

DOI: 10.11779/CJGE201708016

# 考虑桩体径向渗流的碎石桩复合地基固结解析解

郭彪<sup>1</sup>, 龚晓南<sup>2</sup>, 李亚军<sup>1</sup>

(1. 云南省交通规划设计研究院陆地交通气象灾害防治技术国家工程实验室, 云南 昆明 650041; 2. 浙江大学滨海和城市岩土工程研究中心,  
浙江 杭州 310027)

**摘要:** 提出一种新的复合地基固结度求解方法及表达形式, 推导得到了考虑桩体及土体的径向渗流, 上部荷载分级逐渐施加, 扰动区渗透系数呈线性变化等因素的一个较全面的散体材料桩复合地基固结解析解。通过退化、与已有解的比较等方法对解进行了分析验证。结果表明, 现有的单级荷载及瞬时荷载下考虑桩体径向渗流的解、考虑桩体径向渗流与变形协调的解、太沙基一维固结解等都是解的特例, 这说明了解的正确合理性, 发展和完善了现有复合地基固结理论。不考虑桩体径向渗流会高估地基固结速度; 地基加载过程越缓, 地基固结越慢。提出的求解方法, 为复合地基固结度的求解提供了一种新的思路。

**关键词:** 复合地基; 固结; 多级荷载; 桩体渗流; 解析解; 求解方法

**中图分类号:** TU47      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2017)08-1485-08

**作者简介:** 郭彪(1982-), 男, 四川安岳人, 博士, 高级工程师, 主要从事地基及边坡等方面的研究工作。E-mail:  
gb25891775@163.com。

## Analytical solution for consolidation of stone column-reinforced foundations considering radical and vertical flows in columns

GUO Biao<sup>1</sup>, GONG Xiao-nan<sup>2</sup>, LI Ya-jun<sup>1</sup>

(1. National Engineering Laboratory for Land Transport Meteorological Disaster Control Technology, Broadvision Engineering  
Consultants, Kunming 650041, China; 2. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou  
310027, China)

**Abstract:** Based on the proposed new method for solving consolidation degree of composite foundation and its expression, an analytical solution is obtained for the consolidation of composite ground with granular columns considering both radical and vertical flows in piles under multi-stage loading. In addition, the disturbance effect of column construction on the surrounding soil is also considered by introducing a linear function for the horizontal permeability coefficient of soils in the disturbed zone. The solution was analyzed by the degradation method and the comparison with the existing solutions. The results show that the obtained solution can be reduced to the solution considering both radical and vertical flows in piles under single-stage or instantaneous loading, the solution considering the coordination of vertical seepage and deformation of pile body, and the Terzaghi's one-dimensional consolidation solution for natural foundation. Thus, the correction and reasonability of the solution obtained is confirmed, and the solution does contribute to the development and improvement of the consolidation theory of composite ground. No consideration of the radial seepage in piles will overestimate the consolidation rate of the ground; the slower the foundation loading process is, the slower the consolidation of the foundation is. The proposed method provides a new idea for solving the consolidation degree of composite foundation.

**Key words:** composite ground; consolidation; multi-stage loading; flow in column; analytical solution; solving method

## 0 引言

自从Yoshikuni<sup>[1]</sup>将应力集中效应引入到复合地基的固结理论研究中以来, 通过国内外众多学者的大量研究, 复合地基固结理论日趋完善。目前的复合地基固结解析解中, 有考虑碎石桩施工的扰动效应以及井阻作用的解<sup>[2-3]</sup>; 变荷载、未打穿、双层地基情况下的

解<sup>[4-6]</sup>; 半透水边界条件下解<sup>[7]</sup>; 考虑土体水平渗透系数在扰动区内连续变化的固结解<sup>[8-9]</sup>; 地基内附加应力是时间及深度的函数情况下的解<sup>[10]</sup>; 考虑碎石桩的竖

基金项目: 云南省交通运输厅科技计划项目(2015(A)12); 云南省交通运输厅科技计划项目(云交科教〔2014〕231号(一))

收稿日期: 2016-04-12

向协调变形的固结解<sup>[11-12]</sup>，便于工程应用的简化解<sup>[13-14]</sup>等等。

在以上的复合地基固结理论中，均假定水沿径向流入碎石桩后立即沿桩体向竖向流出。这对于桩体直径较小的情况下是适用的，但是对于大直径、高置换率碎石桩则不太合理，因为与在土体中一样，水在桩体中除了发生竖向渗流外，还会发生径向渗流。于是，卢萌盟等<sup>[15-16]</sup>建立了考虑桩体竖向及径向渗流的碎石桩复合地基固结解析解，但是，在其研究中，假定上部荷载是瞬时施加的，这显然与实际不符，因为在实际工程中，堆载大都是分级逐渐施加的。

然而，在非瞬时荷载条件下考虑考虑桩体竖向及径向渗流的复合地基固结问题目前还没有相关研究，这是因为此类固结问题的复杂性导致的。如果采用已有的解答方法及表达形式，所得解无法满足固结问题的边界条件。

因此，针对这一问题，本文通过探索，通过在传统复合地基固结解的基本形式基础上增加一个一次多项式的方法，提出了一种新的解答形式及方法，推导得到了荷载多级施加条件下考虑桩体径向渗流的散体材料桩复合地基固结解析解。通过对解的分析比较，验证了本文解的正确性，完善了复合地基固结理论，为复合地基固结的解析研究提供了一种新的思路。

## 1 固结方程及求解条件

图 1 为变荷载下复合地基固结简化模型。图中  $r_e$  为碎石桩影响区半径， $r_s$  为扰动区半径， $r_c$  为碎石桩半径， $H$  为桩深度， $q(t)$  为上部荷载。

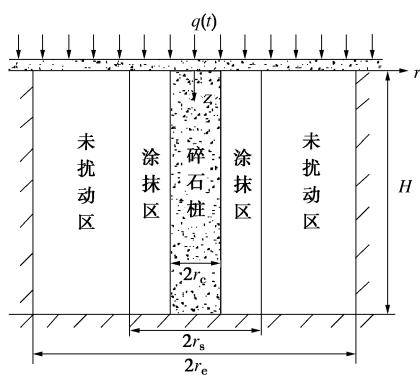


图 1 复合地基固结简化模型

Fig. 1 Simplified model for composite foundation

在本文中，考虑荷载是多级线性施加的，如图 2 所示。图中  $q_i$  为第  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ) 级荷载加载完成后地基荷载值， $q_u$  为地基全部加载完成后的荷载值； $t_{ib}$  及  $t_{ie}$  为第  $i$  级荷载加载开始及完成的时间， $t_u$  为地基全部加载完成时的时间。

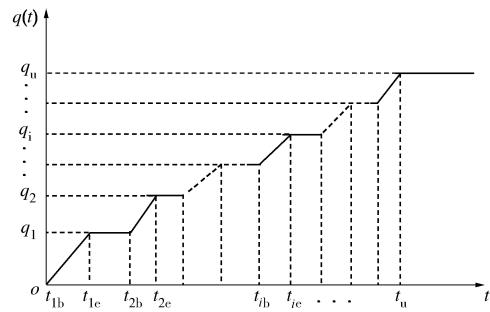


图 2 地基分级加载示意图

Fig. 2 Schematic diagram of multi-stage loading

根据图 2 可得到上部荷载  $q(t)$  的表达式为

$$q(t) = \begin{cases} q_{i-1} + \frac{t - t_{ib}}{t_{ie} - t_{ib}}(q_i - q_{i-1}) & (t_{ib} \leq t < t_{ie}) \\ q_i & (t_{ie} \leq t < t_{(i+1)b}) \\ q_u & (t \geq t_u) \end{cases} \quad (1)$$

在本文的推导过程中，还作了以下假定：①等应变条件成立；②土中水渗流服从达西定律；③散体材料桩及土体中均存在径向及竖向渗流。

由地基平衡条件和等应变假设可得关系式<sup>[17]</sup>：

$$\varepsilon_v = \frac{n^2(q - \bar{u})}{E_s(n^2 - 1 + Y)} \quad , \quad (2)$$

式中， $\varepsilon_v$  为地基体积应变， $n$  为桩径比， $n = r_e / r_c$ ； $E_s$ ， $E_c$  分别为土体及桩体的压缩模量， $Y$  为桩土模量比， $Y = E_c / E_s$ ； $\bar{u}$  为复合地基某一深度处的平均超静孔压，其表达式为

$$\bar{u} = \frac{(n^2 - 1)\bar{u}_s + \bar{u}_c}{n^2} \quad , \quad (3)$$

式中， $u_s$ ， $u_c$  分别为土体及桩体内的超静孔压力， $\bar{u}_s$ ， $\bar{u}_c$  为复合地基土体及桩体某一深度处的平均超静孔压，其表达式为

$$\bar{u}_s = \frac{1}{\pi(r_e^2 - r_c^2)} \int_{r_c}^{r_e} 2\pi r u_s(r, z, t) dr \quad , \quad (4)$$

$$\bar{u}_c = \frac{1}{\pi r_c^2} \int_0^{r_c} 2\pi r u_c(r, z, t) dr \quad . \quad (5)$$

将式 (2) 对  $t$  求导可得

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{n^2}{E_s(n^2 - 1 + Y)} \left( \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) \quad . \quad (6)$$

复合地基土体的固结方程为<sup>[1, 8, 16]</sup>

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{k_{hs}(r)}{\gamma_w} \frac{r \partial u_s}{\partial r} \right] + \frac{k_{vs}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial z^2} = -\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (r_c \leq r \leq r_e) \quad , \quad (7)$$

式中， $k_{vs}$  为土体竖向渗透系数， $k_{hs}(r)$  为土体水平渗透系数，为随  $r$  变化的函数，其表达式为

$$k_{hs}(r) = k_{hs}f(r) \quad , \quad (8)$$

式中， $k_{hs}$  为土体未扰动区的水平渗透系数， $f(r)$  为描述土体水平渗透系数的函数。

本文考虑桩体与土体一样存在径向及竖向渗流, 因此对于桩体同样有固结方程为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{k_{hc}}{\gamma_w} r \frac{\partial u_c}{\partial r} \right] + \frac{k_{vc}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \bar{u}_c}{\partial z^2} = -\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (0 \leq r \leq r_c), \quad (9)$$

式中,  $k_{hc}$ ,  $k_{vc}$  分别为桩体水平及竖向渗透系数。

在地基径向最大影响半径处没有渗流发生, 有边界条件:

$$r = r_e: \quad \frac{\partial u_s}{\partial r} = 0 \quad . \quad (10)$$

在桩土交界面处土体的孔压与桩体的孔压相等, 流速相等, 有边界条件:

$$r = r_c: \quad u_s = u_c \quad , \quad (11)$$

$$r = r_c \quad k_{hs}(r) \frac{\partial u_s}{\partial r} = k_{hc} \frac{\partial u_c}{\partial r} \quad . \quad (12)$$

由于模型的对称性, 在桩体的中心处没有渗流发生, 因此有边界条件:

$$r = 0, \quad \frac{\partial u_c}{\partial r} = 0 \quad . \quad (13)$$

参考文献[16]的推导过程, 可以得到如下的固结控制方程:

$$\bar{u}_c = \bar{u} + C \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t} \right) - D \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad , \quad (14)$$

$$D \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4} - C \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial^2 z} - (B+1) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + A \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = A \frac{\partial q}{\partial t} - C \frac{\partial^3 q}{\partial t \partial^2 z} \quad , \quad (15)$$

式中,

$$A = \frac{n^4 \gamma_w}{E_s (k_{vc} - k_{vs}) (n^2 - 1 + Y)}, \quad B = \frac{n^2 k_{vs}}{k_{vc} - k_{vs}},$$

$$C = \frac{\gamma_w [(n^2 - 1) k_{vc} + k_{vs}]}{E_s (n^2 - 1 + Y) (k_{vc} - k_{vs})} \left[ \frac{r_e^2 F_c}{2 k_{hs}} + \frac{r_c^2 (n^2 - 1)}{8 k_{hc}} \right],$$

$$D = \frac{k_{vs} k_{vc}}{k_{vc} - k_{vs}} \left[ \frac{r_e^2 F_c}{2 k_{hs}} + \frac{r_c^2 (n^2 - 1)}{8 k_{hc}} \right].$$

本文考虑扰动区内水平渗透系数线性变化,  $F_c$  的表达式为<sup>[11, 16]</sup>

$$F_c = \frac{n^2}{n^2 - 1} \left\{ \frac{s-1}{\delta s - 1} \ln \delta s - \frac{(s-1)^2}{n^2(1-\delta)} + \frac{2(s-1)(\delta s - 1)}{n^2(1-\delta)^2} \ln \frac{1}{\delta} - \frac{2(s-1)}{n^4(1-\delta)} \right. \\ \left. \left( \frac{s^3 - 1}{3} - \frac{s^2 - 1}{2} \right) - \frac{(s-1)(\delta s - 1)}{n^4(1-\delta)^2} \right. \\ \left. \left[ \frac{s^2 - 1}{2} - \frac{(s-1)(\delta s - 1)}{1-\delta} + \frac{(\delta s - 1)^2}{(1-\delta)^2} \ln \frac{1}{\delta} \right] - \right. \\ \left. \frac{(n^2 - s^2)(1-s)^2}{n^4(1-\delta)} + \ln \frac{n}{s} - \frac{3}{4} + \frac{4n^2 s^2 - s^4}{4n^4} \right\}, \quad (16)$$

式中,  $s = r_s / r_c$ ,  $\delta$  为未扰动区渗透系数与桩土界面

处土体渗透系数之比。

将式(1)代入式(14)、(15)可得:

当  $t_{ib} \leq t < t_{ie}$  时,

$$\bar{u}_c = \bar{u} + C \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{q_i - q_{i-1}}{t_{ie} - t_{ib}} \right) - D \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \quad (17)$$

$$D \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4} - C \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial^2 z} - (B+1) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + A \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = A \frac{q_i - q_{i-1}}{t_{ie} - t_{ib}}, \quad (18)$$

当  $t_{ie} \leq t < t_{(i+1)b}$  及  $t \geq t_u$  时,

$$\bar{u}_c = \bar{u} + C \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \quad (19)$$

$$D \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4} - C \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial^2 z} - (B+1) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + A \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0. \quad (20)$$

式(17)~(20)即为考虑荷载分级线性施加, 桩体及土体均存在径向渗流情况下复合地基固结控制方程。

考虑地基顶面排水, 底面不排水, 有边界条件为

$$z = 0, \quad \bar{u}(z, t) = 0 \quad , \quad (21a)$$

$$z = 0, \quad \bar{u}_c(z, t) = 0 \quad , \quad (21b)$$

$$z = H, \quad \frac{\partial \bar{u}(z, t)}{\partial z} = 0 \quad , \quad (21c)$$

$$z = H, \quad \frac{\partial \bar{u}_c(z, t)}{\partial z} = 0 \quad . \quad (21d)$$

初始条件为

$$t = 0: \bar{u}(0) = q(0) = 0 \quad . \quad (22)$$

## 2 孔压求解

### 2.1 第1个加载周期

首先对第1个加载周期  $t_{ib} \leq t < t_{2b}$  时的固结方程求解, 本文中将地基加载开始时的时间设定为0, 也就是说, 第1个加载周期时间为  $0 \leq t < t_{2b}$ 。

第1个加载周期又可以分为两个加载阶段,  $0 \leq t < t_{ie}$  时为荷载线性增大阶段,  $t_{ie} \leq t < t_{2b}$  为恒载阶段, 下面对两个阶段分别求解。

#### (1) 线性加载阶段

$0 \leq t < t_{ie}$  时, 此阶段的固结方程为式(17)及式(18)。

现有的复合地基孔压解一般都可以表达为一个时间函数与正弦函数乘积的无穷级数:

$$\bar{u}(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \sin \left( \frac{M}{H} z \right) \quad . \quad (23)$$

然而, 对本文固结问题来说, 式(23)虽然可以满足边界条件式(21a)及(21c), 但通过(17)得到的  $\bar{u}_c$  却不能满足边界条件式(21b)及(21d)。因此, 需要提出其他形式的解, 才能得到式(17)及(18)的解答。

因此, 通过探索, 设方程 (18) 的解的形式为

$$\bar{u}_1(z, t) = a_1 z^2 + b_1 z + \sum_{m=1}^{\infty} T_{1m}(t) \sin\left(\frac{M}{H} z\right), \quad (24)$$

式中,  $a_1$ ,  $b_1$  为常系数,  $T_{1m}(t)$  为一个关于时间  $t$  的函数,  $M = \frac{2m-1}{2}\pi$ , ( $m=1, 2, 3, \dots$ )。

将式 (24) 代入式 (17) 可得

$$\begin{aligned} \bar{u}_{cl} = & a_1 z^2 + b_1 z + \sum_{m=1}^{\infty} T_{1m}(t) \sin\left(\frac{M}{H} z\right) + \\ & C \sum_{m=1}^{\infty} T'_{1m}(t) \sin\left(\frac{M}{H} z\right) - D \left[ 2a_1 - \left(\frac{M}{H}\right)^2 \right. \\ & \left. \sum_{m=1}^{\infty} T_{1m}(t) \sin\left(\frac{M}{H} z\right) \right] - \frac{Cq_1}{t_{1e} - t_{1b}}. \end{aligned} \quad (25)$$

将式 (24)、(25) 代入边界条件式 (21) 可以求得系数  $a_1$ ,  $b_1$  分别为

$$a_1 = -\frac{Cq_1}{2Dt_{1e}}, \quad b_1 = \frac{CHq_1}{Dt_{1e}}.$$

将式 (24) 代入式 (18) 可得

$$\begin{aligned} D \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{M}{H}\right)^4 T_{1m}(t) \sin\left(\frac{M}{H} z\right) + C \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{M}{H}\right)^2 T'_{1m}(t) \cdot \\ \sin\left(\frac{M}{H} z\right) + (B+1) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{M}{H}\right)^2 T_{1m}(t) \sin\left(\frac{M}{H} z\right) + \\ A \sum_{m=1}^{\infty} T'_{1m}(t) \sin\left(\frac{M}{H} z\right) = \left[ A - \frac{C(B+1)}{D} \right] \frac{q_1}{t_{1e}}. \end{aligned} \quad (26)$$

将式 (26) 两边同乘以  $\sin\left(\frac{M}{H} z\right)$  并在  $[0, H]$  上关于  $z$  积分, 并利用傅里叶级数的正交性, 整理后可得

$$T'_{1m}(t) + \beta_m T_{1m}(t) = Q_{1m}, \quad (27)$$

式中,

$$\begin{aligned} \beta_m = & \frac{\left[ D \left(\frac{M}{H}\right)^4 + (B+1) \left(\frac{M}{H}\right)^2 \right]}{\left[ C \left(\frac{M}{H}\right)^2 + A \right]}, \quad (28) \\ Q_{1m} = & \frac{AD - C(B+1)}{C \left(\frac{M}{H}\right)^2 + A} \frac{2q_1}{MDt_{1e}}. \end{aligned} \quad (29)$$

利用初始条件式 (22) 有:

$$a_1 z^2 + b_1 z + \sum_{m=1}^{\infty} T_{1m}(0) \sin\left(\frac{M}{H} z\right) = 0. \quad (30)$$

将式 (30) 两边同乘以  $\sin\left(\frac{M}{H} z\right)$  并在  $[0, H]$  上关于  $z$  积分, 并利用傅里叶级数的正交性, 整理后可得:

$$T_{1m}(0) = -\frac{2H^2}{M^3} \frac{Cq_1}{Dt_{1e}}. \quad (31)$$

方程 (27) 和式 (31) 分别为关于  $T_{1m}(t)$  的常微

分方程以及定解条件, 其解可写为

$$T_{1m}(t) = e^{-\beta_m t} \left[ \frac{Q_{1m}}{\beta_m} (e^{\beta_m t} - 1) - \frac{2H^2}{M^3} \frac{Cq_1}{Dt_{1e}} \right]. \quad (32)$$

将式 (32) 代入式 (24) 即可得到第 1 个加载周期线性加载阶段的孔压解为

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(z, t) = & -\frac{C}{2D} \frac{q_1}{t_{1e}} z^2 + \frac{HC}{D} \frac{q_1}{t_{1e}} z + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta_m t} \cdot \\ & \left[ \frac{Q_{1m}}{\beta_m} (e^{\beta_m t} - 1) - \frac{2H^2}{M^3} \frac{Cq_1}{Dt_{1e}} \right] \sin\left(\frac{M}{H} z\right). \end{aligned} \quad (33)$$

(2) 恒载阶段

$t_{1e} \leq t < t_{2b}$  时, 此阶段的固结方程为式 (19) 及式 (20)。令式 (20) 解的形式为

$$\bar{u}_{1'}(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_m t}, \quad (34)$$

式中,  $A_{1m}$  为系数。式 (34) 已经满足方程式 (20)。

将式 (34) 代入式 (19) 有

$$\begin{aligned} \bar{u}_{cl'} = & \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_m t} - C \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} \beta_m e^{-\beta_m t} \cdot \\ & \sin\left(\frac{M}{H} z\right) + D \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{M}{H}\right)^2 A_{1m} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_m t}. \end{aligned} \quad (35)$$

显然, 式 (34)、(35) 也是满足边界条件式 (21) 的。

由于地基中孔压是随时间连续变化的, 因此在  $t = t_{1e}$  时刻, 有

$$\bar{u}_1(z, t_{1e}) = \bar{u}'_{1'}(z, t_{1e}), \quad (36)$$

即

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_m t_{1e}} = \bar{u}_1(z, t_{1e}). \quad (37)$$

将式 (37) 两边同乘以  $\sin\left(\frac{M}{H} z\right)$  并在  $[0, H]$  上关于  $z$  积分, 并利用傅里叶级数的正交性, 整理后可得

$$A_{1m} = \left( \frac{Q_{1m}}{\beta_m} + \frac{2CH^2}{M^3} \frac{q_1}{t_{1e}} \right) (e^{\beta_m t_{1e}} - 1). \quad (38)$$

将  $A_{1m}$  代入式 (33) 即可得到第 1 个加载周期恒载阶段的孔压解为

$$\begin{aligned} \bar{u}'_{1'}(z, t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) e^{-\beta_m t} \cdot \\ & \left[ \left( \frac{Q_{1m}}{\beta_m} + \frac{2CH^2}{M^3} \frac{q_1}{t_{1e}} \right) (e^{\beta_m t} - 1) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

## 2.2 第 $i$ 个加载周期

求得了第 1 个加载周期的解后, 采用上面同样的方法, 可以求得第  $2, 3, \dots, i, \dots$  个加载周期的解。

(1) 线性加载阶段

$t_{ib} \leq t < t_{ie}$  时, 此阶段方程 (18) 的解的形式可以

写成

$$\bar{u}_i(z, t) = a_i z^2 + b_i z + \sum_{m=1}^{\infty} T_{im}(t) \sin\left(\frac{M}{H}z\right)。 \quad (40)$$

通过边界条件式 (21) 可以求得系数  $a_i$ ,  $b_i$  为

$$a_i = -\frac{C(q_i - q_{i-1})}{2D(t_{ie} - t_{ib})}, \quad b_i = \frac{CH(q_i - q_{i-1})}{D(t_{ie} - t_{ib})}。$$

将式 (40) 代入式 (18) 后两边同乘以  $\sin\left(\frac{M}{H}z\right)$

并在  $[0, H]$  上关于  $z$  积分, 并利用傅里叶级数的正交性, 整理后可得

$$T'_{im}(t) + \beta_m T_{im}(t) = Q_{im} \quad , \quad (41)$$

式中,

$$Q_{im} = \frac{DA - (B+1)C}{C\left(\frac{M}{H}\right)^2 + A} \frac{2(q_i - q_{i-1})}{DM(t_{ie} - t_{ib})}。 \quad (42)$$

由于地基中孔压是随时间连续变化的, 因此在  $t = t_{ib}$  时刻有

$$\bar{u}_i(z, t_{ib}) = \bar{u}'_{(i-1)}(z, t_{ib}) \quad , \quad (43)$$

即

$$a_i z^2 + b_i z + \sum_{m=1}^{\infty} T_{im}(t_{ib}) \sin\left(\frac{M}{H}z\right) = \bar{u}'_{(i-1)}(z, t_{ib})。 \quad (44)$$

将式 (44) 两边同乘以  $\sin\left(\frac{M}{H}z\right)$  并在  $[0, H]$  上

关于  $z$  积分, 并利用傅里叶级数的正交性, 整理后可得

$$T_{im}(t_{ib}) = -\frac{2CH^2}{DM^3} \frac{q_i - q_{i-1}}{t_{ie} - t_{ib}} + \frac{2}{H} \int_0^H \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \bar{u}'_{(i-1)}(z, t_{ib}) dz。 \quad (45)$$

方程 (41) 和式 (45) 分别为关于  $T_{im}(t)$  的常微分方程以及定解条件, 其解可写为

$$T_{im}(t) = e^{-\beta_m(t-t_{ib})} \left[ Q_{im} \frac{1}{\beta_m} (e^{\beta_m(t-t_{ib})} - 1) + T_{im}(t_{ib}) \right]。 \quad (46)$$

将式 (45)、(46) 代入式 (40) 即可得到第  $i$  个加载周期线性加载阶段的孔压解为

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(z, t) = & \left( Hz - \frac{z^2}{2} \right) \frac{C(q_i - q_{i-1})}{D(t_{ie} - t_{ib})} + \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \cdot \\ & e^{-\beta_m(t-t_{ib})} \left\{ \frac{Q_{im}}{\beta_m} (e^{\beta_m(t-t_{ib})} - 1) - \frac{2CH^2(q_i - q_{i-1})}{DM^3(t_{ie} - t_{ib})} + \right. \\ & \left. \frac{2}{H} \int_0^H \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \bar{u}'_{(i-1)}(z, t_{ib}) dz \right\}。 \quad (47) \end{aligned}$$

可见, 第  $i$  个加载周期线性加载阶段的解是与第  $i-1$  个加载周期的解相关的。

(2) 恒载阶段

$t_{ie} \leq t < t_{(i+1)b}$  时, 此阶段方程 (20) 的解的形式

可以写成

$$\bar{u}'_i(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{im} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) e^{-\beta_m t}。 \quad (48)$$

式 (48) 已经满足方程 (20) 及边界条件式 (21)。

根据孔压连续条件, 有

$$\bar{u}'_i(z, t_{ie}) = \bar{u}_i(z, t_{ie}) \quad , \quad (49)$$

即

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{im} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) e^{-\beta_m t_{ie}} = \bar{u}_i(z, t_{ie})。 \quad (50)$$

将式 (50) 两边同乘以  $\sin\left(\frac{M}{H}z\right)$  并在  $[0, H]$  上关

于  $z$  积分, 并利用傅里叶级数的正交性, 整理后可得

$$A_{im} = \frac{2}{H} e^{\beta_m t_{ie}} \int_0^H \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \bar{u}_i(z, t_{ie}) dz， \quad (51)$$

式中,  $\bar{u}_i(z, t_{ie})$  可由式 (47) 得到。

将式 (51) 代入式 (48) 即可得到第  $i$  个加载周期恒载阶段的孔压解为

$$\begin{aligned} \bar{u}'_i(z, t) = & \frac{2}{H} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) e^{-\beta_m(t-t_{ie})} \cdot \\ & \int_0^H \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \bar{u}_i(z, t_{ie}) dz。 \quad (52) \end{aligned}$$

可见, 第  $i$  个加载周期恒载阶段的解是与其线性加载阶段的解相关的。

这样, 在求得第 1 个加载周期的孔压解后, 可以依次求得第  $2, 3, \dots, i, \dots$  个加载周期的解。

### 2.3 加载完成后

根据式 (52) 可得最后一个线性加载阶段完成后地基的孔压:

$$\begin{aligned} \bar{u}_u(z, t) = & \frac{2}{H} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) e^{-\beta_m(t-t_u)} \cdot \\ & \int_0^H \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \bar{u}_i(z, t_u) dz \quad (t \geq t_u)。 \quad (53) \end{aligned}$$

## 3 固结度求解

求得了地基平均孔压  $\bar{u}(z, t)$  后, 任一时刻地基的固结度可表示为

$$U = \frac{\int_0^H (q - \bar{u}) dz}{\int_0^H q_u dz} = \frac{\int_0^H q dz}{\int_0^H q_u dz} - \frac{1}{\int_0^H q_u dz} \int_0^H \bar{u} dz。 \quad (54)$$

### 3.1 第 1 个加载周期

将式 (1)、(33)、(39) 代入式 (54) 可得第 1 个加载周期内地基固结度的表达式:

$0 \leq t < t_{ie}$  时,

$$U_1 = \frac{q_1}{q_u} \frac{t}{t_{ie}} - \frac{1}{q_u} \left\{ \frac{CH^2 q_1}{3Dt_{ie}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m t}}{M} \right\}。$$

$$\left[ Q_{lm} \frac{1}{\beta_m} (e^{\beta_m t} - 1) - \frac{2H^2}{M^3} \frac{Cq_l}{Dt_{le}} \right] \quad ; \quad (55)$$

$t_{le} \leq t < t_{2b}$  时,

$$U'_1 = \frac{q_l}{q_u} - \frac{1}{q_u} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{Q_{lm}}{\beta_m} (e^{\beta_m t_{le}} - 1) - \frac{2H^2}{M^3} \frac{Cq_l}{Dt_{le}} \right] \right. \\ \left. + \frac{e^{-\beta_m t}}{M} + \frac{2H^3}{M^4} \frac{Cq_l}{Dt_{le}} e^{-\beta_m (t-t_{le})} \right\} \quad . \quad (56)$$

### 3.2 第 $i$ 个加载周期

将式(1)、(47)、(52)代入式(54)可得第  $i$  个加载周期内地基固结度的表达式:

$t_{ib} \leq t < t_{ie}$  时,

$$U_i = \frac{q_{i-1}}{q_u} + \frac{q_i - q_{i-1}}{q_u} \frac{t - t_{ib}}{t_{ie} - t_{ib}} - \frac{1}{q_u} \cdot \left\{ \frac{CH^2 (q_i - q_{i-1})}{3D(t_{ie} - t_{ib})} + \right. \\ \left. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m (t-t_{ib})}}{M} \left[ \frac{Q_{im}}{\beta_m} (e^{\beta_m (t-t_{ib})} - 1) - \frac{2H^2 C (q_i - q_{i-1})}{DM^3 (t_{ie} - t_{ib})} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2}{H} \int_0^H \sin \left( \frac{M}{H} z \right) \bar{u}'_{(i-1)}(z, t_{ib}) dz \right] \right\} \quad ; \quad (57)$$

$t_{ie} \leq t < t_{(i+1)b}$  时,

$$U'_i = \frac{q_i}{q_u} - \frac{2}{q_u} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m (t-t_{ie})}}{HM} \int_0^H \sin \left( \frac{M}{H} z \right) \bar{u}_i(z, t_{ie}) dz \quad . \quad (58)$$

### 3.3 加载完成后

将式(1)、(53)代入式(54)可得加载全部完成后地基固结度的表达式:

$$U_u = 1 - \frac{2}{q_u} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m (t-t_u)}}{HM} \int_0^H \sin \left( \frac{M}{H} z \right) \bar{u}(z, t_u) dz \quad (t \geq t_u) \quad . \quad (59)$$

## 4 解的验证

前文采用新的求解方法及表达形式, 推导得到了本文固结问题的解析解, 下面采用退化及与已有解的比较来对本文解的正确性进行验证。

### 4.1 解的退化

复杂条件下的解能退化到简单条件下解是其正确的前提条件, 因此首先将本文解进行退化分析, 检验其正确性。

将常数  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  代入式(28)可得  $\beta_m$  的具体表达式为

$$\beta_m = \frac{E_s (n^2 - 1 + Y)}{\gamma_w} \cdot \\ k_{vs} k_{vc} \left[ \frac{r_e^2 F_c}{2k_{hs}} + \frac{r_e^2 - r_c^2}{8k_{hc}} \right] \left( \frac{M}{H} \right)^2 + (n^2 - 1) k_{vs} + k_{vc} \\ \left[ (n^2 - 1) k_{vc} + k_{vs} \right] \left[ \frac{r_e^2 F_c}{2k_{hs}} + \frac{r_e^2 - r_c^2}{8k_{hc}} \right] + n^4 \left( \frac{H}{M} \right)^2 \quad . \quad (60)$$

首先, 如果荷载是单级施加的, 即有  $t_{le} = t_u$ ,

$q_l = q_u$ , 式(55)及式(59)可变为

$0 \leq t < t_u$  时,

$$U = \frac{t}{t_u} - \frac{1}{q_u} \left\{ \frac{CH^2 q_u}{3Dt_u} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m t}}{M} \right. \\ \left. \left[ \frac{Q_m}{\beta_m} (e^{\beta_m t} - 1) - \frac{2H^2}{M^3} \frac{Cq_u}{Dt_u} \right] \right\} \quad ; \quad (61)$$

$t \geq t_u$  时,

$$U = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2 \beta_m} \cdot \frac{(e^{\beta_m t_u} - 1)}{t_u} e^{-\beta_m t} \quad . \quad (62)$$

进一步地, 如地基中附加应力随深度均匀分布,

即  $\sigma_{uT} = \sigma_{uB} = q_u$ , 地基固结度表达式可退化为

$0 \leq t < t_u$  时,

$$U = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{M} \left[ \frac{Q_{lm}}{\beta_m q_u} (e^{\beta_m t} - 1) - \frac{2CH^2}{DM^3 t_u} \right] e^{-\beta_m t} + \\ \frac{t}{t_u} - \frac{H^2 C}{3Dt_u} \quad ; \quad (63)$$

$t \geq t_u$  时,

$$U = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2 \beta_m} \cdot \frac{(e^{\beta_m t_u} - 1)}{t_u} e^{-\beta_m t} \quad . \quad (64)$$

更进一步地, 如荷载瞬时施加, 即  $t_u \rightarrow 0$ , 上式可进一步退化为

$$U = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-\beta_m t} \quad . \quad (65)$$

式(60)、(65)即为文献[15]中瞬时荷载下考虑桩体径向渗流时的解。

如  $k_{hc} \rightarrow \infty$ , 也就是不考虑桩体的径向井阻, 式(59)可以退化为

$$\beta_m = \frac{E_s (n^2 - 1 + Y)}{\gamma_w} \cdot \\ k_{vs} k_{vc} \frac{r_e^2 F_c}{2k_{hs}} \left( \frac{M}{H} \right)^2 + (n^2 - 1) k_{vs} + k_{vc} \\ \left[ (n^2 - 1) k_{vc} + k_{vs} \right] \frac{r_e^2 F_c}{2k_{hs}} + n^4 \left( \frac{H}{M} \right)^2 \quad . \quad (66)$$

式(64)、(66)即为 Xie 等解<sup>[11]</sup>, 在其解中考虑了桩体竖向渗流与竖向变形的协调作用, 但忽略桩体的径向渗流过程。可见, 本文解不仅考虑了桩体径向渗流, 同时也考虑了渗流与变形的协调。

而如果令  $k_{hc} = k_{hs}$ ,  $k_{vc} = k_{vs}$ ,  $Y = 1$ , 也就是说, 桩体与土体渗透系数相同, 压缩模量相同, 此种情况下复合地基相当于天然地基, 式(60)变为

$$\beta_m = \frac{M^2 k_{vs} E_s}{H^2 \gamma_w} = \left( \frac{M}{H} \right)^2 c_v \quad . \quad (67)$$

式(65)、(67)即为 Terzaghi 一维固结解。

另外, 如  $n \rightarrow \infty$ , 即桩的半径趋于 0 时, 也就是

在天然地基的情况下, 式(60)同样可退化为

$$\beta_m = \frac{M^2 k_{vs} E_s}{H^2 \gamma_w} = \left( \frac{M}{H} \right)^2 c_v \quad . \quad (68)$$

式(65)、(68)同样为Terzaghi一维固结解。

上述退化结果表明, 卢萌盟解<sup>[15]</sup>、Xie等解<sup>[11]</sup>及Terzaghi一维固结解都是本文解的特例。

#### 4.2 与已有解的比较

图3是本文解在不同加载过程时与文献[15]瞬时加载下的解的比较, 计算参数为 $n=4$ ,  $s=2$ ,  $H/r_c=20$ ,  $Y=5$ ,  $k_{hs}/k_{vs}=2$ ,  $k_{hc}/k_{vc}=1$ ,  $\delta=0.4$ ,  $k_{hc}/k_{hs}=500$ 。

图中 $T_{vu}$ 为 $t_u$ 时刻对应的地基竖向固结时间因子。可以看出, 当 $t_u \rightarrow 0$ 时, 本文解与文献[15]瞬时加载解基本上是重合的, 这进一步证明了本文解的正确性。从图还可以看出, 分级加载会减慢地基固结速度, 加载越慢, 地基固结越慢。

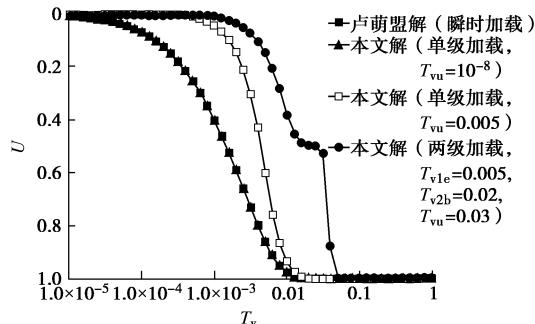


图3 本文解与文献[15]解的比较

Fig. 3 Comparison between present solution and that in Reference [15]

图4是本文解在不同桩体水平渗透系数时与文献[11]解的比较, 其解在瞬时加载及忽略桩体的径向渗流过程条件下考虑了桩体竖向渗流与竖向变形的协调作用。计算参数为:  $T_{vu}=10^{-8}$ ,  $n=2$ ,  $s=2$ ,  $H/r_c=20$ ,  $Y=5$ ,  $k_{hs}/k_{vs}=2$ ,  $\delta=0.4$ ,  $k_{hc}/k_{hs}=500$ 。

从图可以看出, 在桩体水平渗透系数比土体大得多时, 两者固结曲线基本上是重合的, 随着桩体水平渗透系数的减小, 两者差距逐渐增大。

图5是本文解在不同桩径比时与文献[10]的解的比较, 在文献[10]的解中考虑了加载过程以及扰动区水平渗透系数呈线性变化, 但没有考虑桩体径向渗流以及竖向渗流与变形的协调。计算参数为: 荷载分为两级施加,  $T_{v1e}=0.001$ ,  $T_{v2b}=0.002$ ,  $T_{vu}=0.003$ ,  $s=2$ ,  $H/r_c=20$ ,  $Y=5$ ,  $k_h/k_v=2$ ,  $k_e/k_h=100$ ,  $\delta=0.4$ 。

从图可以看出, 当 $n$ 取一个比较大的数时, 两解的固结曲线基本上是重合的, 这同样证明了本文解的正确性。从图还可以看出, 不考虑桩体径向渗流及变形协调地基固结比考虑时快, 桩径比越小, 两者的差

异越大。

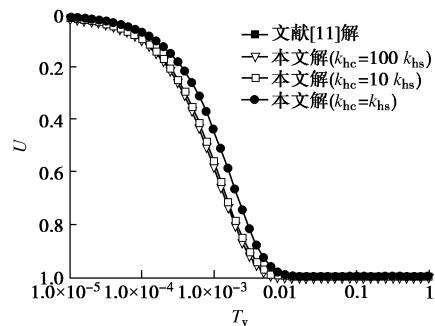


图4 本文解与文献[11]解的比较

Fig. 4 Comparison between present solution and that in Reference [11]

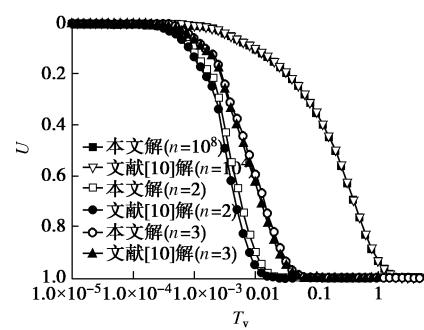


图5 本文解与文献[10]解的比较

Fig. 5 Comparison between present solution and that in Reference [10]

## 5 结 论

本文采用在传统复合地基固结解的基本形式基础上增加一个一次多项式的方法, 提出了一种新的解答形式及方法, 推导得到了荷载多级施加条件下考虑桩体径向渗流的散体材料桩复合地基固结解析解。通过对解的分析比较, 可以得出:

(1) 现有的单级荷载及瞬时荷载下考虑桩体径向渗流的解、考虑桩体竖向渗流与变形协调的解、太沙基一维固结解等都是本文解的特例, 这说明了本文解的正确性。

(2) 不考虑桩体径向渗流会高估地基固结速度, 桩体渗透系数约小, 桩径比越大, 差距越大; 地基加载过程越缓, 地基固结越慢。

(3) 本文提出的求解方法, 为复合地基固结的解析研究提供了一种新的思路, 完善了地基固结理论, 具有较大的理论及工程意义。

## 参考文献:

- [1] YOSHIKUNI H. Design and control of construction in the vertical drain method[M]. Tokyo: Gihoudou, 1979.
- [2] HAN J, YE S L. Simplified method for consolidation rate of

stone column reinforced foundations[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2001, **127**(7): 597 - 603.

[3] HAN J, YE S L. A theoretical solution for consolidation rates of stone column-reinforced foundations accounting for smear and well resistance effects[J]. The International Journal of Geomechanics, 2002, **2**(2): 135 - 151.

[4] 王瑞春, 谢康和. 双层散体材料桩复合地基固结解析理论[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(4): 418 - 422. (WANG Rui-chun, XIE Kang-he. Analytical theory for consolidation of double-layered composite ground with granular columns[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(4): 418 - 422. (in Chinese))

[5] 王瑞春, 谢康和, 关山海. 变荷载下散体材料桩复合地基固结解析解. 浙江大学学报(工学版), 2002, **36**(1): 12 - 16. (WANG Rui-chun, XIE Kang-he, GUAN Shan-hai. Analytical solutions for consolidation of composite ground with granular columns under time-dependent loading[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2002, **36**(1): 12 - 16. (in Chinese))

[6] 王瑞春, 谢康和, 唐晓武. 未打穿散体材料桩复合地基固结解析研究[J]. 公路交通科技, 2004, **21**(6): 12 - 16. (WANG Rui-chun, XIE Kang-he, TANG Xiao-wu. Analytical study on consolidation of composite ground with partially penetrated granular columns[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2004, **21**(6): 12 - 16. (in Chinese))

[7] 张玉国, 谢康和, 应宏伟, 等. 双面半透水边界的散体材料桩复合地基固结分析[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(3): 304 - 307. (ZHANG Yu-guo, XIE Kang-he, YING Hong-wei, et al. Consolidation analysis of composite foundation of granular columns with impeded boundaries[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(3): 304 - 307. (in Chinese))

[8] ZHANG Y G, XIE K H, WANG Z. Consolidation analysis of composite ground improved by granular columns considering variation of permeability coefficient of soil[J]. Ground Modification and Seismic Mitigation, ASCE, Geotechnical Special Publication, 2006, GSP152: 135 - 142.

[9] WALKER R, INDRARATNA B. Vertical drain consolidation with parabolic distribution of permeability in smear zone[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2006, **132**(7): 937 - 941.

[10] XIE Kang-he, LU Meng-meng, HU An-feng, et al. A general theoretical solution for the consolidation of a composite foundation[J]. Computers and Geotechnics. 2009, **36**: 24 - 30.

[11] XIE Kang-he, LU Meng-meng, LIU Gan-bin. Equal strain consolidation for stone columns reinforced foundation[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009, **33**: 1721 - 1735.

[12] 赵明华, 刘敦平, 张玲. 考虑桩体固结变形的散体材料桩复合地基固结解析计算[J]. 岩土力学, 2010, **31**(2): 483 - 488. (ZHAO Ming-hua, LIU Dun-ping, ZHANG Ling. Analytical solution for consolidation of composite ground with granular columns accounting for consolidation deformation of pile[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, **31**(2): 483 - 488. (in Chinese))

[13] 邢皓枫, 龚晓南, 杨晓军. 碎石桩复合地基固结简化分析[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(5): 521 - 524. (XING Hao-feng, GONG Xiao-nan, YANG Xiao-jun. Simplified analysis for consolidation of gravel-pile composite foundation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(5): 521 - 524. (in Chinese))

[14] 张玉国, 孙敏, 谢康和. 未打穿散体材料桩复合地基固结简化解研究[J]. 岩土力学, 2014, **35**(5): 1303 - 1310. (ZHANG Yu-guo, SUN Min, XIE Kang-he. Study of simplifying solution to consolidation of composite ground with partially penetrated granular columns[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(5): 1303 - 1310. (in Chinese))

[15] 卢萌盟, 谢康和, 刘干斌, 等. 考虑桩体固结和土体渗透性抛物线分布固结解[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(7): 1069 - 1074. (LU Meng-meng, XIE Kang-he, LIU Gan-bin, et al. Solutions for consolidation considering column consolidation and parabolic distribution of soil permeability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(7): 1069 - 1074. (in Chinese))

[16] LU Meng-meng, XIE Kang-he, GUO Biao. Consolidation theory for a composite foundation considering radial and vertical flows within the column and the variation of soil permeability within the disturbed soil zone[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2010, **47**: 207 - 217.

[17] 卢萌盟, 谢康和, 张玉国, 等. 考虑施工扰动和荷载效应的复合地基固结解[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(4): 549 - 554. (LU Meng-meng, XIE Kang-he, ZHANG Yu-guo, et al. Theoretical solution for consolidation of composite foundations considering construction disturbance and loading effect[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(4): 549 - 554. (in Chinese))