

DOI: 10.11779/CJGE201709007

# 基于时效理论解的双层衬砌圆形隧道围岩压力分担的简便计算法

王华宁<sup>1, 2</sup>, 宋 飞<sup>2</sup>, 蒋明镜<sup>1, 3</sup>

(1. 同济大学土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092;  
3. 同济大学土木工程学院地下建筑与工程系, 上海 200092)

**摘要:** 隧道的顺序施工叠加岩石流变特性, 使围岩和衬砌的力学状态与时间相关。针对水平和竖向地应力不相等的一般地应力条件下双层衬砌圆形隧道施工问题, 采用复变函数方法和 Laplace 变换, 推导了开挖和支护全施工过程任意时刻围岩、衬砌的位移和应力理论解答。理论推导中用任意黏弹性模型模拟岩石流变特性, 并在隧道开挖完成后的任意时刻分别施加一次衬砌、二次衬砌。并与相同条件下有限元解进行了比对。为便于工程设计, 基于本文时效理论解, 通过衬砌压力的机理分析, 运用数据拟合的方法, 给出了围岩压力分担的简便计算法, 公式形式简单、适用范围广, 同时也可以实现解析解的类似精度, 为科学合理确定二次衬砌施工方案提供了理论依据。结合一算例, 针对不同围岩压力分担情况, 分别给出二衬施加时刻和二衬厚度建议值。工程中可据此方便、快捷地进行相似工程条件下的初步设计。

**关键词:** 衬砌隧道; 黏弹性; 二次衬砌; 围岩压力分担

中图分类号: TU45; U45 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2017)09-1600-09

作者简介: 王华宁(1975-), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程中的数值与解析方法。E-mail: wanghn@tongji.edu.cn。

## Simple method for supporting pressure determination of double-liner circular tunnels excavated in rheological rock

WANG Hua-ning<sup>1, 2</sup>, SONG Fei<sup>2</sup>, JIANG Ming-jing<sup>1, 3</sup>

(1. State Key Lab of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. Department of Geotechnical Engineering, College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The time-dependency in tunneling is mainly due to the tunnel construction processes and rheological properties of the rock. By using the complex potential theory and Laplace transform technique, analytical solutions are derived for the double-liner circular tunnels constructed in rheological rock subjected to non-hydrostatic initial stresses. In the derivation, several linear viscoelastic models are adopted to analyze the rheological properties of the host rock, and the first and secondary liners are sequentially installed at any time after the excavation. The solutions are validated by finite element analyses. Based on the analytical solutions, a simple method for determination of supporting pressure provided by the two liners is proposed by using the data fitting method. The result shows that the fitting precision is very high. The formulas for supporting pressure herein are very simple, and very convenient for using in the engineering. This method gives an optional way in the design of the secondary linings. Using this method, the suggested installation time and thickness of the secondary linings corresponding to different values of supporting pressure are provided for a specified example. The solutions in this paper provide a much convenient way for the preliminary design of tunnel construction.

**Key words:** lined tunnel; rheological rock; secondary lining; sharing of rock pressure

叠加, 使围岩和衬砌的力学状态与时间相关。为了隧

## 0 引言

隧道施工是一个长期过程, 包括开挖和支护过程。当考虑岩土体流变特性时, 流变时效和施工过程

基金项目: 国家自然科学基金项目(11572228, 51639008); 国家“973”重点基础研究发展计划(2014CB046901); 同济大学土木工程防灾国家重点实验室自主课题(SLDRCE14-B-11)

收稿日期: 2016-06-01

道安全、美观, 一般要在不同时间分别进行两次支护, 而支护时机将直接影响隧道的安全和经济。只有考虑施工过程和岩土体时效特性, 才能正确预估支护压力, 给出经济合理的支护时间、衬砌刚度等参数。

经过长期监测证明, 一次、二次衬砌均承担一定荷载, 应该当作承载结构进行设计<sup>[1]</sup>。实际工程中, 围岩和衬砌通过相互作用共同承担围岩压力, 利用围岩-衬砌耦合分析可以给出更真实的支护压力。目前双层衬砌的深埋隧道理论分析中, Naggar 等<sup>[2]</sup>考虑双层衬砌为弹性模量不同的复合材料, 给出了围岩-衬砌、衬砌-衬砌接触面光滑和完全接触不同情况下位移与应力的弹性解。Mason 等<sup>[3]</sup>考虑无穷远处受到双向剪切地应力, 给出双层衬砌圆形隧道的弹性理论解。弹性解答虽然可以初步估测隧道结构的力学状态, 但是没有考虑到岩石的流变特性, 具有一定的局限性。流变岩土体中双层衬砌隧道路理论解, 大多针对双向等地应力的轴对称问题。王祥秋等<sup>[4]</sup>基于软弱围岩的蠕变损伤机理, 利用位移反分析方法研究圆形巷道的黏弹性变形规律, 确定合理的二次支护时机。Wang 等<sup>[5-6]</sup>针对黏弹性岩体中双层、多层衬砌圆形隧道的施工问题, 利用拉普拉斯变换和逆变换, 给出轴对称问题的黏弹性理论解。李之达等<sup>[7]</sup>利用黏弹性理论, 研究了围岩和衬砌结构时间相依的应力与位移, 给出了不同荷载分担比下二次衬砌的受力与变形。李英明等<sup>[8]</sup>考虑二衬支护时间和强度上与围岩特性之间的耦合问题, 结合软岩巷道流变数学力学模型, 给出了二次衬砌最佳支护时间的理论公式。以上分析均针对双向等地应力问题, 只存在径向均布支护压力, 求解相对简单。对实际工程中水平和竖向地应力不相等问题, 径向支护力随角度不再均匀分布, 并且存在切向支护力, 且二者均为时间的函数, 这类情况下围岩和衬砌受力与轴对称问题有根本不同。

本文针对水平和竖向地应力不等的一般地应力条件, 对围岩-衬砌、衬砌-衬砌进行真实相互作用分析, 针对常见的双层衬砌圆形断面隧道, 考虑围岩黏弹性流变特性, 尝试给出开挖和支护全施工过程围岩、衬砌的理论解; 推导中用任意黏弹性模型模拟岩石流变特性, 并在任意时刻分别施加一次衬砌、二次衬砌。理论解可以揭示各参量影响, 但是, 由于问题复杂造成理论解冗长。因此, 本文将围岩模拟为广义 Kelvin 模型岩体, 基于理论解获得海量数据, 并分析支护压力随参量变化关系, 通过数据拟合得到一衬支护压力和二衬支护压力的最大值及其比值与围岩、衬砌等参数的简便拟合公式, 可以方便工程应用。

## 1 力学模型与黏弹性问题求解方法

本文针对流变岩体中深埋圆形隧道(例如水工、交通隧道或煤炭巷道)的施工进行力学分析; 考虑两层衬砌(或钢拱架)与围岩的相互作用。针对围岩较好, 未发生较大区域破坏, 尚处于小变形阶段的情况。理论推导中假定: ①隧道埋置较深, 可忽略重力梯度效应<sup>[9]</sup>; 竖向和水平地应力分别为  $p_0$ ,  $\lambda p_0$ ,  $\lambda$  为侧压力系数。对存在剪切地应力情况, 可认为其主应力为  $p_0$ ,  $\lambda p_0$ , 将本文中坐标轴转至主方向, 则文中解答也可适用。②为考虑岩石与时间相关的流变效应, 将围岩视为均匀、各向同性黏弹性材料。图 1 给出了 3 种常见的黏弹性模型。③两层衬砌均处于弹性阶段。④围岩-衬砌、衬砌-衬砌之间没有相对滑移。

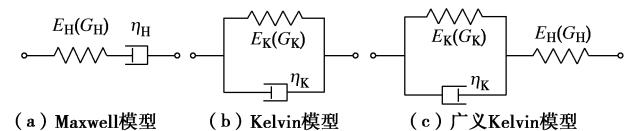


图 1 黏弹性模型图

Fig. 1 Viscoelastic physical models

隧洞断面在  $t=0$  时刻开始开挖, 认为断面一次开挖完成, 在后续研究中将考虑隧道断面分部开挖的情况。开挖完成后  $t=t_1$  时刻施加一次衬砌(一衬),  $t=t_2$  时刻施加二次衬砌(二衬),  $t=t_3$  时刻在二衬内边界施加内压(模拟水压)。本文认为掌子面推进较快, 不考虑纵向开挖造成的三维影响, 因此可简化为平面应变问题, 力学模型和坐标系如图 2 所示。 $r, \theta$  为极坐标, 一衬和二衬厚度分别为:  $d_1=R_1-R_2$ ,  $d_2=R_2-R_3$ 。理论推导基于弹性力学的小变形假设, 并且符号规定与弹性力学相同: 即拉应力为正、与极坐标方向一致的位移为正。

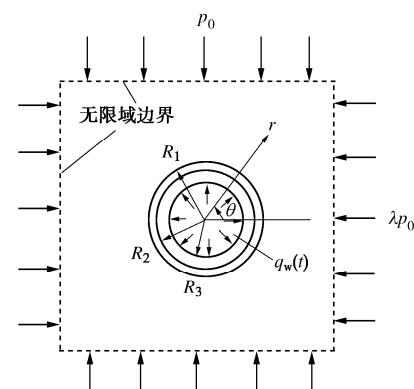


图 2 力学模型

Fig. 2 Mechanical model

为得到全施工过程的时效理论解, 本文将采用复变函数理论结合 Laplace 变换方法进行求解<sup>[10]</sup>。针对

一般问题, 若  $\phi^{(k)}$  和  $\psi^{(k)}$  为第  $k$  组外载对应的两个黏弹性复位势, 文献[11]针对应力边值问题, 给出黏弹性位移( $u_x^{(k)v}$  和  $u_y^{(k)v}$ ), 应力( $\sigma_x^{(k)v}$ ,  $\sigma_y^{(k)v}$ ,  $\sigma_{xy}^{(k)v}$ )与复位势  $\phi^{(k)}$ ,  $\psi^{(k)}$  的关系:

$$\begin{aligned} u_x^{(k)v}(z, t) + i u_y^{(k)v}(z, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2s\hat{G}(s)} \right. \\ &\quad \left. \mathcal{L} \left[ \mu(s)\phi^{(k)}(z, t) - z \frac{\partial\phi^{(k)}(z, t)}{\partial z} - \psi^{(k)}(z, t) \right] \right\}, \quad (1) \\ \begin{cases} \sigma_x^{(k)v}(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ 2 \left[ \frac{\partial\phi^{(k)}(z, t)}{\partial z} \right] \mp \left[ z \frac{\partial^2\phi^{(k)}(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi^{(k)}(z, t)}{\partial z} \right] \right\}, \\ \sigma_y^{(k)v}(z, t) = \operatorname{Im} \left\{ z \frac{\partial^2\phi^{(k)}(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi^{(k)}(z, t)}{\partial z} \right\}, \\ \sigma_{xy}^{(k)v}(z, t) = \operatorname{Im} \left\{ z \frac{\partial^2\phi^{(k)}(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi^{(k)}(z, t)}{\partial z} \right\}. \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

式中,  $z=x+iy$  为位置复变量,  $\mathcal{L}[\cdot]$ (或  $\hat{\cdot}$ )和  $\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$  分别表示对  $[\cdot]$  的 Laplace 变换和逆变换, 其定义为

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad \mathcal{L}^{-1}[\hat{f}(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \hat{f}(s) e^{st} dt;$$

( $\bar{\cdot}$ ) 表示共轭;  $G(t)$ ,  $K(t)$  分别为黏弹模型的剪切和体积松弛模量;  $\mu(s) = \frac{3\hat{K}(s) + 7\hat{G}(s)}{3\hat{K}(s) + \hat{G}(s)}$ 。当仅考虑偏量

具有黏弹效应, 而球量仍满足弹性关系时(即  $K(t) = K_e$ ), Maxwell 模型、Kelvin 模型和广义 Kelvin 模型的剪切松弛模量见表 1。

表 1 剪切松弛模量

Table 1 Shear relaxation moduli for viscoelastic models

黏弹性模型	Maxwell 模型	Kelvin 模型	广义 Kelvin 模型
剪切松弛模量 $G(t)$	$G_H e^{-\frac{G_H}{\eta_H} t}$	$G_K + \eta_K \delta(t)$	$\frac{G_H}{G_H + G_K} \cdot \frac{G_H + G_K}{(G_H e^{-\frac{G_H + G_K}{\eta_K} t} + G_K)}$

假设  $l$  组外载分别在  $t=t_{b1}, t_{b2}, \dots, t_{bl}$  时刻开始作用于结构, 并分别在  $t=t_{m1}, t_{m2}, \dots, t_{ml}$  时刻移除, 根据黏弹性问题叠加原理<sup>[12]</sup>和卷积的 Laplace 变换性质,  $t$  ( $t \geq t_{bl}$ ) 时刻的总响应为之前所有荷载分别作用于结构而引发的在  $t$  时刻响应的叠加, 由式(1),  $l$  组外载作用产生的总位移为

$$\begin{aligned} u_x^v(z, t) + i u_y^v(z, t) &= \sum_{k=1}^l u_x^{(k)v}(z, t) + i \sum_{k=1}^l u_y^{(k)v}(z, t) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \int_{t_{bk}}^{T_k} I(t-\tau) \phi^{(k)}(z, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \int_{t_{bk}}^{T_k} H(t-\tau) \cdot \\ &\quad \left[ z \frac{\partial\phi^{(k)}(z, \tau)}{\partial z} + \psi^{(k)}(z, \tau) \right] d\tau, \quad (3) \end{aligned}$$

其中,  $T_k = \min\{t_{mk}, t\}$ ,  $H(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s\hat{G}(s)} \right]$ ,  $I(t) =$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mu(s)}{s\hat{G}(s)} \right].$$

由式(2),  $l$  组外载作用产生的总应力为

$$\begin{cases} \sigma_x^v(z, t) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^l \left\{ 2 \left[ \frac{\partial\phi^{(k)}(z, t)}{\partial z} \right] \mp \left[ z \frac{\partial^2\phi^{(k)}(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi^{(k)}(z, t)}{\partial z} \right] \right\} \right], \\ \sigma_y^v(z, t) = \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=1}^l \left[ z \frac{\partial^2\phi^{(k)}(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi^{(k)}(z, t)}{\partial z} \right] \right], \\ \sigma_{xy}^v(z, t) = \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=1}^l \left[ z \frac{\partial^2\phi^{(k)}(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi^{(k)}(z, t)}{\partial z} \right] \right]. \end{cases} \quad (4)$$

## 2 时效理论解推导

### 2.1 围岩、衬砌位移与应力的复位势表达

施加一衬后( $t_1 \leq t < t_2$ ), 围岩与一衬接触处产生一次支护面力。施加二衬后( $t \geq t_2$ ), 围岩与一衬、一衬与二衬接触处产生二次支护面力。 $m$  次( $m=1, 2$ ) 支护面力单独作用于围岩洞口时围岩对应的复位势为  $\phi_R^{(m)}(z, t)$  和  $\psi_R^{(m)}(z, t)$ ; 而此时  $n$  次( $n=1, 2$ ) 衬砌结构对应的复位势为  $\phi_{S(n)}^{(m)}(z, t)$ ,  $\psi_{S(n)}^{(m)}(z, t)$ 。可用罗朗级数表示如上 4 个复位势。

支护面力作用下, 围岩对应的复位势为

$$\begin{cases} \phi_R^{(m)}(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(m)}(t) z^{-k}, \\ \psi_R^{(m)}(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(m)}(t) z^{-k}. \end{cases} \quad (5)$$

支护面力作用下, 衬砌结构的复位势为

$$\begin{cases} \phi_{S(n)}^{(m)}(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k(n)}^{(m)}(t) z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} d_{k(n)}^{(m)}(t) z^k, \\ \psi_{S(n)}^{(m)}(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e_{k(n)}^{(m)}(t) z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{k(n)}^{(m)}(t) z^k. \end{cases} \quad (6)$$

其中  $a_k^{(m)}(t)$ ,  $b_k^{(m)}(t)$ ,  $c_{k(n)}^{(m)}(t)$ ,  $d_{k(n)}^{(m)}(t)$ ,  $e_{k(n)}^{(m)}(t)$ ,  $f_{k(n)}^{(m)}(t)$  ( $m=1, 2$ ;  $n=1, 2$ ;  $k=1, \dots, \infty$ ) 为与时间相关的待定系数。

施加衬砌之后, 由于衬砌尚处弹性阶段, 根据复变函数理论可得衬砌( $n=1, 2$  分别表示一衬结构和二衬结构)位移和应力的表达式。

$$\begin{aligned} \text{位移 } u_{S\theta(n)}^{(m)}(z, t) + i u_{S\theta(n)}^{(m)}(z, t) &= \frac{e^{-i\theta}}{2G_{S(n)}} \cdot \\ &\quad \left[ K_{S(n)} \phi_{S(n)}^{(m)}(z, t) - z \frac{\partial\phi_{S(n)}^{(m)}(z, t)}{\partial z} - \psi_{S(n)}^{(m)}(z, t) \right], \quad (7) \end{aligned}$$

应力:

$$\begin{cases} \sigma_{S\theta(n)}^{(m)}(z, t) = \operatorname{Re} \left[ 2 \left[ \frac{\partial\phi_{S(n)}^{(m)}(z, t)}{\partial z} \right] \mp \left[ z \frac{\partial^2\phi_{S(n)}^{(m)}(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi_{S(n)}^{(m)}(z, t)}{\partial z} \right] e^{2i\theta} \right], \\ \sigma_{S\theta(n)}^{(m)}(z, t) = \operatorname{Im} \left[ \left[ z \frac{\partial^2\phi_{S(n)}^{(m)}(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial\psi_{S(n)}^{(m)}(z, t)}{\partial z} \right] e^{2i\theta} \right]. \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $G_{S(n)}$ ,  $K_{S(n)}$  分别为一衬结构 ( $n=1$ ) 和二衬结构 ( $n=2$ ) 的剪切、体积模量。

一衬支护阶段 ( $t_1 \leq t < t_2$ ), 根据黏弹性叠加原理<sup>[12]</sup>, 此阶段围岩位移可叠加得到

$$u_{Rr}(z, t) + iu_{R\theta}(z, t) = u_{Rr}^{ex}(z, t) + u_{Rr}^{(1)}(z, t) + i[u_{R\theta}^{ex}(z, t) + u_{R\theta}^{(1)}(z, t)] \quad , \quad (9)$$

其中,  $u_{Rr}^{ex}(z, t) + iu_{R\theta}^{ex}(z, t)$  为开挖效应产生的围岩位移:

$$u_{Rr}^{(1)}(z, t) + iu_{R\theta}^{(1)}(z, t) = \frac{e^{-i\theta}}{2} \left\{ \int_{t_1}^t I(t-\tau) \phi_R^{(1)}(z, \tau) d\tau - \int_{t_1}^t H(t-\tau) \left[ z \frac{\partial \phi_R^{(1)}(z, \tau)}{\partial z} + \psi_R^{(1)}(z, \tau) \right] d\tau \right\} \text{, 为一次支护面力单独作用时产生的围岩位移。}$$

施加二衬后 ( $t \geq t_2$ ), 围岩受地应力和二次支护面力两组荷载作用, 根据黏弹性叠加原理<sup>[12]</sup>, 围岩位移可叠加得到

$$u_{Rr}(z, t) + iu_{R\theta}(z, t) = u_{Rr}^{ex}(z, t) + u_{Rr}^{(1)}(z, t) + u_{Rr}^{(2)}(z, t) + i[u_{R\theta}^{ex}(z, t) + u_{R\theta}^{(1)}(z, t) + u_{R\theta}^{(2)}(z, t)] \quad , \quad (10)$$

其中,

$$u_{Rr}^{(2)}(z, t) + iu_{R\theta}^{(2)}(z, t) = \frac{e^{-i\theta}}{2} \left\{ \int_{t_2}^t I(t-\tau) \phi_R^{(2)}(z, \tau) d\tau - \int_{t_2}^t H(t-\tau) \left[ z \frac{\partial \phi_R^{(2)}(z, \tau)}{\partial z} + \psi_R^{(2)}(z, \tau) \right] d\tau \right\} \text{, 为二次支护面力单独作用时产生的围岩位移。}$$

此时,

$$u_{Rr}^{(1)}(z, t) + iu_{R\theta}^{(1)}(z, t) = \frac{e^{-i\theta}}{2} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} I(t-\tau) \phi_R^{(1)}(z, \tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} H(t-\tau) \left[ z \frac{\partial \phi_R^{(1)}(z, \tau)}{\partial z} + \psi_R^{(1)}(z, \tau) \right] d\tau \right\} \text{。}$$

可见, 围岩位移与一衬和二衬支护时刻等参数均相关。由于  $m$  次 ( $m=1, 2$ ) 支护面力作用, 围岩产生的增量应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{Rr}^{(m)}(z, t) &= \operatorname{Re} \left[ 2 \left[ \frac{\partial \phi_R^{(m)}(z, t)}{\partial z} \right] \mp \left[ \frac{-\partial^2 \phi_R^{(m)}(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_R^{(m)}(z, t)}{\partial z} \right] e^{2i\theta} \right], \\ \sigma_{R\theta}^{(m)}(z, t) &= \operatorname{Im} \left[ \left[ \frac{-\partial^2 \phi_R^{(m)}(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_R^{(m)}(z, t)}{\partial z} \right] e^{2i\theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

施加衬砌后围岩应力  $\sigma_{Rr}$ ,  $\sigma_{R\theta}$  和  $\sigma_{Rr\theta}$  即为开挖阶段围岩应力与支护面力作用下围岩应力 (式 (9)) 的叠加。可见, 只要求得 (3)、(4) 中的待定系数, 即可获得围岩和衬砌在施加衬砌后的应力和位移场。本文根据边界条件和协调条件进行复位势待定项系数的

求解。

## 2.2 开挖和一衬阶段 ( $0 \leq t < t_2$ ) 的位移与应力

衬砌施加之前 ( $0 \leq t < t_1$ ) 为开挖时段, 若去除开挖前初始地应力作用下的位移, 可得用复变量表达的开挖增量位移如下<sup>[11, 13]</sup>:

$$u_{Rr}^{ex}(z, t) + iu_{R\theta}^{ex}(z, t) = \frac{1}{4} e^{-i\theta} \left[ A_1(t)(1-\lambda) \frac{z}{\bar{z}^2} - A_1(t) \cdot (1+\lambda) \frac{1}{\bar{z}} + A_2(t)(1-\lambda) \frac{1}{z} - A_3(t)(1-\lambda) \frac{1}{\bar{z}^3} \right] \text{,} \quad (12)$$

其中  $z = r e^{i\theta}$ ,  $A_1(t) = \int_0^t H(t-\tau) p_0 R_1^2 d\tau$ ,  $A_2(t) =$

$$\int_0^t I(t-\tau) p_0 R_1^2 d\tau \text{, } A_3(t) = \int_0^t H(t-\tau) p_0 R_1^4 d\tau \text{。}$$

开挖阶段围岩全应力如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{Rr}^{ex}(z, t) &= -\frac{(\lambda+1)p_0}{2} \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) - \frac{(\lambda-1)p_0}{2} \cdot \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \left( 1 - \frac{3R_1^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \text{,} \\ \sigma_{R\theta}^{ex}(z, t) &= -\frac{(\lambda+1)p_0}{2} \left( 1 + \frac{R_1^2}{r^2} \right) + \frac{(\lambda-1)p_0}{2} \cdot \left( 1 + \frac{3R_1^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \text{,} \\ \sigma_{Rr\theta}^{ex}(z, t) &= \frac{(\lambda-1)p_0}{2} \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \left( 1 + \frac{3R_1^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \text{。} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

一衬阶段 ( $t_1 \leq t < t_2$ ), 利用平面复变函数方法和 Laplace 变换给出复位势表达的边界条件和协调条件, 运用时间坐标轴平移和 Laplace 卷积性质对位移协调条件进行简化, 最终确定了一次支护面力作用下围岩与衬砌对应的复位势<sup>[14]</sup>。将复位势代入式 (5)~(7)、(9), 可以得到一次支护面力作用下围岩和衬砌的位移、应力表达。由黏弹性问题叠加关系, 式 (10)、(11) 叠加一次支护面力作用下围岩的位移、应力, 可以得到一衬阶段围岩的位移、应力表达式。文献[14]给出了开挖阶段和一衬阶段任意时刻围岩与衬砌的位移和应力理论解答, 并与有限元结果进行了比对。

本文重点介绍二衬阶段围岩和衬砌的位移、应力解答及基于理论解的简便计算法, 一衬阶段的具体求解过程, 在此不详细展开, 具体思路可以参考文献[14]。

## 2.3 二衬阶段 ( $t \geq t_2$ ) 复位势系数的确定

施加二衬之后, 二次衬砌内边界 ( $r = R_3$ ) 的应力边界条件为  $\sigma_{S(2)}^{(2)}(z, t)|_{z=R_3 e^{i\theta}} = -q_w(t)$  和  $\sigma_{S\theta(2)}^{(2)}(z, t)|_{z=R_3 e^{i\theta}} = 0$ , 即

$$\left\{ 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \phi_{S(2)}^{(2)}(z, t)}{\partial z} \right] - e^{2i\theta} \left[ \bar{z} \cdot \frac{\partial^2 \phi_{S(2)}^{(2)}(z, t)}{\partial z^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{\partial \psi_{S(2)}^{(2)}(z, t)}{\partial z} \right] \right\}_{z=R_3 e^{i\theta}} = -q_w(t) \quad . \quad (14)$$

一衬与二衬接触处 ( $r = R_2$ ) 的应力协调条件为  
 $\left. \left\{ \sigma_{Sr(1)}^{(2)}(z, t) - \sigma_{Sr(2)}^{(2)}(z, t) \right\} \right|_{z=R_2 e^{i\theta}} = 0 \quad \text{和} \quad \left. \left\{ \sigma_{Sr\theta(2)}^{(2)}(z, t) - \sigma_{Sr\theta(2)}^{(2)}(z, t) \right\} \right|_{z=R_2 e^{i\theta}} = 0, \quad \text{即}$

$$\left. \left\{ \phi_{S(1)}^{(2)}(z, t) + z \frac{\overline{\partial \phi_{S(1)}^{(2)}(z, t)}}{\partial z} + \overline{\psi_{S(1)}^{(2)}(z, t)} - \phi_{S(2)}^{(2)}(z, t) - z \frac{\overline{\partial \phi_{S(2)}^{(2)}(z, t)}}{\partial z} - \overline{\psi_{S(2)}^{(2)}(z, t)} \right\} \right|_{z=R_2 e^{i\theta}} = 0. \quad (15)$$

一衬与二衬接触处 ( $r = R_2$ ) 位移协调条件为  
 $\left. \left\{ u_{Sr(1)}^{(2)}(z, t) + iu_{Sr(1)}^{(2)}(z, t) - \left[ u_{Sr(1)}^{(1)}(z, t_2) + iu_{Sr(1)}^{(1)}(z, t_2) \right] \right\} \right|_{z=R_2 e^{i\theta}} = 0$

$$\begin{aligned} &= \left. \left\{ u_{Sr(2)}^{(2)}(z, t) + iu_{Sr(2)}^{(2)}(z, t) \right\} \right|_{z=R_2 e^{i\theta}}, \quad \text{即} \\ &= \frac{e^{-i\theta}}{2G_{S(1)}} \left[ \kappa_{S(1)} \phi_{S(1)}^{(2)}(z, t) - z \frac{\overline{\partial \phi_{S(1)}^{(2)}(z, t)}}{\partial z} - \overline{\psi_{S(1)}^{(2)}(z, t)} \right] \\ &- \frac{e^{-i\theta}}{2G_{S(1)}} \left[ \kappa_{S(1)} \phi_{S(1)}^{(1)}(z, t_2) - z \frac{\overline{\partial \phi_{S(1)}^{(1)}(z, t_2)}}{\partial z} - \overline{\psi_{S(1)}^{(1)}(z, t_2)} \right] \\ &= \frac{e^{-i\theta}}{2G_{S(2)}} \left[ \kappa_{S(2)} \phi_{S(2)}^{(2)}(z, t) - z \frac{\overline{\partial \phi_{S(2)}^{(2)}(z, t)}}{\partial z} - \overline{\psi_{S(2)}^{(2)}(z, t)} \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

围岩与一衬接触处 ( $r = R_1$ ) 的应力协调条件为

$$\begin{aligned} &\left. \left\{ \sigma_{Rr}^{(2)}(z, t) - \sigma_{Sr(1)}^{(2)}(z, t) \right\} \right|_{z=R_1 e^{i\theta}} = 0, \quad \text{即} \\ &\left. \left\{ \sigma_{Rr\theta}^{(2)}(z, t) - \sigma_{Sr\theta(1)}^{(2)}(z, t) \right\} \right|_{z=R_1 e^{i\theta}} = 0 \\ &\left. \left\{ \phi_R^{(2)}(z, t) + z \frac{\overline{\partial \phi_R^{(2)}(z, t)}}{\partial z} + \overline{\psi_R^{(2)}(z, t)} - \left[ \phi_{S(1)}^{(2)}(z, t) + z \frac{\overline{\partial \phi_{S(1)}^{(2)}(z, t)}}{\partial z} + \overline{\psi_{S(1)}^{(2)}(z, t)} \right] \right\} \right|_{z=R_1 e^{i\theta}} = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

围岩与一衬接触处 ( $r = R_1$ ) 位移协调条件为

$$\begin{aligned} &\left. \left\{ u_{Rr}^{ex}(z, t) + iu_{R\theta}^{ex}(z, t) - \left[ u_{Rr}^{ex}(z, t_1) + iu_{R\theta}^{ex}(z, t_1) \right] + \left[ u_{Rr}^{(1)}(z, t_2) + iu_{R\theta}^{(1)}(z, t_2) \right] + \left[ u_{Rr}^{(2)}(z, t) + iu_{R\theta}^{(2)}(z, t) \right] \right\} \right|_{z=R_1 e^{i\theta}} = 0 \\ &= \left. \left\{ u_{Sr(1)}^{(2)}(z, t) + iu_{Sr(1)}^{(2)}(z, t) \right\} \right|_{z=R_1 e^{i\theta}}, \quad \text{即} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &D(z, t) - D(z, t_1) + \frac{e^{-i\theta}}{2} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} I(t-\tau) \phi_R^{(1)}(z, \tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} H(t-\tau) \right. \\ &\left. \left[ z \frac{\overline{\partial \phi_R^{(1)}(z, \tau)}}{\partial z} + \overline{\psi_R^{(1)}(z, \tau)} \right] d\tau \right\} + \frac{e^{-i\theta}}{2} \cdot \left\{ \int_{t_2}^t I(t-\tau) \phi_R^{(2)}(z, \tau) d\tau - \right. \\ &\left. \int_{t_2}^t H(t-\tau) \left[ z \frac{\overline{\partial \phi_R^{(2)}(z, \tau)}}{\partial z} + \overline{\psi_R^{(2)}(z, \tau)} d\tau \right] \right\} = \frac{e^{-i\theta}}{2G_{S(1)}} \left[ \kappa_{S(1)} \right. \end{aligned}$$

$$\left. \phi_{S(1)}^{(2)}(z, t) - z \frac{\overline{\partial \phi_{S(1)}^{(2)}(z, t)}}{\partial z} - \overline{\psi_{S(1)}^{(2)}(z, t)} \right] \quad z = R_1 e^{i\theta}, \quad (18)$$

$$\text{其中, } D(z_1, t) = \frac{1}{4} e^{-i\theta} \left\{ A_1(t)(1-\lambda) \frac{z}{z^2} - A_1(t)(1+\lambda) \frac{1}{z} + A_2(t)(1-\lambda) \frac{1}{z} - A_3(t)(1-\lambda) \frac{1}{z^3} \right\}.$$

因为二次支护面力在  $t = t_2$  时刻才施加, 所以引入新时间变量  $t'' = t - t_2$  简化二衬阶段的复位势, 将所有时间变量统一为  $t''$ 。将式 (5)、(6) 代入式 (14) ~ (18), 并结合 Laplace 变换和卷积 Laplace 变换的性质进行化简。通过比较方程两边  $e^{ki\theta}$  ( $k = -\infty, \dots, +\infty$ ) 项系数, 可以得到一系列关于复位势  $\phi_R^{(m)}$ ,  $\psi_R^{(m)}$ ,  $\phi_{S(n)}^{(m)}$ ,  $\psi_{S(n)}^{(m)}$  ( $m=1, 2$ ;  $n=1, 2$ ) 中待定项系数的代数方程。通过求解代数方程得到拉氏空间中的系数值, 逆变换后即可得到时域解。由此, 复位势中待定项系数得解, 进而得到围岩和衬砌在二次支护面力作用时所对应的复位势。将所得的复位势分别代入式 (10)、(11) 得到围岩位移和增量应力, 代入式 (7)、(8) 分别得到衬砌位移和应力, 问题得解。该解答适用于任意黏弹性模型岩体中圆形隧道, 在任意不同时刻施加一衬和二衬时围岩与衬砌应力、位移的精确计算。

## 2.4 理论解与有限元结果的比对

为检验本文理论和解答的正确性, 本节利用有限元软件 ANSYS 进行与理论解相同模型下双层衬砌隧道的数值计算, 并与理论解对比。由于本节仅进行解答可靠性的验证, 并非针对真实算例计算, 因此在合理范围内选择了如下参数: 竖向地应力  $p_0 = 7.89$  MPa, 侧压力系数  $\lambda = 0.65$ 。围岩采用广义 Kelvin 黏弹性模型 (图 1 (c)) 进行模拟, 并假设体积不可压缩。依据反分析结果选择参数为:  $G_H = 550$  MPa,  $G_K = 458$  MPa,  $\eta_K = 4000$  MPa·d, 隧道断面采用一次成型开挖方式, 洞型半径  $R_1 = 6$  m。衬砌为混凝土材料, 剪切模量分别为  $G_{S(1)} = 10000$  MPa,  $G_{S(2)} = 12000$  MPa, 泊松比  $\nu_{S(1)} = \nu_{S(2)} = 0.2$ , 一衬和二衬厚度分别为  $d_1 = 100$  mm,  $d_2 = 350$  mm, 即  $R_2 = 5.9$  m,  $R_3 = 5.65$  m。取第 5 天施加一衬, 第 20 天施加二衬, 第 25 天在二衬内边界施加均布压力, 且均布压力大小为 0.5 MPa。忽略三维效应的影响。ANSYS 计算时, 通过复制面命令建立衬砌区域, 提取围岩与衬砌接触处的节点坐标编号得到节点坐标并将接触处节点进行  $x$ ,  $y$  方向位移耦合; 求解过程中, 通过单元的生死命令模拟隧道开挖和施加衬砌的过程。

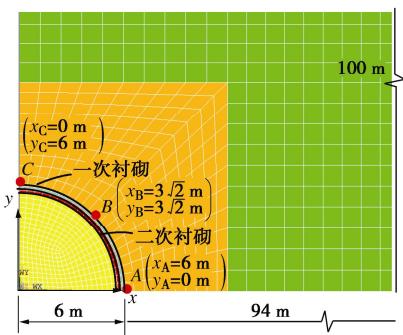


图3 有限元计算模型及网格

Fig. 3 Model and mesh in FEM simulation

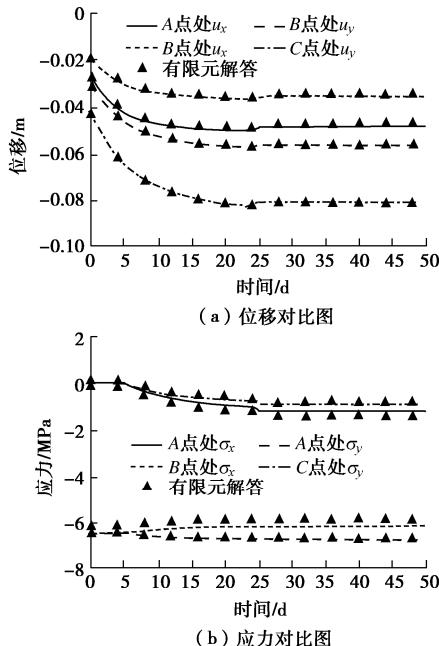


图4 隧道孔口位置点处位移和应力有限元比较

Fig. 4 Comparison between analytical solutions and FEM results

由于结构几何和受力均上下和左右对称, 数值计算时取结构的1/4, 约束左边界水平位移和下边界竖向位移。计算范围、有限元网格和比对点见图3。图4给出比对点处增量位移和全应力的时程比对。由图4可见, 应力与位移理论解均与有限元结果吻合很好, 验证了本文理论和解答的正确性。相比数值解, 理论解能方便地更改几何与物理参数进行快速参数分析, 应用于初步设计中更为便捷。下节将基于本文解答, 进行围岩压力分担简便公式的拟合, 公式形式简单、适用广, 可以避免文中复杂的公式推导, 同时也可以实现本文解析解的类似精度。

### 3 基于理论解的衬砌压力简便计算法

#### 3.1 衬砌压力的机理分析及公式拟合

为保证围岩稳定, 一衬一般尽早施加, 而二衬会滞后一段时间。二衬施加过早, 则二衬分担围岩压力

过大, 容易造成二衬破坏, 影响隧道运营安全; 二衬施加过晚, 则二衬分担围岩压力过小, 不能充分发挥其支护作用。工程中, 二衬何时施加需综合考虑安全与经济因素。由于岩石类别的多样性, 二衬施加时间尚没有统一标准, 一般根据经验确定。广义 Kelvin 模型可以模拟在较低应力水平下岩石的稳态蠕变, 通过改变两个弹簧元件的刚度比和黏性系数, 模拟不同类型岩石的流变特点。本节将基于导出的理论解, 给出可模拟为广义 Kelvin 模型岩体(图1(c))任意岩体参数圆形隧道一衬与二衬分担围岩压力的拟合公式。根据拟合公式, 可方便、快捷的得到不同二衬参数(施加时刻、刚度)、一衬和二衬不同位置承担的最大径向支护力以及比例。为使分析适用更广的情况, 几何尺寸、应力、时间分别除以  $R_1$ ,  $p_0$ ,  $T_K = \eta_K/G_K$  进行无量纲化。

设  $p_{1\max}$  为一衬与围岩之间接触径向压力最终稳定值(即最大值);  $p_{2\max}$  为一衬与二衬之间接触径向压力最终稳定值(最大值)。以下分析中, 无量纲化后的最大径向支护力以及比值分别称为一衬支护压力:  $\delta_{p1} = p_{1\max}/p_0$ ; 二衬支护压力:  $\delta_{p2} = p_{2\max}/p_0$ ; 围岩压力分担比:  $\delta_p = p_{2\max}/p_{1\max}$ 。由于隧道开挖完成后应尽早施加一衬, 以下分析中认为隧道开挖完成后立即施加一次衬砌(即  $t_1/T_K = 0$ )。对围岩较好的情况, 认为一衬等效厚度和剪切模量为常见值  $d_1/R_1 = 1/60$ ,  $G_{S(1)}/G_K = 10$ 。经验算, 拟合时二衬刚度取为常见值  $G_{S(2)}/G_K = 13.5$ 。衬砌结构泊松比均取  $\nu_{S(1)} = \nu_{S(2)} = 0.2$ 。需要指出, 本文所有拟合公式适用于一衬和二衬部分参数在上述值附近的情况, 例如一衬厚度为10~20 mm; 围岩 Kelvin 元件的剪切模量  $G_K$  为1000~3000 MPa。其他一衬参数下的拟合可根据类似方法得到, 篇幅所限将另文专述。

固定部分参数后, 试算显示支护压力、围岩压力分担比仅与二衬参数(无量纲)  $t_2/T_K$ ,  $d_2/R_1$ , 以及侧压系数  $\lambda$ 、洞周角度  $\theta$  和岩石模型参数  $G_M/G_K$  相关。下面根据前述理论解得到不同参数下支护压力的海量数据, 构造支护压力与参数间的简单拟合公式。

通过试算, 发现其他参数相同时, 不同时刻支护压力随洞周角度的分布相似而量值不同; 各点支护压力与侧压系数成线性关系。因此先针对角度  $\theta = \pi/2$  的点取  $\lambda = 0.6$  和 1.2 两种侧压系数下讨论支护压力与参数的函数关系, 然后再根据支护压力分布情况拓展至所有角度点和侧压系数情况。图5(a)中散点为2组侧压系数、3组二衬厚度和3组岩石模型参数的不同组合下, 一衬和二衬支护压力随二衬施加时刻的变化曲线; 图5(b)中散点为参数组合下支护压力随二衬厚度的变化曲线; 图5(c)中散点为参数组合下支护

压力随岩石模型参数的变化曲线。图中仅为部分数据和部分曲线, 实际拟合曲线共包含 1080 组数据。图中可见, 支护压力随二衬支护时刻、二衬厚度的变化大致呈不同形式的指数形式。借鉴文献[5, 6], 二衬支护压力随岩石模型参数变化呈类双曲线函数形式。因此, 根据变化特征和初始值, 二衬支护压力选用如下函数乘积形式进行拟合:

$$\delta_{p2} \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right) = (B_1^{(2)} + B_2^{(2)} \lambda) \cdot \left( \frac{1}{B_3^{(2)} \cdot G_K/G_M + 1} \right) \cdot e^{B_4^{(2)} \frac{t_2}{T_K}} \cdot (e^{B_5^{(2)} \frac{d_2}{R_1}} - 1) \quad (19)$$

其中  $B_k^{(2)}$  ( $k=1, \dots, 5$ ) 为待拟合参数。根据理论解得到二衬支护压力的海量数据, 通过数据拟合得到  $B_k^{(2)}$  的值见表 2, 拟合解(线)与原始数据(散点)的拟合情况见图 5, 可见拟合精度很高(方差  $\geq 0.99$ )。

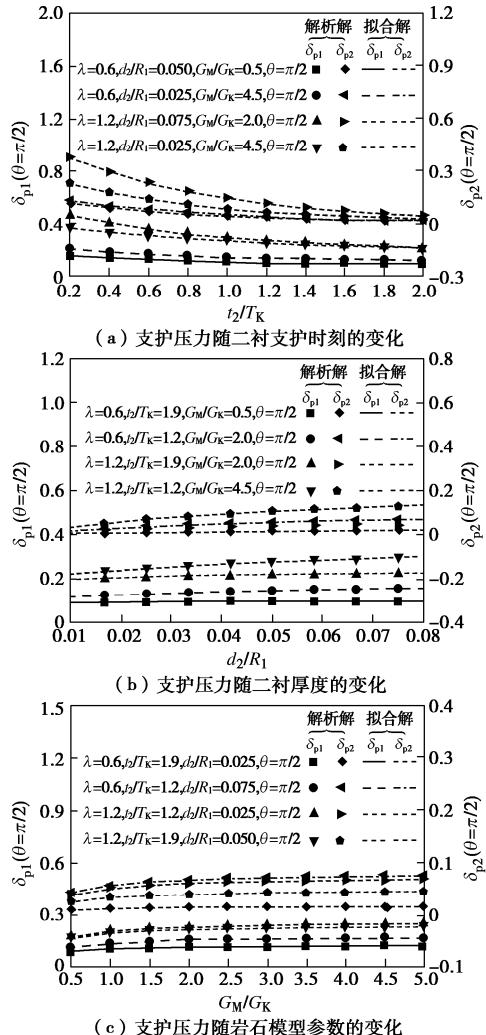


图 5  $\theta=\pi/2$  处拟合解与理论解的比较(原始拟合数据)

Fig. 5 Comparison between analytical solutions and fitting solutions ( $\theta=\pi/2$ , original fitting data)

由本文时效理论解可以分析得: 二衬支护压力最大值与岩石模型参数和所有二衬参数相关; 但一衬支护压力最大值可以分解为两部分: 一部分为二衬施加

前的最大压力  $\delta_{p1-1}$ , 其仅与岩石模型参数、侧压力系数和二衬施加时刻相关, 另一部分为二衬施加后产生的压力  $\delta_{p1-2}$ , 与岩石模型参数、侧压力系数和所有二衬参数相关。因此, 根据该变化特征和初始值, 一衬支护压力选用如下函数进行拟合:

$$\delta_{p1} \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right) = (B_1^{(1)} + B_2^{(1)} \lambda) \cdot \left[ \left( \frac{1}{B_3^{(1)} \cdot G_K/G_M + 1} \right) \cdot (e^{B_4^{(1)} \frac{t_2}{T_K}} - B_5^{(1)}) + \left( \frac{B_6^{(1)}}{B_7^{(1)} G_K/G_M + 1} \right) e^{B_8^{(1)} \frac{t_2}{T_K}} (e^{B_9^{(1)} \frac{d_2}{R_1}} - 1) \right] \quad (20)$$

其中  $B_k^{(1)}$  ( $k=1, \dots, 9$ ) 为待拟合参数。根据理论解得到一衬支护压力的海量数据, 通过数据拟合得到  $B_k^{(1)}$  的值见表 3, 拟合解(线)与原始数据(散点)的拟合情况见图 5, 可见拟合精度很高(方差  $\geq 0.99$ )。

表 2 二衬支护压力拟合公式中系数

Table 2 Coefficients in fitting equations  $\delta_{p2}$

$\delta_{p2}$ 的系数	$B_1^{(2)}$	$B_2^{(2)}$	$B_3^{(2)}$	$B_4^{(2)}$	$B_5^{(2)}$	$C_1^{(2)}$	$C_2^{(2)}$
拟合系数	-0.12	-0.50	0.51	-1.19	-24.17	-0.41	0.41

表 3 一衬支护压力拟合公式中系数

Table 3 Coefficients in fitting equations  $\delta_{p1}$

$\delta_{p1}$ 的系数	$B_1^{(1)}$	$B_2^{(1)}$	$B_3^{(1)}$	$B_4^{(1)}$	$B_5^{(1)}$	$B_6^{(1)}$
拟合系数	0.0027	0.013	0.171	-0.864	10.904	-34.92
$\delta_{p1}$ 的系数	$B_7^{(1)}$	$B_8^{(1)}$	$B_9^{(1)}$	$C_1^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	
拟合系数	0.978	-1.21	-20.68	0.0088	-0.0089	

为验证其他理论解数据的拟合精度, 图 6(a)、(b)针对不同情况给出理论解(散点)和式(19)、(20)计算值(线)对比, 所取数据 408 组, 与原始拟合数据不同。可见, 所有情况一衬和二衬支护压力的理论解与拟合解基本吻合, 说明拟合公式可靠。

对除  $\theta=\pi/2$  的另外角度点的支护压力, 可以通过分析洞周位移分布给出修正。根据文献[15]给出的支护力分布形态以及试算结果, 选用如下函数拟合支护压力随角度分布:

$$\delta_{p1}(\theta) = \delta_{p1} \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{C_1^{(1)} + C_2^{(1)} \lambda}{B_1^{(1)} + B_2^{(1)} \lambda} \cdot \cos^2 \theta \right],$$

$$\delta_{p2}(\theta) = \delta_{p2} \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{C_1^{(2)} + C_2^{(2)} \lambda}{B_1^{(2)} + B_2^{(2)} \lambda} \cdot \cos^2 \theta \right], \quad (21)$$

其中  $C_k^{(1)}$ ,  $C_k^{(2)}$  ( $k=1, 2$ ) 为待拟合参数。通过不同角度点支护压力的理论解计算结果, 选用 3640 组数据, 拟合得到的系数见表 2 和表 3, 拟合精度很高(方差  $\geq 0.99$ )。为验证拟合式与其他理论解(非拟合用)数据的拟合精度, 图 6(c)针对不同情况给出理论解(散点)和式(21)计算值(实线)对比, 所有情况一衬和二衬支护压力的理论解和拟合解基本吻合, 说明拟合可靠。

$$\text{围岩压力分担: } \delta_p(\theta) = \delta_{p2}(\theta) / \delta_{p1}(\theta) \quad (22)$$

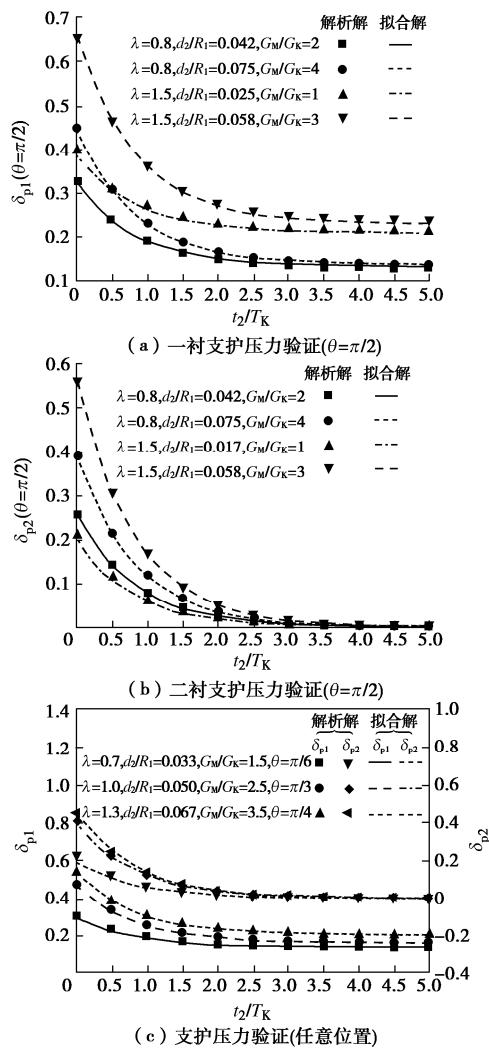


图 6 拟合解与解析解的比较 (非原始拟合数据)

Fig. 6 Comparison between analytical solutions and fitting solutions (any data)

通过式(21)、(22)可以进行任意广义 Kelvin 模型岩体中任意尺寸圆形隧道衬砌支护压力和围岩压力分担比计算, 固定一衬常见参数后, 适用于任意岩体参数、任意二衬施加时刻、厚度、任意地应力和任意角度的情况。图 7 为计算流程图, 方便工程中使用。

### 3.2 算例分析

在埋深 80 m 左右软岩中计划开挖一圆形隧洞, 隧道断面一次成型, 孔口半径  $R_1 = 6$  m, 重度  $\gamma = 23$  kN/m<sup>3</sup>。根据埋深计算得到  $p_0 = 1.84$  MPa, 侧压力系数  $\lambda = 0.65$ 。围岩可以模拟为广义 Kelvin 模型, 依据蠕变试验可以得到岩石黏弹性参数<sup>[16]</sup>:  $G_M = 3980$  MPa,  $G_K = 960$  MPa,  $\eta_K = 45336$  MPa·d。根据施工建议, 一衬为混凝土材料, 厚度为  $d_1 = 0.1$  m, 剪切模量为  $G_{S(1)} = 9600$  MPa, 泊松比  $\nu_{S(1)} = 0.2$ 。二衬选用混凝土材料, 剪切模量为  $G_{S(2)} = 12960$  MPa, 泊松比  $\nu_{S(2)} = 0.2$ 。

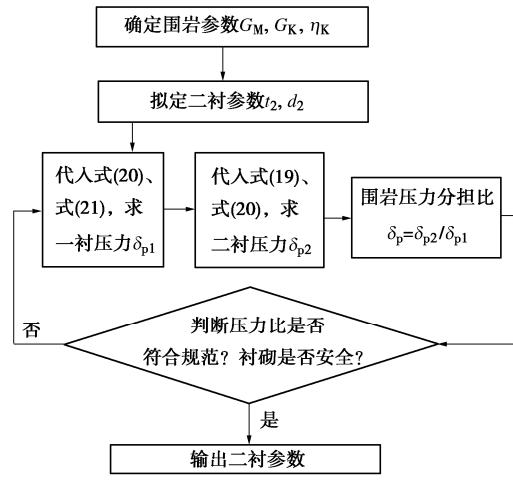


图 7 理论计算流程图

Fig. 7 Analysis procedure

将上述参数代入式(21)、(22)可以得到不同位置的衬砌支护压力和围岩压力分担比。

一衬支护压力:

$$p_1 = [(0.0199 \cdot e^{-0.0183t_2} + 0.2168 - 0.582 \cdot e^{-0.0256t_2} \cdot (e^{-3.45d_2} - 1)) \cdot (1 + 0.2704 \cdot \cos^2 \theta)] \quad (23)$$

二衬支护压力:

$$p_2 = e^{-0.0252t_2} \cdot (1 - e^{-4.03d_2}) \cdot (0.7256 + 0.237 \cdot \cos^2 \theta) \quad (24)$$

$$\text{围岩压力分担: } \delta_p = p_2 / p_1 \quad (25)$$

对  $\theta = 0$  和  $\pi/2$  位置: 图 8 (a) 给出了二衬厚度  $d_2$  分别为 0.25 m 和 0.5 m 两类情况下, 围岩压力分担比随二衬施加时刻的变化曲线; 图 8 (b) 给出了二衬施加时刻  $t_2$  分别为 20 d 和 50 d 时, 围岩压力分担比随二衬厚度的变化曲线。结合图 8 (a)、(b), 可以根据围岩压力分担比大致给出二衬施加时刻和二衬厚度施工建议值。

## 4 结语

本文利用平面复变函数方法和 Laplace 变换, 首先推导了水平和竖向地应力不相等的一般地应力条件下, 黏弹性岩体中双层衬砌圆形隧道全施工过程的时效理论解。本文理论解可适用于任何黏弹性模型的岩体, 任意时刻施加衬砌和任意地应力的情况, 并与有限元结果进行比对, 误差较小。本文理论解揭示各参数影响的内在机理; 并为二衬最佳支护方案的选择提供理论依据。为便于工程设计, 基于理论解并利用数据拟合的方法给出衬砌支护压力和围岩压力分担比简便计算式。可以给出任意广义 Kelvin 模型的岩体、任意二衬施加时刻、二衬厚度、任意地应力情况下, 任意角度位置一衬和二衬支护压力最大值。拟合公式形式简单、适用范围广, 同时也可以实现本文解析解的类似精度。

本文解答主要针对围岩较好, 未发生较大区域破坏的时效问题。对存在塑性区的情况, 应用本解答和合适的屈服准则可以进行初始塑性区的预判和初步分析。本文解答为二衬最佳支护方案的选择提供了精确和简便的方法, 可为同类工程提供参考。

在后续研究中, 将进一步开展拟合公式的时效分析及针对锚喷等支护方式的解析方法的研究。同时, 根据现有解答, 开发快速预测隧道施工力学状态的计算机系统, 通过输入初始参数可方便获得力学响应, 更好的为工程服务。

### 参考文献:

- [1] 赵子荣, 张玉琴, 季良杰, 等. 南岭双线铁路隧道软岩复合式衬砌围岩压力的试验研究[J]. 水利学报, 1985(10): 29–38. (ZHAO Zi-rong, ZHANG Yu-qin, JI Liang-jie, et al. The test study of the surrounding rock pressure acting on the composite lining in weak rock of nanling double track railway tunnel[J]. Chinese Journal of Hydraulic Engineering, 1985(10): 29–38. (in Chinese))
- [2] NAGGAR H EI, HINCHBERGER S D, LO K Y. A closed-form solution for composite tunnel linings in a homogeneous infinite isotropic elastic medium[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, 45(45): 266–287.
- [3] MASON D P, ABELMAN H. Support provided to rock excavations by a system of two liners[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2009, 46(7): 1197–1205.
- [4] 王祥秋, 杨林德, 高文华. 软弱围岩蠕变损伤机理及合理支护时间的反演分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(5): 793–796. (WANG Xiang-qiu, YANG Lin-de, GAO Wen-hua. Creep damage mechanism and back analysis of optimum support time for soft rockmass[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(5): 793–796. (in Chinese))
- [5] WANG H N, LI Y, NI Q, et al. Analytical solutions for the construction of deeply buried circular tunnels with two liners in rheological rock[J]. Rock Mechanics & Rock Engineering, 2013, 46(6): 1481–1498.
- [6] WANG H N, UTILI S, JIANG M J. An analytical approach for the sequential excavation of axisymmetric lined tunnels in viscoelastic rock[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2014, 68(6): 85–106.
- [7] 李之达, 康冕, 靳华蕾, 等. 隧道施工中围岩与支护结构的黏弹性分析[J]. 固体力学学报, 2013, 34(6): 620–627. (LI Zhi-da, KANG Mian, JIN Hua-lei, et al. Viscoelastic analysis of the stress and displacement in tunnel surrounding rock and support during the porcess of tunnel construction[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2013, 34(6): 620–627. (in Chinese))
- [8] 李英明, 张瀚, 孟祥瑞. 软岩巷道二次支护时机研究[J]. 煤炭学报, 2015, 40(增刊 1): 47–52. (LI Ying-ming, ZHANG Han, MENG Xiang-rui. Research on secondary support time of soft rock roadway[J]. Journal of China Coal Society, 2015, 40(S1): 47–52. (in Chinese))
- [9] 苏峰, 陈福全, 施有志. 深埋双隧道开挖的解析延拓法求解[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(2): 365–374. (SU Feng, CHEN Fu-quan, SHI You-zhi. Analytic continuation solution of deep twin-tunnels[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, 31(2): 365–374. (in Chinese))
- [10] LEE E H. Stress analysis in visco-elastic bodies[J]. Quart. Appl Math, 1955: 183–190.
- [11] WANG H N, UTILI S, JIANG M J, et al. Analytical solutions for tunnels of elliptical cross-section in rheological rock accounting for sequential excavation[J]. Rock Mechanics & Rock Engineering, 2015, 48(5): 1–33.
- [12] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994. (CHEN Zi-yin. Analysis methods in analysis of rock mechanics[M]. Beijing: China Coal Industry Press, 1994. (in Chinese))
- [13] 王华宁, 蒋明镜, 何平. 流变岩体中椭圆洞室断面开挖过程的力学分析[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(11): 1979–1987. (WANG Hua-ning, JIANG Ming-jing, HE Ping. Analytical solutions for elliptical tunnels in rheological rock considering excavation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(11): 1979–1987. (in Chinese))
- [14] 王华宁, 宋飞, 蒋明镜. 流变岩体中支护圆形隧道施工全过程的时效理论解[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2016, 44(12): 1835–1844. (WANG Hua-ning, SONG Fei, JIANG Ming-jing. Analytical solutions for the construction of circular tunnel accounting for time-dependent characteristic of the rock[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2016, 44(12): 1835–1844. (in Chinese))
- [15] WU Q L, LÜ A Z, GAO Y T, et al. Stress analytical solution for plane problem of a double-layered thick-walled cylinder subjected to a type of non-uniform distributed pressure[J]. Journal of Central South University, 2014, 21: 2074–2082.
- [16] FENG X T, CHEN B R, YANG C, et al. Identification of visco-elastic models for rocks using genetic programming coupled with the modified particle swarm optimization algorithm[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2006, 43(5): 789–801.