline{a_{k+1}} - (\kappa \cdot \alpha^{-2k} + \alpha^2)b_{k+1} = \\ (1-\alpha^2)k\overline{a_k} - (1+\kappa \cdot \alpha^{-2k})b_k + A_{-k}\alpha^{-k}, \\ k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (1+\kappa \cdot \alpha^{2k+2})\overline{a_{k+1}} + (1-\alpha^2)(k+1)b_{k+1} = \\ \alpha^2(\alpha^2 + \kappa \cdot \alpha^{2k})\overline{a_k} + (1-\alpha^2)kb_k + \overline{A_{k+1}}\alpha^{k+1}, \\ k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

$$(1-\alpha^2)\bar{a}_1 - (\kappa + \alpha^2)b_1 = A_0 - (\kappa + 1)a_0, \quad (15)$$

$$(1+\kappa\alpha^2)\bar{a}_1 + (1-\alpha^2)b_1 = \bar{A}_1\alpha + \alpha^2(\kappa + 1)\bar{a}_0. \quad (16)$$

3 地层和衬砌变形复变函数解

3.1 隧道椭圆化变形模型及边界条件

Bonet^[8]认为土体变形主要由盾尾间隙和衬砌自收缩共同作用组成, Gonzalez 等^[29]认为, 在隧道开挖面土体变形主要由地层损失和非均匀收敛变形两部分组成, 其中, 地层损失导致洞周发生径向均匀收缩(隧道容积变化), 而非均匀收敛变形则导致发生椭圆化变形和整体下沉(无容积变化), 具体变形过程如图 3 所示, 图中 h 为隧道轴线埋深。

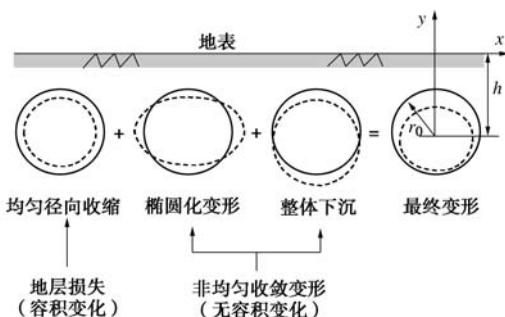


图 3 隧道边界椭圆化变形模式

Fig. 3 Oval deformation modes of tunnel boundary

本文在考虑土体与衬砌相互作用下, 参考 Gonzalez 等^[29]提出的隧道洞周变形模式, 将 Park^[10]的 BC-4 变形模式(图 3 中最终变形所示)运用到盾尾间隙的协调变形当中, 即将衬砌与土体接触面间的最终变形差统一为均匀径向收缩与椭圆化变形之和。与之对应采用图 4 中极坐标(以 O' 为原点)下的混合径向位移边界条件如下:

$$U_r \Big|_{r=r_0} - U_r^s \Big|_{r=r_0} = -\frac{1}{4}u_0(5 + 3\sin\theta' - 3\cos^2\theta') \quad . \quad (17)$$

式中, U_r 和 U_r^s 分别为土体和衬砌以 O' 为圆心的径向位移; r_0 为衬砌外边缘半径; u_0 为盾尾与衬砌的半径差, $u_0 = 0.5g$, g 为间隙参数^[26], 主要由物理间隙、盾构机前部土体的等效三维弹塑性变形和施工因素产生的土体损失等 3 部分组成。

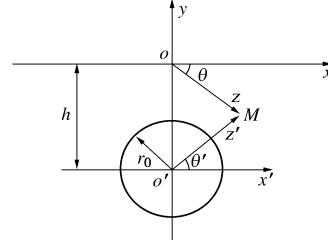


图 4 点位表示转换

Fig. 4 Transformation of point location

将 Flüegge^[30]提出的衬砌位移-应力关系引入边界条件可得到(满足假设: 衬砌厚度远小于隧道半径):

$$\frac{d^2U_{\theta'}^s}{d\theta'^2} + \frac{dU_r^s}{d\theta'} = -\frac{C(1-\nu^2)}{E}r_0\tau_{r\theta'}^s, \quad (18)$$

$$\frac{dU_{\theta'}^s}{d\theta'} + U_r^s + \frac{C}{F} \left(\frac{d^4U_r^s}{d\theta'^4} + 2\frac{d^2U_r^s}{d\theta'^2} + U_r^s \right) = \frac{C(1-\nu^2)}{E}r_0\sigma_r^s. \quad (19)$$

式中 $U_{\theta'}^s$ 和 U_r^s 分别为衬砌的环向和径向位移; σ_r^s 和 $\tau_{r\theta'}^s$ 分别为衬砌的径向应力和切应力; E 为土体的弹性模量; ν 为土体的泊松比; C 和 F 分别为衬砌的压缩比和柔性比, 其计算公式如下:

$$C = \frac{Er_0(1-\nu_s^2)}{E_s A_s(1-\nu^2)}, \quad (20)$$

$$F = \frac{Er_0^3(1-\nu_s^2)}{E_s I_s(1-\nu^2)}, \quad (21)$$

式中 E_s 为衬砌的弹性模量; ν_s 为衬砌的泊松比; A_s 为每延米衬砌圆环的截面面积; I_s 为每延米衬砌圆环对圆心 O' 的惯性矩。

由基本假设可知, 在衬砌与土体接触面上二者的应力有如下关系式:

$$\sigma_r \Big|_{r=r_0} = \sigma_r^s \Big|_{r=r_0}, \quad (22)$$

$$\tau_{r\theta'} \Big|_{r=r_0} = \tau_{r\theta'}^s \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (\text{无滑移}). \quad (23)$$

式中, σ_r 和 $\tau_{r\theta'}$ 分别为土体的径向应力和切应力; σ_r^s 和 $\tau_{r\theta'}^s$ 分别为衬砌的径向应力和切应力。

当 $r = r_0$ 时, 由式(17)、(18)、(19)、(22) 和 (23) 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^4U_r}{d\theta'^4} + 2\frac{d^2U_r}{d\theta'^2} + U_r = \left(1 + \frac{F}{C} \right) \left[-\frac{1}{4}u_0(5 + 3\sin\theta' \right. \\ \left. - 3\cos^2\theta') \right] + \frac{F(1-\nu^2)}{E}r_0\sigma_r. \end{aligned} \quad (24)$$

解式(24)中的微分方程并取其特解:

$$U_r = \left(1 + \frac{F}{C}\right) \cdot \left[-\frac{1}{4} u_0 (5 + 3 \sin \theta' - 3 \cos^2 \theta') \right] + \frac{F(1-\nu^2)}{E} r_0 \sigma_r \quad . \quad (25)$$

式中, σ_r 为衬砌和土体接触面上衬砌对土体的应力, $\sigma_r = \gamma(h - r_0 \sin \theta')$, 并将其代入式(25), 并且令 $m = 1 + F/C$ 和 $n = Fr_0(1-\nu^2)/E$, 最终解得

$$U_r \Big|_{r=r_0} = m \cdot \left[-\frac{1}{4} u_0 (5 + 3 \sin \theta' - 3 \cos^2 \theta') \right] + n \gamma (h - r_0 \sin \theta') \quad . \quad (26)$$

3.2 边界条件转换

由于本文采用复变函数法建立的 xoy 坐标系与 Park^[10]采用的 $x'o'y'$ 坐标系不同, 因此需将隧道洞周的位移边界条件进行统一转换。如图 4 所示, M 为 xoy 坐标系中的任意一点, 其点位可表示为 z , 点 M 在 $x'o'y'$ 坐标系中的点位可表示为 z' , 二者有如下关系:

$$z = z' - ih \quad . \quad (27)$$

当点 M 在隧道洞周时, 在两坐标系中分别表示为 z_c 和 z'_c , 显然二者满足式(27)。如图 4, 当点在隧道洞周时, 可建立如下关系式:

$$\begin{cases} \sin \theta' = \frac{z'_c - \bar{z}'_c}{2ir_0}, \\ \cos \theta' = \frac{z'_c + \bar{z}'_c}{2ir_0}, \end{cases} \quad (28)$$

$$z_c = \omega(\alpha\sigma) = -ih \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \frac{1+\alpha\sigma}{1-\alpha\sigma} \quad , \quad (29)$$

由式(27)~(29)可推出

$$\begin{cases} \sin \theta' = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} - \frac{(1-\alpha^2)^2}{2\alpha} \frac{1}{(1-\alpha\sigma)(1-\alpha\sigma^{-1})}, \\ \cos \theta' = \frac{i(1-\alpha^2)}{2} \frac{(\sigma^{-1}-\sigma)}{(1-\alpha\sigma)(1-\alpha\sigma^{-1})}. \end{cases} \quad (30)$$

把式(26)转化到图 1 所示的 z 平面上, 可得

$$U \Big|_{|z+ih|=r_0} = -\frac{1}{4} mu_0 \left(5 + 3 \cdot \frac{z_c - \bar{z}_c + 2ih}{2ir_0} - 3 \cdot \frac{z_c + \bar{z}_c}{2ir_0} \right) \cdot \frac{z_c + ih}{r_0} + n\gamma \left(h - r_0 \cdot \frac{z_c - \bar{z}_c + 2ih}{2ir_0} \right) \cdot \frac{z_c + ih}{r_0} \quad . \quad (31)$$

再将式(31)转化到图 2 所示的 ζ 平面上, 可得

$$U \Big|_{\rho=\alpha} = -\frac{1}{4} mu_0 \left\{ 5 + 3 \cdot \left[\frac{1+\alpha^2}{2\alpha} - \frac{(1-\alpha^2)^2}{2\alpha} \frac{1}{(1-\alpha\sigma)(1-\alpha\sigma^{-1})} \right] + \frac{3(1-\alpha^2)^2(\sigma^{-1}-\sigma)^2}{4(1-\alpha\sigma)^2(1-\alpha\sigma^{-1})^2} \right\} \cdot i \cdot \frac{\alpha-\sigma}{1-\alpha\sigma} + nr_0\gamma \cdot \frac{(1-\alpha^2)^2}{2\alpha} \cdot \frac{1}{(1-\alpha\sigma)(1-\alpha\sigma^{-1})} \cdot i \cdot \frac{\alpha-\sigma}{1-\alpha\sigma} \quad . \quad (32)$$

将式(32)代入式(12), 则:

$$\begin{aligned} f \cdot (\alpha\sigma) &= (1-\alpha\sigma) \cdot f(\alpha\sigma) = 2(1-\alpha\sigma)GU \Big|_{\rho=\alpha} \\ &= A_0 + A_1\sigma + \sum_{k=2}^{\infty} A_k\sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k}\sigma^{-k} \quad . \end{aligned} \quad (33)$$

则上式中各系数为

$$A_0 = -\left(\frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{5}{2}\alpha + \frac{3}{4}\right)mu_0Gi \quad , \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{7}{4} + \frac{9}{4}\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2 - \frac{3}{4}\alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha^4\right)mu_0Gi + \\ &\quad \left(2\alpha - \alpha^3 - \frac{1}{\alpha}\right)nr_0\gamma Gi \quad , \end{aligned} \quad (34b)$$

$$\begin{aligned} A_k &= -\frac{3}{8}(1-\alpha^2)^2\alpha^{k-3}[(k+1)\alpha^2 + (2-k) + \\ &\quad 2\alpha]mu_0Gi - (1-\alpha^2)^2\alpha^{k-2}nr_0\gamma Gi \quad , \end{aligned} \quad (34c)$$

$$A_{-k} = \frac{3}{8}(1-\alpha^2)^2\alpha^{k-1}mu_0Gi \quad . \quad (34d)$$

3.3 程序编制及地层变形复变函数解

由式(34)及 $0 < \alpha < 1$ 可推断, 当 k 无限增大时, A_k 和 A_{-k} 均趋向于零。则土体位移场的求解步骤(具体算法流程见图 5)如下:

(1) 取任一虚数为 α_0 的初始值, 并代入式(13)~(16)求得 a_k 和 b_k ;

(2) 当 k 大于等于某一整数时, 由对称性可知, $\overline{a_{k+1}} = -b_k$ 趋向于一个固定值 C , 由 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 是收敛级数可推出 $\lim \overline{a_{k+1}} = -\lim b_k = 0$, 因此, 将 $a_0 + C$ 作为新的 a_0 重新代入式(13)~(16)进行计算;

(3) 循环执行步骤(2)直至 C 趋于零(循环次数由 $C \leq 10^{-8}$ 确定), 取此时 α_0 的值为其初始值, 进而求得 a_k 和 b_k ;

(4) 将 a_0 , a_k 和 b_k 代入式(9)~(11)求得 c_k 和 d_k , 即解析函数 $\phi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 的各项系数得到确定, 并将式(4)代入解析函数 $\phi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 求得解析函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$;

(5) 将 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 代入式(1), 并根据对应的实部和虚部求得土体的水平和竖向位移(土体在无穷远处位移为零, 故各点位移应减去无穷远处位移)。

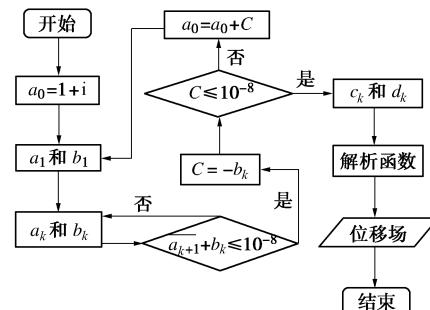


图 5 算法流程图

Fig. 5 Flow chart of algorithm

3.4 衬砌变形复变函数解

以隧道中心点为原点的土体径向位移 U_r 有如下关系:

$$U_r = U_x \cdot \cos \theta' + U_y \cdot \sin \theta' , \quad (35)$$

式中, U_x 和 U_y 分别为土体水平和竖向位移的复变函数解, 基于 3.3 节求解由式 (1) 确定。

由式 (17) 可知, 在 $r=r_0$ 处, 土体径向位移和衬砌径向位移之间存在对应关系, 由此可推出衬砌的径向位移 (取背向圆心为正) 为

$$\begin{aligned} U_r^s \Big|_{r=r_0} &= U_x \Big|_{r=r_0} \cdot \cos \theta' + U_y \Big|_{r=r_0} \cdot \sin \theta' + \\ &\frac{1}{4} u_0 (5 + 3 \sin \theta' - 3 \cos^2 \theta') , \end{aligned} \quad (36)$$

式中, u_0 为盾尾与衬砌的半径差, $u_0 = 0.5g$, g 为间隙参数。

在洞周切向上, 由于土体和衬砌无相对滑移, 因此二者的切向位移相同, 则衬砌的环向位移 (取顺时针为正) 为

$$U_{\theta'}^s \Big|_{r=r_0} = U_{\theta'} \Big|_{r=r_0} = U_x \Big|_{r=r_0} \cdot \sin \theta' - U_y \Big|_{r=r_0} \cdot \cos \theta' , \quad (37)$$

式中, $U_{\theta'}$ 为土体的切向位移。

4 现场实测数据对比

为验证上文计算理论的实用性和可靠性, 选取 5 条经典隧道^[5]的实测数据进行对比验证, 表 1 给出了这 5 条隧道的几何参数和物理参数。根据前文假定, 取土体的弹性模量 $E=E_u$ (不排水弹性模量), 泊松比 $\nu=0.5$; 衬砌的弹性模量 $E_s=25000$ MPa, 泊松比 $\nu_s=0.2$ 。

表 1 隧道的几何参数和物理参数

Table 1 Geometrical and physical parameters of tunnels

隧道名称	h/m	r_0/m	E_u /MPa	γ /(kN·m ³)	间隙参数 g/m	衬砌厚度 t/m	土质
Heathrow 隧道	19.0	4.250	35	19	0.058	0.3	伦敦硬黏土
Bangkok 隧道	18.5	1.330	20	17	0.081	0.1	软黏土到硬黏土
Thunder Bay 隧道	10.7	1.235	10	18	0.164	0.1	淤泥质软黏土
Green Park 隧道	29.4	2.070	40	19	0.034	0.1	伦敦黏土
Barcelona 隧道	10.0	4.000	25	18	0.031	0.3	含碎石硬黏土

表 2 7 种工况下的隧道参数取值

Table 2 Tunneling parameters of seven cases

工况	h/m	r_0/m	E_u /MPa	$\gamma/(kN\cdot m^3)$	间隙参数 g/m	衬砌厚度 t/m	衬砌压缩比 C	衬砌柔性比 F
工况 1(基本工况)	20.0	4.0	30	18	0.06	0.3	0.00085	0.00091
工况 2	10.0	4.0	30	18	0.06	0.3	0.00085	0.00091
工况 3	30.0	4.0	30	18	0.06	0.3	0.00085	0.00091
工况 4	20.0	2.5	30	18	0.06	0.3	0.00087	0.00098
工况 5	20.0	6.0	30	18	0.06	0.3	0.00084	0.00088
工况 6	20.0	4.0	30	18	0.06	0.1	0.00248	0.00254
工况 7	20.0	4.0	30	18	0.06	0.5	0.00052	0.00059

图 6 分别给出了表 1 中 5 条隧道由本文计算方法得到的地表沉降曲线, 并与 Park 法 (BC-4) 计算得到的曲线以及实测值进行对比分析。由图可以得出: ①本文计算方法所得曲线与实测数据趋势一致, 在隧道中轴线处的地表沉降值最大, 随着距中心线距离的增大, 沉降值逐渐减小, 且刚开始减小的速度较快, 达到转折点后减小趋势放缓; ②与 Park 法 (BC-4) 相比, 本文计算方法所得曲线在最大沉降值处与实测值更为接近, 而且虽然沉降槽宽度比 Park 法 (BC-4) 较大, 但收敛趋势一致, 并在无穷远处趋于零, 更符合实际情况。

5 地层变形影响因素分析

为研究土体和衬砌的材料特性及隧道的几何参数在本文土体位移理论计算中的影响作用, 设定 7 种工况, 其中工况 1 为基本参照工况, 其余 6 种工况各变化一种参数设置。为研究隧道埋深对开挖变形的影响, 对比工况 1 中 $h=20$ m, 工况 2 取 $h=10$ m, 工况 3 取 $h=30$ m, 其它参数不变; 为研究隧道半径对开挖变形的影响, 对比工况 1 中 $r_0=4.0$ m, 工况 4 取 $r_0=2.5$ m, 工况 5 取 $r_0=6.0$ m, 其它参数不变; 为研究衬砌厚度对开挖变形的影响, 对比工况 1 中 $t=0.3$ m, 工况 6 取 $t=0.1$ m, 工况 7 取 $t=0.5$ m, 其它参数不变。取土体的弹性模量 $E=E_u$ (不排水弹性模量), 泊松比 $\nu=0.5$; 衬砌弹性模量 $E_s=25000$ MPa, 泊松比 $\nu_s=0.2$ 。各工况参数详细取值见表 2。

基于这 7 种工况, 获取了不同工况下的土体相对地表沉降对比图和相对水平位移图, 见图 7。

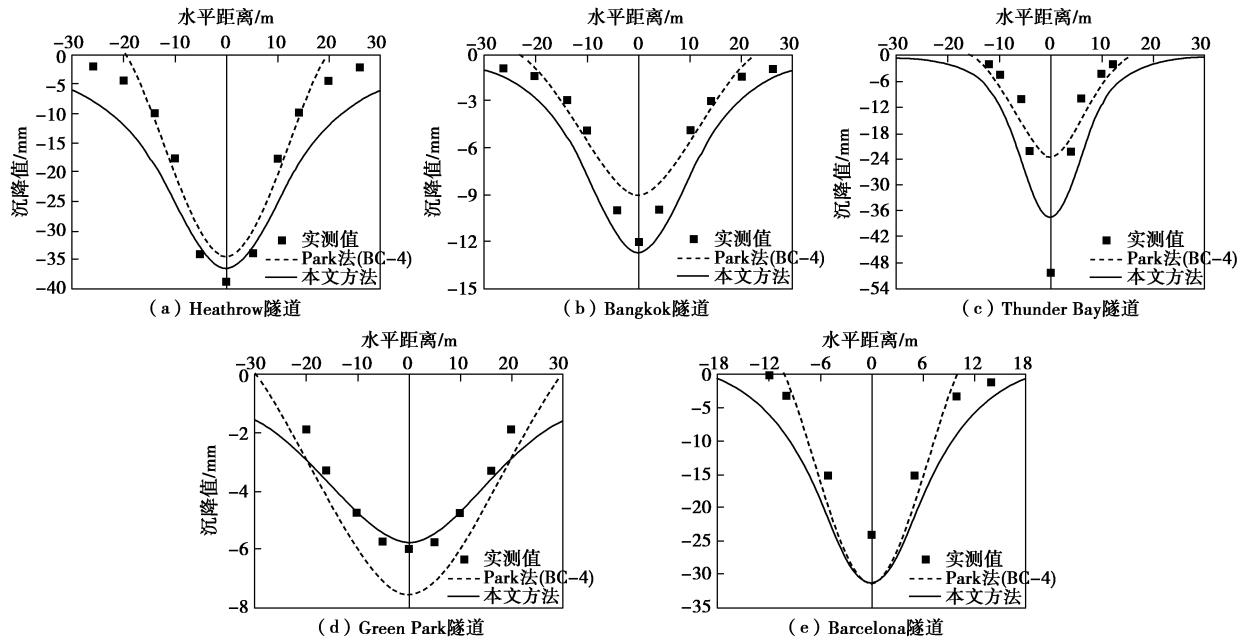


图 6 各隧道地表沉降对比

Fig. 6 Comparison of surface settlements of tunnels

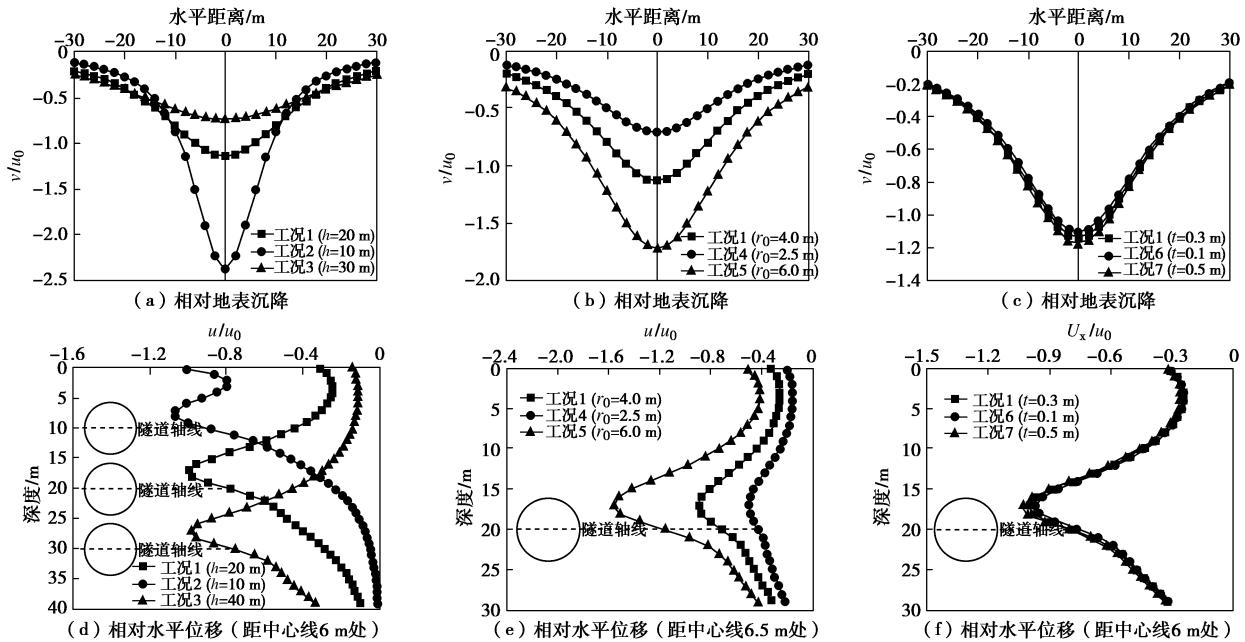


图 7 7 种工况下的相对土体位移对比

Fig. 7 Comparison of relative soil displacements in 7 cases

5.1 不同埋深参数分析

在隧道半径及其它参数不变的情况下,由图 7(a)可以得出:隧道埋深越浅,地表相对沉降槽宽度越窄,相对沉降值越大,但影响范围较窄;相反,埋深越深,地表相对沉降槽宽度越宽,相对沉降值越小,但影响范围较宽,且在近中心线区域,相对沉降值受埋深影响较大,在远中轴线区域受影响较小。由图 7(d)可以得出:隧道埋深越浅,土体相对水平位移绝对值在近地表区域偏大,相反,隧道埋深越深,土体相对水

平位移绝对值在近地表区域偏小,且均在接近隧道埋深深度处取得最大值,但最大值受埋深影响较小。综上,隧道埋深对土体的位移有着重要的影响。

5.2 不同半径参数分析

在隧道埋深及其参数不变的情况下,由图 7(b)和 7(e)可以得出:随着半径的增大,地表相对沉降值增加,且近中轴线区域内的沉降值增幅明显,随着距离中轴线距离的增大,增幅逐渐小;同时,土体的相对水平位移绝对值也随半径的增大而增加,且在最

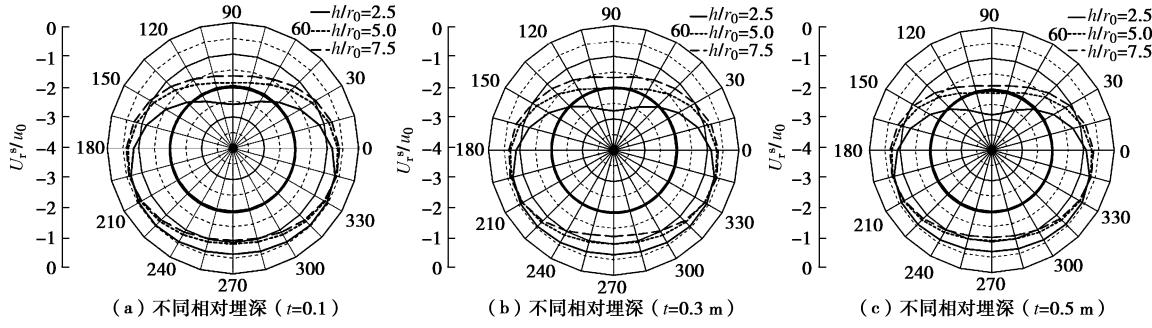


图8 衬砌相对径向位移

Fig. 8 Relative radial displacements of liner

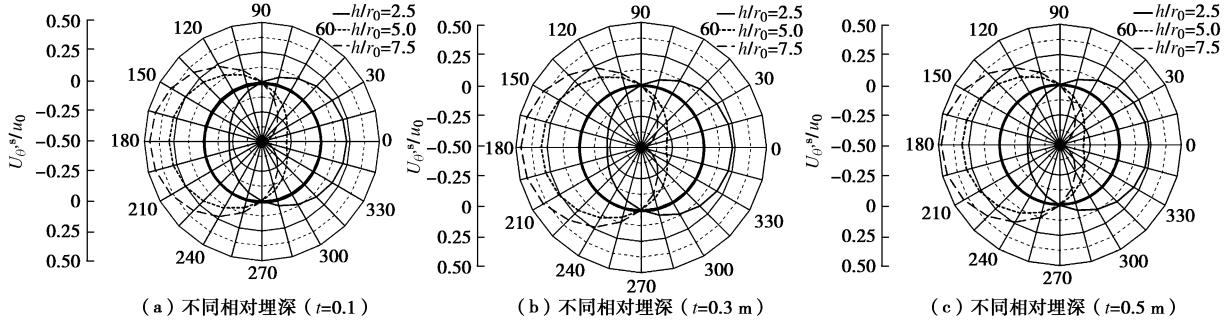


图9 衬砌相对环向位移

Fig. 9 Relative tangential displacements of liner

大值附近区域内增幅明显，并随着距离水平轴距离的增大，增幅逐渐放缓。综上，隧道半径对土体的位移有着重要的影响。

5.3 不同衬砌厚度参数分析

在隧道半径及其它参数不变的情况下，由图 7(c) 和 7(f) 可以得出：随着衬砌厚度的减小，土体相对沉降值减小，但减小幅度很小，只在近中心线区域内才可以看出变化；同样，土体相对水平位移的绝对值也随衬砌厚度减小而减小，且减幅很小，也只在最大值附近才可以看出变化。与前述埋深和衬砌半径参数相比，衬砌厚度参数对地层变形影响最小。其原因是由于衬砌的弹性模量远大于周围土体的弹性模量，使得在理论计算中衬砌几何参数变化效果很难得到体现。

6 衬砌变形影响因素分析

为研究衬砌厚度和相对埋深对衬砌位移的影响，绘制了衬砌厚度 t 分别为 0.1, 0.3, 0.5 m 时相对埋深 h/r_0 为 2.5, 5.0, 7.5 等情况（半径不变）下衬砌的径向和环向位移（见图 8(a) ~ (c) 图 9(a) ~ (c)），其它参数取值同表 2 中况 1。

图 8 为衬砌的相对径向位移图，由图可以看出，衬砌的径向位移为负值，即衬砌整体收缩，并且呈仰卧的鸭蛋形，拱顶和拱底被压扁，且拱顶相对位移绝对值明显大于拱底，表现为整体下沉，两边虽然也是

收缩变形，但其相对位移绝对值小于上、下两侧，表现为收缩之后又被压扁向左、右两侧突出，同时变形曲线严格关于 $90^\circ / 270^\circ$ 轴对称。由图 8(a) ~ (c) 可以看出，随着隧道相对埋深的减小，从 345° 延逆时针方向到 195° 范围内的衬砌相对径向位移绝对值增大，并在 90° 处增幅最大，同时，从 195° 延逆时针方向到 345° 范围内的衬砌相对径向位移绝对值减小，在 270° 处减幅最大，约为 90° 处增幅的 0.5 倍，整体表现为：随着隧道相对埋深的减小，衬砌变形曲线整体下沉，相反，随着相对埋深的增加，变形曲线整体上浮，推测这与隧道上覆土层形成的拱效应大小有关。同时，在不同衬砌厚度下，这种变化趋势一致且 3 条曲线的差值无明显变化。

图 9 为衬砌的相对环向位移图，由图可以看出，衬砌相对环向位移曲线呈侧立的苹果形，关于 $0^\circ / 180^\circ$ 轴对称，其绝对值关于 $90^\circ / 270^\circ$ 轴对称，两侧对称位置处的相对环向位移取值符号相反，即环向位移方向相反，同时在 90° 和 270° 处取值为 0。由图 9(a) ~ (c) 可以看出，当隧道相对埋深较浅时，中心线右侧衬砌相对环向位移指向顺时针方向，左侧指向逆时针方向；当隧道相对埋深较深时，中心线右侧衬砌相对环向位移指向逆时针方向，左侧指向顺时针方向，并均在 90° 和 270° 处取值为零。总体来说，当隧道相对埋深由浅变深时，衬砌相对环向位移绝对

值增大。此外，在不同衬砌厚度影响下，这种变化趋势基本一致。

7 结 论

(1) 本文提出了考虑衬砌和土体两种不同介质相互作用以及隧道椭圆化变形条件下隧道开挖问题的复变函数解法。在该法中，隧道埋深只影响共形映射后圆环域的环壁厚度，而解析区域依然保持圆形，不会对函数解析产生影响，具有其它方法对于解决隧道变形问题所不具有的优势；此外，半无限空间上无穷远处的点经共形映射后都成为了新平面上的一个点，理论上保证了边界的连续性，这一优势可保证土体位移在无穷远处为零，避免了既有应力函数法对解析解进行修正所导致物理意义不明确的缺陷。

(2) 随着隧道埋深的减小，近中轴线区域的上覆土体沉降量显著增大，远中轴线区域土体沉降量略微减小，衬砌的整体下沉增大，环向位移绝对值减小；随着隧道半径的增大，上覆土体沉降量明显增大，且在近中轴线区域增幅显著。即隧道埋深和半径对土体位移和衬砌变形有重要影响。

(3) 随着衬砌厚度的减小，近中轴线区域上覆土体沉降量减小，衬砌的径向和环向位移绝对值也减小，虽然减幅均较小，但仍不可忽略衬砌厚度对土体位移和衬砌变形的影响。

(4) 隧道衬砌相对径向位移变形曲线呈仰卧的鸭蛋形，且拱顶区域相对位移绝对值大于拱底区域，表现为椭圆化变形和整体下沉；衬砌环向位移曲线呈侧立的苹果形，关于 $0^\circ / 180^\circ$ 轴对称，其绝对值关于 $0^\circ / 180^\circ$ 轴对称，且在 90° 和 270° 处取值为零，当隧道埋深的增大时，相对环向位移绝对值也增大。

参 考 文 献：

- [1] MAIR R J, TAYLOR R N, BRACEGIRDLE A. Subsurface settlement profiles above tunnels in clays[J]. *Géotechnique*, 1993, **43**(2): 315 – 320.
- [2] CELESTINO T B, GOMES R, BORTOLUCCI A A. Errors in ground distortions due to settlement trough adjustment[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2000, **15**(1): 97 – 100.
- [3] 周济民, 何川, 方勇, 等. 黄土地层盾构隧道受力监测与荷载作用模式的反演分析[J]. 岩土力学, 2011, **32**(1): 165 – 171. (ZHOU Ji-min, HE Chuan, FANG Yong, et al. Mechanical property testing and back analysis of load models of metro shield tunnel lining in loess strata[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, **32**(1): 165 – 171. (in Chinese))
- [4] 张剑晨, 张项立, 张成平, 等. 北京地区浅埋暗挖法下穿施工既有隧道变形的特点及预测[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, **33**(5): 947 – 956. (ZHANG Jian-chen, ZHANG Ding-li, ZHANG Cheng-ping, et al. Deformation characteristics of existing tunnels induced by excavation of new shallow tunnel in Beijing[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, **33**(5): 947 – 956. (in Chinese))
- [5] LOGANATHAN N, POULOS H G. Analytical prediction for tunneling-induced ground movements in clays[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1998, **124**(9): 846 – 856.
- [6] 叶飞, 荀长飞, 陈治, 等. 盾构隧道同步注浆引起的地表变形分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(4): 618 – 624. (YE Fei, GOU Chang-fei, CHEN Zhi, et al. Ground surface deformation caused by synchronous grouting of shield tunnels[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, **36**(4): 618 – 624. (in Chinese))
- [7] 林存刚, 夏唐代, 梁荣柱, 等. 盾构掘进地面沉降虚拟镜像算法[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(8): 1438 – 1446. (LIN Cun-gang, XIA Tang-dai, LIANG Rong-zhu, et al. Estimation of shield tunneling-induced ground surface settlements by virtual image technique[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, **36**(8): 1438 – 1446. (in Chinese))
- [8] BOBET A. Analytical solutions for shallow tunnels in saturated ground[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2001, **127**(12): 1258 – 1266.
- [9] CHOU W I, BOBET A. Prediction of ground deformations in shallow tunnels in clays[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2002, **17**(1): 3 – 19.
- [10] PARK K H. Elastic solution for tunneling-induced ground movements in clays[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2004, **4**(4): 310 – 318.
- [11] PARK K H. Analytical solution for tunneling-induced ground movement in clays[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2005, **20**(3): 249 – 261.
- [12] PUZRIN A M, BURLAND J B, STANDING J R. Simple approach to predicting ground displacements caused by tunneling in undrained anisotropic elastic soil[J]. *Géotechnique*, 2012, **62**(4): 341 – 352.
- [13] 张治国, 白乔木, 赵其华. 带衬砌浅埋隧道开挖受非对称收敛变形影响的地层位移和衬砌应力分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, **35**(6): 1202 – 1213. (ZHANG Zhi-guo, BAI Qiao-mu, ZHAO Qi-hua. Elastic analysis of ground displacement and liner stress induced by shallow shield

- excavation considering non-uniform convergence deformation with liner[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, **35**(6): 1202 – 1213. (in Chinese))
- [14] VERRUIJT A. Complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half plane[J]. Géotechnique, 1997, **21**(4): 77 – 89.
- [15] VERRUIJT A. Deformations of an elastic half plane with a circular cavity[J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, **35**(21): 2795 – 2804.
- [16] 王立忠, 吕学金. 复变函数分析盾构隧道施工引起的地基变形[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(3): 319 – 327. (WANG Li-zhong, LÜ Xue-jin. A complex variable solution for different kinds of oval deformation around circular tunnel in an elastic half plane[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(3): 319 – 327. (in Chinese))
- [17] 苏 锋, 陈福全, 施有志. 深埋双隧洞开挖的解析延拓法求解[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, **31**(2): 365 – 374. (SU Feng, CHEN Fu-quan, SHI You-zhi. Analytic continuation solution of deep twin-tunnels[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, **31**(2): 365 – 374. (in Chinese))
- [18] 韩凯航, 张成平, 王梦恕. 浅埋隧道围岩应力及位移的显式解析解[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(12): 2253 – 2259. (HAN Kai-hang, ZHANG Cheng-ping, WANG Meng-shu. Explicit analytical solutions for stress and displacement of surrounding rock in shallow tunnels[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(12): 2253 – 2259. (in Chinese))
- [19] 宋浩然, 张顶立, 房 倩. 浅埋海底隧道的围岩应力解析解[J]. 土木工程学报, 2015, **48**(增刊1): 283 – 288. (SONG Hao-ran, ZHANG Ding-li, FANG Qian. Analytic solution on the stress of surrounding rocks for shallow subsea tunnel[J]. Chinese Civil Engineering Journal, 2015, **48**(S1): 283 – 288. (in Chinese))
- [20] 魏 纲, 徐日庆. 软土隧道盾构法施工引起的纵向地面变形预测[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(9): 1077 – 1081. (WEI Gang, XU Ri-qing. Prediction of longitudinal ground deformation due to tunnel construction with shield in soft soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(9): 1077 – 1081. (in Chinese))
- [21] 唐晓武, 朱 季, 刘 维. 盾构施工过程中的土体变形研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, **29**(2): 206 – 211. (TANG Xiao-wu, ZHU Ji, LIU Wei. Research on soil deformation during shield construction process[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, **29**(2): 206 – 211. (in Chinese))
- [22] 梁荣柱, 夏唐代, 林存刚, 等. 盾构推进引起地表变形及深层土体水平位移分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, **34**(3): 583 – 593. (LIANG Rong-zhu, XIA Tang-dai, LIN Cun-gang, et al. Analysis of ground surface displacement and horizontal movement of deep soils induced by shield advancing[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2015, **34**(3): 583 – 593. (in Chinese))
- [23] 施成华, 彭立敏, 刘宝琛. 盾构法施工隧道纵向地层位移与变形预计[J]. 岩土工程学报, 2003, **25**(5): 585 – 589. (SHI Cheng-hua, PENG Li-min, LIU Bao-chen. Prediction of longitudinal movement and deformation of stratum in longitudinal section due to tunnel construction by shield[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, **25**(5): 585 – 589. (in Chinese))
- [24] 刘庆潭, 阳军生, 刘宝琛, 等. 隧道开挖地表移动计算软件SASMD的开发[J]. 岩土力学, 2005, **26**(增刊): 234 – 238. (LIU Qing-tan, YANG Jun-sheng, LIU Bao-chen, et al. Development of software SASMD for determination of tunneling-induced ground surface movement[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, **26**(S0): 234 – 238. (in Chinese))
- [25] 蔡海兵, 彭立敏, 郑腾龙. 隧道水平冻结壁强制解冻期地表沉降的预测方法[J]. 2015, **36**(12): 3516 – 3530. (CAI Hai-bing, PENG Li-min, ZHENG Teng-long. A method for predicting ground surface settlement in the artificial thawing period of tunnel horizontally frozen wall[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(12): 3516 – 3530. (in Chinese))
- [26] LEE K M, ROWE R K, LO K Y. Subsidence owing to tunnelling. I. estimating the gap parameter[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1992, **29**(6): 929 – 940.
- [27] TIMOSHENKO P, GOODIER J N. Theory of elasticity[M]. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [28] MUSKHELISHVILI N I. Mathematical theory of elasticity[M]. Leyden: International Publishing, 1954.
- [29] GONZALEZ C, SAGASETA C. Patterns of soil deformations around tunnels-application to the extension of Madrid Metro[J]. Computers and Geotechnics, 2001, **28**(6): 445 – 468.
- [30] FLÜEGGE W. Stresses in shells[M]. New York: Springer-Verlag, 1973.