

DOI: 10.11779/CJGE201708006

边坡可靠性分析中 g-line 失效域及 Copula 优度评价研究

许晓亮^{1, 2}, 王乐华², 李建林^{1, 2}, 陈将宏², 覃万里², 邓华锋^{*2}

(1. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 三峡大学三峡库区地质灾害教育部重点实验室, 湖北 宜昌 443002)

摘要: 针对岩土体抗剪强度参数联合分布模型中 Copula 优度评价问题, 借助 g-line 给出了一种边坡失效域的抗剪强度参数表征方法, 并利用积分途径得到了不同 Copula 及不同安全系数条件下算例边坡的失效概率, 以此探讨了不同 Copula 计算结果的差异性, 重点分析了 $S_n(p_c)$ 、AIC、RMSE 及 Bias 指标下各 Copula 的评价效果, 并以上述各指标值为评价对象, 分别计算了各 Copula 的熵权系数, 从而给出了一种加权组合的 Copula 形式。结果表明, 二次多项式拟合 g-line 的效果良好, 此时边坡失效域可由抗剪强度参数独立表征; 常用的评价指标得出的最优 Copula 结果不唯一, 当不能有效地识别最优 Copula 时, 可采用加权组合的 Copula 进行可靠性分析, 能减小计算误差, 有效地消除不同 Copula 引起的失效概率差异性, 也能避免因直接采用某些 Copula 而引起的对边坡可靠度偏保守或者过高估计的问题。

关键词: Copula; 均质边坡; 失效概率; g-line; 熵权

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2017)08-1398-10

作者简介: 许晓亮(1989-), 男, 博士研究生, 主要从事岩土工程可靠性方面的研究, E-mail: sichuan106@163.com。

Investigation of failure domain by using g-line and optimum evaluation of Copulas in slope reliability analysis

XU Xiao-liang^{1, 2}, WANG Le-hua², LI Jian-lin^{1, 2}, CHEN Jiang-hong², QIN Wan-li², DENG Hua-feng²

(1. Key Laboratory of Geomechanics and Embankment Engineering, Ministry of Education, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Key Laboratory of Geological Hazards in Three Gorges Reservoir Area, Ministry of Education, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

Abstract: The identification of optimum evaluation for different Copulas in shear strength parameters of soils (i.e., cohesion c and internal friction angle φ) is a challenge. According to the g-line, an approach to determine the failure domain of soils in terms of shear strength parameters is given. Thus, the failure probability of an instanced slope can be calculated directly by using the integral approach under different Copulas and safety factors, meantime, the differences of the results are discussed. The effects of evaluation of different Copulas are discussed mainly in terms of $S_n(p_c)$, AIC, RMSE and Bias. After employing the above-mentioned index values as the evaluation objects, the entropy weights of the selected Copulas are calculated, and then a weighted combined Copula is proposed. The results show that using a quadratic polynomial can fit the g-line well, and the failure domain of slope can be represented by the shear strength parameters respectively. The optimum copula is not accordant when using the common evaluation indices, such as AIC, RMSE, Bias and $S_n(p_c)$. When the optimum Copula is not identified accurately, a weighted combined Copula is recommended because it can effectively control the discrepancies and avoid the excessive or conservative estimation of slope reliability.

Key words: Copula; homogeneous slope; failure probability; g-line curve; entropy weight

0 引言

岩土工程具有显著的不确定性, 如失稳机理、破坏模式的复杂多变、安全评价准则的模糊性和随机性, 尤其是岩土体参数的变异性等^[1-2]。对于边坡岩体来讲, 常用的确定性分析方法, 如极限平衡法并不能很好地解决上述不确定性问题^[3]。而可靠度理论作为研究不确定性问题的重要手段越来越受到国内外学者的重视^[4-5]。可靠度计算时, 先要研究变量的相关性以确

定其联合概率分布。以往研究往往忽略变量的相关性^[6-7] (默认为相互独立), 或者将其转变了独立正态变量后建立联合分布^[8-9]。

Copula理论^[8, 10]可以方便地建立任意边缘分布下

基金项目: 水利部公益性行业科研专项经费项目(201401029); 国家自然科学基金重点项目(51439003)

收稿日期: 2016-04-18

*通讯作者 (E-mail: dhf8010@ctgu.edu.cn)

多个随机变量的联合分布, 其能允许变量具有任意相关结构, 也避免非正态变量的转换问题。十多年来, 该理论在金融^[11]、生物医学^[12]及水文学^[13]中得到了广泛的应用和发展。在岩土工程中, 唐小松等^[7, 14-15]借助Copula构建了基桩荷载-位移双曲线模型中两参数的联合分布函数, 探讨了不同类型的Copula对边坡可靠性结果的影响, 并将这种研究推广到系统结构的可靠度分析上^[16]; Wu^[6]利用Copula产生抗剪强度参数随机样本来计算边坡的失效概率, 分析了土工合成黏土垫层(GCL)抗剪强度参数的相关性^[17], 借助Copula探讨了黏聚力、内摩擦角及重度三变量相关性问题^[18]; 杨超等^[19-20]通过分析岩体质量 Q 值与变形参数及抗剪强度参数的关系, 尝试对一些难以测定的参数进行预估。Motamedi等^[21]将Copula模型成功应用于滑坡概率模型中; Marchant等^[22]借助Copula给出了一个更加普遍的土体参数预估模型。

利用Copula虽能方便地建立变量的联合分布, 但由于受到样本数量的限制, 选择最优Copula仍需要进一步研究^[23]。文献[23]给出了基于Bootstrap的最优模型识别方法, 但类似的研究仍不多见。本文分别采用AIC信息准则^[24]、均方根误差(RMSE)和Bias指标^[25]、Cramér-von Mises统计法^[26-27]评价了所选Copula的拟合优度, 并以此为评价对象计算了各Copula的熵权系数, 进而给出了一种加权组合的Copula。借助g-line^[28]给出了一种确定边坡失效概率的方法, 依此探讨了包括加权组合形式在内的各Copula计算结果的差异性。

1 岩土体参数的Copula理论

1.1 Copula简介

由Sklar^[29]定理可知, Copula能将不同类型的边缘分布连接起来以构建变量的联合分布。 n 元Copula C 是定义在 $[0, 1]^n$ 空间上均匀分布的联合分布函数, 其概率表达形式如下:

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n), \quad (1)$$

式中, U_i 和 u_i 为第*i*个均匀随机变量和对应的取值, P 表示概率值。

一般地, 通过Copula构建的*n*维随机变量联合分布函数 $F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ 为

$$F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_i(x_i), \dots, F_n(x_n); \theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n), \quad (2)$$

式中, C 为Copula, $F_i(x_i)$ 为第*i*个随机变量服从的边缘分布函数, θ_i 为Copula的参数, 其表征各随机变量之间的相关性。可见, Copula能够将边缘分布与变量相关结构分开研究, 这使得其能够方便地构建所需的联合分布函数。

在岩土工程中, 抗剪强度参数 c 、 $\tan\varphi$ 是边坡稳定性计算和可靠性分析中的重要因素, 利用单参数Copula可得到其二维联合分布函数:

$$F(c, \tan\varphi) = C(F_1(c), F_2(\tan\varphi); \theta). \quad (3)$$

其对应的联合密度函数 $f(c, \tan\varphi)$ 为

$$f(c, \tan\varphi) = f_1(c)f_2(\tan\varphi)c(F_1(c), F_2(\tan\varphi); \theta), \quad (4)$$

式中, $F_1(c)$ 、 $F_2(\tan\varphi)$ 分别为 c 、 $\tan\varphi$ 所服从的边缘分布函数, $f_1(c)$ 和 $f_2(\tan\varphi)$ 为 c 、 $\tan\varphi$ 对应的密度函数, $c(F_1(c), F_2(\tan\varphi); \theta)$ 为Copula的密度函数, 可由 $F(c, \tan\varphi)$ 求导得出, θ 为Copula参数。

1.2 Copula构建变量联合分布的步骤

以岩土体抗剪强度参数 c 、 $\tan\varphi$ 为例, 利用Copula构建变量的联合分布函数主要包括以下3个步骤:

(1) 各随机变量边缘分布的估计。对于抗剪强度参数 c 和 $\tan\varphi$ 来讲, 以往研究表明其服从正态分布、对数正态分布或三角分布、伽玛分布等^[6], 图1给出了小浪底水利枢纽工程大坝防渗体1区土体抗剪强度参数实测值^[30]的分布拟合曲线, 结果显示正态分布或对数正态分布拟合效果良好, 这与已有结论相符^[31], 此外, 在统计资料不充分时采用对数正态分布能更符合实际情况^[31]。

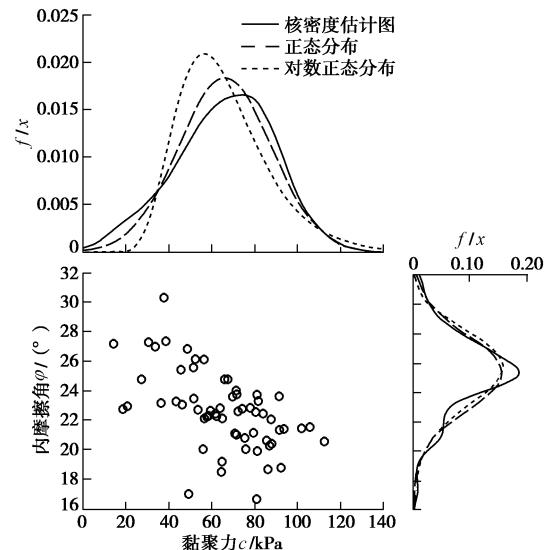


图1 实测抗剪强度参数散点图与不同分布形式对比图

Fig. 1 Scatter diagram of measured parameters of shear strength and comparison among different distribution forms

(2) Copula的选定。常用的二维Copula有椭圆族(Elliptical class)和阿基米德族(Archimedes class)两类, 其中Gaussian和t Copula属于椭圆族, 阿基米德族包括了常见的Frank、Clayton、Gumbel Copula等, 此外, 也有其他Copula, 如Plackett Copula等。选取Copula时, 即要重视函数相关结构是否与实际变量相关性相符, 又要考虑到所选函数应便于计算, 具有代

表性。

岩土体抗剪强度参数间大多具有负相关性和对称结构^[6-7, 15, 18], 但也有研究表明其存在正相关性和非对称结构^[6, 32]。鉴于此, 本文从椭圆族中选取了 Gaussian Copula, 从阿基米德族中分别选取了 Frank Copula、Clayton Copula、Gumbel Copula, 同时选取 Plackett Copula 作为另一类函数。上述 Copula 中, 除了 Clayton 和 Gumbel Copula 外都是对称型 Copula, 而且所选 Copula 能有效地模拟参数负相关性, 对于不符合负相关特性的 Copula 进行一个简单的转换即可(具体见文第 5 节所示)。

(3) Copula 相关参数的确定。一般各随机变量之间并不独立, 如土体抗剪强度参数间存在负相关性, 相关系数可介于-0.24~ -0.7 之间^[6]。Copula 参数 θ 可通过 Pearson 线性相关系数、Kendall 或 Spearman 秩相关系数求得^[10], 本文采用与边缘分布无关的 Kendall 秩相关系数 τ 对 Copula 参数进行估计。对于椭圆族 Copula, 其相关性参数 θ 与 τ 具有明确的关系式:

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\theta) \quad . \quad (5)$$

而对于阿基米德族 Copula, θ 与 τ 的关系如下:

$$\tau = \int_0^1 \int_0^1 C(U_1, U_2; \theta) dC(U_1, U_2; \theta) - 1 = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi_\theta(t)}{\phi'_\theta(t)} dt \quad , \quad (6)$$

式中, $\phi_\theta(t)$ 和 $\phi'_\theta(t)$ 分别为阿基米德 Copula 的生成元及其导数^[6]。得出 τ 后可由式(5)、(6)求得相应的 θ 。对于抗剪强度参数, τ 可由样本数据计算得出:

$$\tau = \frac{N}{2} \sum_{i < j} \text{sign}[(x_{1i} - x_{1j})(x_{2i} - x_{2j})] \quad . \quad (7)$$

式中 N 为样本总数, $i, j=1, 2, \dots, N$; $\text{sign}(x)$ 为符号函数, 当 $x>0$ 时取 1, 否则取-1。此外, 对于 Plackett Copula, 其参数 θ 表示一种交乘比率^[6, 10, 33], 可按文献[33, 34]中方法确定。

1.3 最优 Copula 识别方法

不同 Copula 的结构不同, 其得出的结果也会有所差异, 需要从中寻优。以下给出几种判别方法

AIC^[24]准则在工程中最为常用, 其表达式为

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln c(u_{1i}, u_{2i}; \theta) + 2k \quad , \quad (8)$$

式中, N 为样本总数, $c(u_{1i}, u_{2i}; \theta)$ 为 Copula 密度函数, k 为 Copula 参数个数, 单参数时 $k=1$, 具有较小 AIC 值的 Copula 相对更优。

文献[26, 27]中给出了 Cramér-von Mises 统计量 S_n , 其表示经验 Copula 值(基准值)与观测点处 Copula 值差的平方和:

$$S_n = \sum_{i=1}^N \left[C_n(U_1^i, U_2^i) - C_{\theta_n}(U_1^i, U_2^i) \right]^2 \quad , \quad (9)$$

式中, C_n 为经验 Copula 值, C_{θ_n} 表示在样本点处参数为 θ_n 的 Copula 值, n 为样本数。在实际评估 S_n 时, 常用参数 P_c ^[27] 来判断 Copula 模型合理性, $P_c(0 < P_c < 1)$ 可被理解为接受某种 Copula 的概率大小, 即 P_c 值越大的 Copula 相对越容易被接受, 相反 P_c 值越小的 Copula 越容易被拒绝。

均方根误差 (RMSE) 指的是模拟值和实测值之间样本的标准方差, Bias 指标为模拟值和实测值相对于基准值的累计差值, 其各自表达式如下^[25]:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (P_{e_i} - P_i)^2} \quad , \quad (10)$$

$$Bias = \sum_{i=1}^n \frac{P_{e_i} - P_i}{P_{e_i}} \quad , \quad (11)$$

式中, P_i 表示联合观测值样本的 Copula 值, P_{e_i} 表示相应的多变量经验概率, n 为样本数。RMSE, Bias 的值越小, 表示 Copula 拟合效果越好。

2 边坡 g-line 临界域及失效概率计算

2.1 g-line 介绍

2011 年, Klar 等^[28] 提出了一种边坡安全系数(F_S)的几何定义方法, 将边坡的极限平衡状态下抗剪强度参数 c 和 $\tan\varphi$ 的关系曲线称为 g-line, 见图 2。在 g-line 上, 各个点处于极限平衡状态, $F_S=1$; g-line 以上部分 $F_S>1$, 为稳定区域, 而 g-line 以下部分 $F_S<1$, 为失效区域 S , 文中称为 g-line 失效域, 如图中阴影部分所示。由此定义 F_S 的几何表达式为

$$F_S = \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{c_a}{c_b} = \frac{\tan\varphi_a}{\tan\varphi_b} \quad , \quad (12)$$

式中, $|OA|$, $|OB|$ 分别为 A , B 两点到原点的距离, A 点为 $c - \tan\varphi$ 空间中任意点, B 点为 OA 与 g-line 的交点, 如图 2 所示。

对于某一均质边坡(重度为常数), 确定其 g-line 的实质是当 c 值给定后, 在极限平衡状态下的众多滑面对应的 $\tan\varphi$ 中寻求最大 $\tan\varphi$ 值过程。文中采用工程中常用的简化毕肖普法在 Slide 软件中进行极限平衡计算, 相应的 g-line 具体步骤如下:

(1) 建立边坡几何模型, 给定重度, 确定潜在滑带的搜索范围。

(2) 令 $c=0$, 给定不同的 $\tan\varphi$ 试算安全系数, 当某一滑带 $F_S=1.0$ 时(计算中控制 F_S 的误差小于 0.0005), 对应的 $\tan\varphi$ 即为所求。对于均质边坡来讲, 此时对应的 φ 值即为边坡坡角。

(3) 令 c 以步长 d 递增, 计算每次边坡 $F_S=1.0$ 时的对应的 $\tan\varphi$ 值, 直到 $\tan\varphi=0$ 为止。每次计算中当边坡内某滑带 $F_S=1.0$ 时, 其他滑带 $F_S>1.0$, 故而求

得的 $\tan\varphi$ 值为所有滑面对应 $\tan\varphi$ 中的最大值。

(4) 统计每次计算中边坡 $F_s=1.0$ 对用的 c , $\tan\varphi$ 值, 并进行拟合分析。

对于任意形状的均质边坡, 给定重度后, 总能在极限平衡状态下找到对应的 c - $\tan\varphi$ 值, 进而能唯一确定出其对应的 g-line。换言之, g-line 可视为边坡的固有特性, 其表征了边坡的极限平衡状态, 借助这一特性可方便地进行稳定性计算和可靠性分析。但需指出的是 g-line 目前仅适用于均质边坡(坝、堤、渠道等工程)的安全系数计算和可靠度分析, 本文重在介绍这种探究思路, 对于多层材料的非均质坡体, 其存在多条 g-line, 此时该方法的应用情况还需进一步探索。

2.2 g-line 拟合形状

g-line 决定了边坡失效域, 其形状也直接影响边坡可靠性分析的结果, 但自 Klar 等^[28]以来, 很少有对 g-line 形状的研究。本文分别设定了表 1 中不同坡高 H 、坡角 β 和重度 γ 的边坡, 计算了极限平衡状态下的 c , $\tan\varphi$ 值。

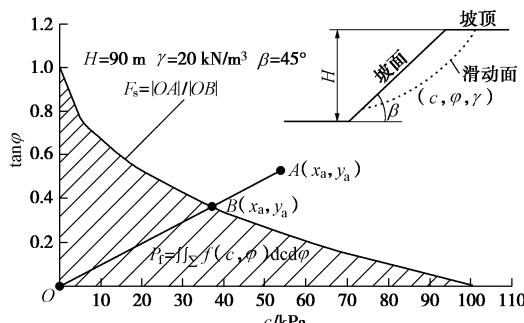


图 2 基于 g-line 定义的 F_s 和 P_f 示意图

Fig. 2 Sketch maps of F_s and P_f defined by g-line

分析认为, 用二次多项式拟合一般均质边坡的 g-line 能取得良好的效果。其表达式为

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad (13)$$

式中, y 表示 $\tan\varphi$, x 表示 c , A , B , C 为待定系数。由表 1 和图 3 (a) 知, g-line 二次多项式拟合决定系数 (R^2) 一般介于 0.92~0.99 之间, 对于高陡边坡, 更高次的多项式可取得更优的拟合效果, 见图 3 (b)。

2.3 表征失效域的抗剪强度参数范围

图 2 给出了坡高 30 m, 坡角 45°, 重度为 20 kN/m³ 边坡的 g-line 及其确定的失效域 S 。一般边坡与此类似,

表 1 不同条件下 g-line 二次多项式拟合 R^2 统计值

Table 1 Statistical values of R^2 of g-line curve fitting in the form of quadratic polynomial under different conditions

H/m	$\gamma=18 \text{ kN/m}^3$			$\gamma=20 \text{ kN/m}^3$				$\gamma=22 \text{ kN/m}^3$	
	$\beta=30^\circ$	$\beta=45^\circ$	$\beta=60^\circ$	$\beta=30^\circ$	$\beta=45^\circ$	$\beta=60^\circ$	$\beta=30^\circ$	$\beta=45^\circ$	$\beta=60^\circ$
30	0.9868	0.9786	0.9441	0.9873	0.9790	0.9470	0.9877	0.9796	0.9483
60	0.9878	0.9788	0.9411	0.9882	0.9792	0.9436	0.9849	0.9735	0.9304
90	0.9844	0.9747	0.9118	0.9894	0.9857	0.9345	0.9862	0.9770	0.9148

g-line 均可按二次多项式 $y = Ax^2 + Bx + C$ 表示, 进而 g-line 失效域 S 可表示为 $y \leq Ax^2 + Bx + C$ 。显然当 $x=0$ 时, y 取最大值, 对应 $\tan\varphi$ 中 φ 取最大值, 即边坡坡角 β ; 同样地, 失效域 S 等价于, $x \leq [-B - \sqrt{B^2 - 4A(C - y)}]/2A$, 其中 $A > 0$, $B < 0$, 当且仅当 $y=0$ 时, x 取到最大值, 即黏聚力 c 的最大取值为 $c_{\max} = [-B - \sqrt{B^2 - 4AC}]/2A$ 。可见, 用二次多项式表示 g-line 时, 可用抗剪强度参数各自独立表征边坡的失效域。

2.4 g-line 失效域内的边坡失效概率积分

在失效域内对 Copula 构建的 c 、 $\tan\varphi$ 联合概率密度函数进行积分便可得出相应的失效概率, 其比可靠性指标更能反映实际的可靠程度^[16]。本文采用一种积分转换的方式^[7] 来计算失效概率 P_f 。

由 g-line 可以得出边坡极限状态的功能函数:

$$Z = Ac^2 + Bc + C - \tan\varphi \quad (14)$$

当 $Z=0$ 时对应极限状态方程, 即 g-line, 当 $Z<0$ 时, $F_s<1$, 对应有失效域 S , 进而边坡失效概率为

$$P_f = \iint_S f(c, \tan\varphi) dc d\tan\varphi \quad (15)$$

将式 (4) 代入式 (15) 得

$$P_f = \int_0^{c_{\max}} \int_0^{g(c)} f_1(c) f_2(\tan\varphi) c (F_1(c), F_2(\tan\varphi); \theta) dc d\tan\varphi, \quad (16)$$

式中, c_{\max} 为黏聚力最大取值, $g(c)$ 为 g-line 的表达式, 即 $g(c) = \tan\varphi = Ac^2 + Bc + C$ 。

由于 Copula 的复杂性, 会造成上述二重积分计算困难, 通过定义 Copula 一阶导数 $L(u_1, u_2; \theta) = \partial C(u_1, u_2; \theta) / \partial u_1$, 式 (16) 可以转换为一重积分的形式^[17]:

$$P_f = \int_S f_1(c) L(F_1(c), F_2(\tan\varphi); \theta) dc \quad (17)$$

将表征失效域的参数范围及 g-line 二次多项式代入式 (17) 中, 得到了 P_f 最终表达式:

$$P_f = \int_0^{c_{\max}} f_1(c) L(F_1(c), F_2(Ac^2 + Bc + C); \theta) dc \quad (18)$$

3 Copula 熵权计算

熵最早出现于热力学中, 1948 年 Shannon 将其引入信息传输不确定性的研究中, 提出信息熵的概念^[35]。

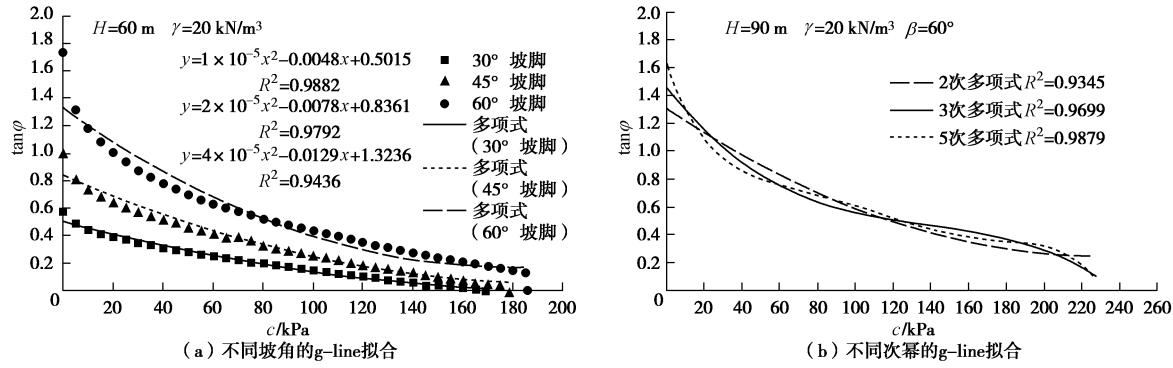


图 3 g-line 的二次多项式拟合

Fig. 3 g-line fitting in the form of quadratic polynomial

在信息论中, 熵是系统无序程度的度量, 它还是数据有效程度的度量。因而, 熵可以用来确定评价指标的权重。当被评价对象在某一指标上对应的值相差较大时, 对应的熵值越小, 说明该指标提供的有效信息更多, 其权重越大, 反之越小^[35]。

对于 p 个评价对象及 q 个评价指标的系统, 有 $p \times q$ 阶的原始矩阵, 矩阵元素 X_{ij} 为第 i 个评价对象在第 j 个指标上的评价值。对 q 个评价指标进行熵权计算时, 一般可分为 3 个步骤^[36]:

(1) 原始矩阵标准化对原矩阵元素 X_{ij} 进行无量纲化处理, 得到了新的 $p \times q$ 阶矩阵, 元素记为 Y_{ij} , 其中对于效益型(越大越优型)指标:

$$Y_{ij} = \frac{X_{ij} - \min_j(X_{ij})}{\max_j(X_{ij}) - \min_j(X_{ij})}, \quad (19)$$

对于成本型(越小越优型)指标:

$$Y_{ij} = \frac{\max_j(X_{ij}) - X_{ij}}{\max_j(X_{ij}) - \min_j(X_{ij})}. \quad (20)$$

(2) 计算熵第 j 个评价指标的熵 H_j 为

$$H_j = -k \sum_{i=1}^p f_{ij} \ln f_{ij}, \quad (21)$$

式中, $f_{ij} = Y_{ij} / \sum_{i=1}^p Y_{ij}$, $k = 1 / \ln p$, 当 $f_{ij} = 0$ 时, 令 $f_{ij} \ln f_{ij} = 0$, $i=1, 2, \dots, p$; $j=1, 2, \dots, q$ 。

(3) 计算熵权得出第 j 个指标的熵之后, 便可以求得其对应的熵权 λ_j :

$$\lambda_j = \frac{1 - H_j}{\sum_{j=1}^q (1 - H_j)}, \quad (22)$$

式中, $0 \leq \lambda_j \leq 1$, $\sum_{j=1}^q \lambda_j = 1$ 。

不同评价方法(如 AIC、 S_n/P_c 、RMSE 和 Bias 值等)得出的最优 Copula 结果有所差异, 为此采用熵权分析方法, 尝试以 AIC、 S_n/P_c 、RMSE 和 Bias 等值为评价对象来计算所选取 5 个 Copula 的权重系数, 依此给出了一种加权组合形式的 Copula。以抗剪强度参数 c 和 $\tan\varphi$ 的二维 Copula 为例, 加权组合后, 其联合分

布函数及密度函数表达式如下:

$$F_{EW}(c, \varphi) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i C_i(F_1(c), F_2(\varphi); \theta_i), \quad (23)$$

$$f_{EW}(c, \varphi) = f_1(c) f_2(\tan\varphi) \sum_{i=1}^5 \lambda_i c_i(F_1(c), F_2(\varphi); \theta_i), \quad (24)$$

式中, λ_i , C_i , c_i , θ_i 分别为所选第 i 个 Copula 的权重、分布函数、密度函数及参数, $i=1, \dots, 5$, $f_1(c)$ 和 $f_2(\tan\varphi)$ 为 c , $\tan\varphi$ 对应的密度函数。同样地, 将式(24)中的 f_{EW} 在 g-line 所确定的失效域内积分, 便得到了加权组合 Copula 下的边坡失效概率。

4 边坡算例

4.1 边坡模型及其 g-line 失效域

以某均质边坡概化模型为算例, 如图 4 所示, 采用二维 Copula 分析时, 选取对可靠性最敏感的抗剪强度参数 c 和 $\tan\varphi$ 为随机变量, 如 2.2 节中所述, 选取 c 和 $\tan\varphi$ 的分布类型为对数正态分布。通过原位大型直剪试验, 获得了 4 组 c 和 $\tan\varphi$ 的参数值, 见表 2, 其均值分别为 20.5 kPa 和 0.364, 相应的变异系数分别取为 0.3 和 0.15^[37]; c 和 $\tan\varphi$ 间的相关系数取为 -0.5。将其余变异性较小的边坡形状参数及重度视为确定性的量, 其中, 坡高 $H=30.0$ m, 坡角 $\beta=30.0^\circ$, 重度 $\gamma=18$ kN/m³。

表 2 4 组原位直剪试验结果

Table 2 Results of four groups of in-situ direct shear tests

组号	黏聚力 c /kPa	内摩擦角 $\varphi/^\circ$	$\tan\varphi$
1	22.65	21.03	0.384
2	24.83	18.22	0.329
3	15.37	17.16	0.309
4	18.96	23.42	0.433

图 4 给出了该边坡模型的 g-line 及其二次多项式拟合的表达式, R^2 为 0.9868。由 2.3 节可知此时表征边坡失效域的黏聚力 c 的参数范围, 即 $0 < c < c_{\max}$, $c_{\max} = [-B - \sqrt{B^2 - 4AC}] / 2A = 81.04$ kPa。

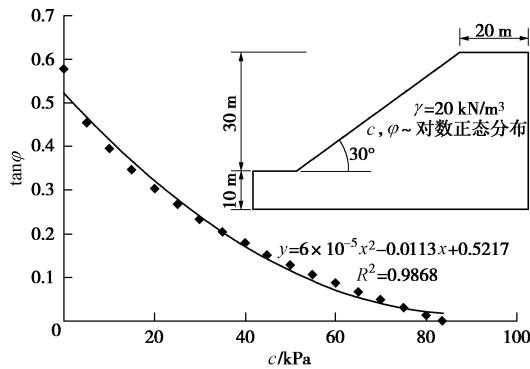
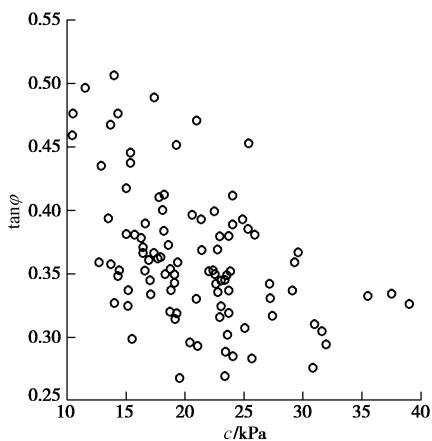


图 4 算例边坡及其 g-line

Fig. 4 Geometry of instanced slope and its g-line curves

4.2 随机样本数据处理

根据 4.1 节中变量 c , $\tan\phi$ 的分布类型和数字特征, 随机生成 100 个观测值作为分析数据, 并设置固定的随机种子以便生成相同观测量, 变量 c , $\tan\phi$ 的分布如图 5 所示。

图 5 生成 c 和 $\tan\phi$ 的随机样本Fig. 5 Random samples of c and $\tan\phi$

考虑到个别的 Copula 不支持参数的负相关性, 将变量 $\tan\phi$ 进行变换, 令 $h = 2\text{mean}(\tan\phi) - \tan\phi$, $\text{mean}(\cdot)$ 表示平均值。处理后的 h 与原来 $\tan\phi$ 的具有相同的均值和标准差。此时, 相应地也需要将 g-line 及其确定的失效域对应做一变换, 边坡极限状态的功能函数如下:

$$Z = 2\text{mean}(\tan\phi) - (Ac^2 + Bc + C) - \tan\phi \quad (25)$$

变量数据转换后, 对应转换后的 g-line 的失效域如图 6 阴影部分。

4.3 Copula 优度评价

对于所选 5 种 Copula, 经过随机样本数据处理后利用式 (7) 求得变量 c 和 $\tan\phi$ 的 Kendall 秩相关系数 $\tau = 0.3244$, 再由 2.2 节中所述的各 Copula 参数的确定方法可得到相应的 θ 值, 见表 3。为了便于对各 Copula 进行优度评价, 根据式 (8)、(10)、(11) 及文献[29,

30] 中所述方法, 分别得出了 5 种 Copula 的 p_c 、AIC、RMSE 和 Bias 等指标, 见表 3。

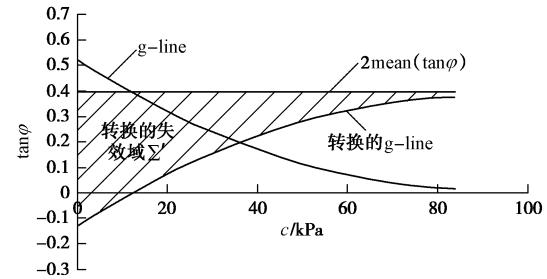


图 6 转换的 g-line 及其失效域

Fig. 6 Transported g-line and new failure domain

表 3 不同 Copula 的相关性参数 θ 及评价指标Table 3 Values of AIC, p_c and the correlative parameter θ of different Copula functions

Family	copula 参数 θ	p_c	AIC	RMSE	Bias
Gaussian	0.4851	0.8549	-24.8350	0.0126	7.3955
Frank	3.1762	0.6906	-21.6030	0.0135	9.0927
Clayton	0.9517	0.7685	-25.1813	0.0162	6.6843
Gumbel	1.4758	0.4884	-17.3335	0.0145	10.2157
Plackett	4.5730	0.2329	-21.7789	0.0129	8.4596

一般地, 某一 Copula 对应的 p_c 值大于 0.05 时, 该 Copula 可以被接受^[6]。表 3 中, 最小的 p_c 值为 0.2329, 说明 5 种 Copula 均可被接受。此外, 不同 Copula 的评价指标值比较接近, 其中, Clayton Copula 具有较小的 AIC 和 Bias 值, Gaussian Copula 具有较小的 RMSE 值, 说明不同评价途径得出的最优 Copula 不唯一。综合各评价指标值可初步判定, 在本次模拟中, Gaussian 和 Clayton Copula 的拟合相对更优, Frank 和 Plackett Copula 次之, 而 Gumbel Copula 的拟合度较差。便于直观观察, 图 7 给出了不同 Copula 构造的抗剪强度参数联合密度等值图。为了进一步定量评价各 Copula 的优度, 采用熵权方法计算了所选 Copula 的权重, 见表 4。各 Copula 权重由大到小的顺序依次为 Clayton > Gaussian > Plackett > Frank > Gumbel, 可见, 熵权评价结果与上述初步判断的结果相符。

4.4 失效概率计算

得到 5 种 Copula 的权重后, 由式 (24) 可得到加权后的 Copula 密度函数, 再将表 3 中计算的相关性参数 θ 分别代入, 利用式 (17)、(18) 在抗剪强度参数表征的 g-line 失效域范围内直接积分, 可得出算例边坡在各 Copula 下的失效概率, 见表 4。

为了验证结果合理性, 在 g-line 表征的功能函数下, 利用一阶可靠度方法 (FORM) 及蒙特卡洛方法 (MCS) 计算了相应的失效概率, 见表 4。在 MCS

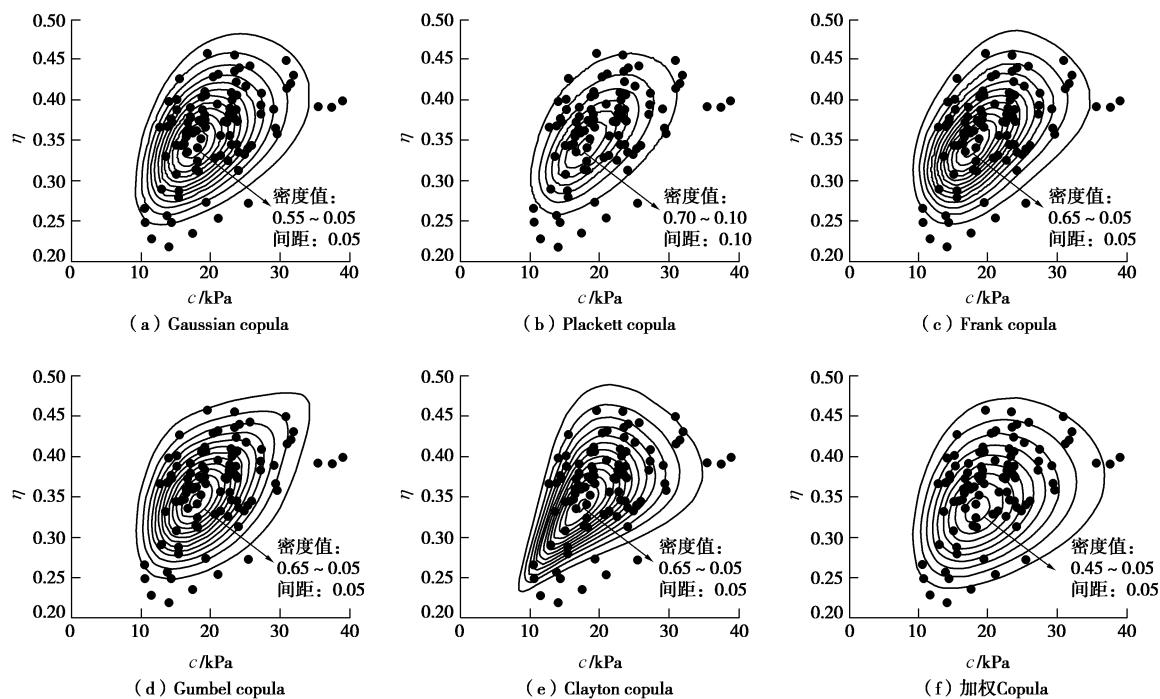


图 7 不同 Copula 构造的抗剪强度参数联合密度函数的等值图

Fig. 7 Contour plots of joint PDFs of shear strength parameters (c and f) associated with different Copulas

表 4 不同方法所得算例边坡的失效概率及相对误差

Table 4 Failure probabilities and relative errors of instanced slope calculated by different methods

计算方法	Copula 直接积分法						FORM	MCS 10000 个随机样本
	Gaussian	Frank	Clayton	Gumbel	Plackett	加权 Copula		
熵权系数	0.1901	0.1728	0.3020	0.1585	0.1766	1	—	—
P_f	0.2066	0.2016	0.1974	0.1938	0.1924	0.1984	0.2044	0.1986
相对误差/%	1.08	1.37	3.42	5.19	5.87	2.93	0	—
	4.03	1.51	0.60	2.42	3.12	0.10	—	0

表 5 不同安全系数下算例边坡失效概率及 R 值Table 5 Failure probabilities and values of R of instanced slope calculated under different factors of safety

No.	F_s	$P_f/G/R$					加权 Copula P_f/R
		Gaussian	Frank	Clayton	Gumbel	Plackett	
1	1.143	0.2066/0.1901/1.04	0.2016/0.1728/1.02	0.1974/0.3020/0.99	0.1938/0.1585/0.98	0.1924/0.1766/0.97	0.1984/1
2	1.228	0.0748/0.2209/1.01	0.0769/0.1892/1.04	0.0793/0.1763/1.07	0.0683/0.2059/0.92	0.0727/0.2077/0.98	0.0742/1
3	1.315	0.0273/0.2148/0.92	0.0318/0.1860/1.07	0.0336/0.2056/1.13	0.0252/0.1945/0.85	0.0309/0.1991/1.04	0.0297/1
4	1.403	0.0037/0.2536/0.58	0.0073/0.2043/1.14	0.0084/0.1682/1.31	0.0037/0.1910/0.58	0.0092/0.1829/1.44	0.0064/1
5	1.490	0.0006/0.1906/0.40	0.0020/0.1736/1.33	0.0023/0.2953/1.53	0.0007/0.1634/0.47	0.0024/0.1771/1.60	0.0015/1

计算中, 仍将 c 与 $\tan\varphi$ 间的相关系数取为-0.5, 采用 Ilich 方法^[38]生成了 10000 组随即样本进行分析。表 4 中还给出了 Copula 积分方法相对于 FORM 及 MCS 方法所得失效概率的误差大小。本例中, 应用 Copula 直接积分法与 FORM、MCS 法得到的失效概率比较接近, 5 种 Copula 得到的边坡失效概率相对于 FORM 和 MCS 法的最大误差值分别仅为 5.87% (Plackett

Copula) 和 4.03% (Gaussian Copula), 也说明了在 g-line 失效域对 Copula 构建的 $c-f$ 联合概率密度积分进行边坡可靠度分析的合理性。对于加权 Copula 来讲, 其相对于 FORM 和 MCS 法的最大误差分别为 2.93% 和 0.10%, 显然相对加权之前的最大误差值有所减小。此外, 由图 7 知, 相对其他五种 Copula, 加权 Copula 构建的联合密度等值能覆盖更多的样本数据点。因而,

在不能准确识别最优 Copula 时, 加权 Copula 考虑了每种 Copula 的贡献, 其计算结果更具有综合性。

5 讨 论

文中第4节得出了算例边坡某一状态下的失效概率, 此时边坡由极限平衡法得出的安全系数 $F_s=1.143$ 。为了进一步考察不同安全系数下由各 Copula 得出的边坡失效概率变化特点, 再次借助算例边坡, 表5给出了在相同变异系数(c 和 $\tan\varphi$ 变异系数分别为 0.3 和 0.15)条件下 5 组具有不同 c , $\tan\varphi$ 均值的边坡安全系数, 同时表5中还给出了不同 Copula 的边坡失效概率及其与加权组合的 Copula 计算结果的比值(用“ R ”表示)。便于更直观的比较, 图8给了不同安全系数下各 Copula 对应的边坡失效概率的对比图。

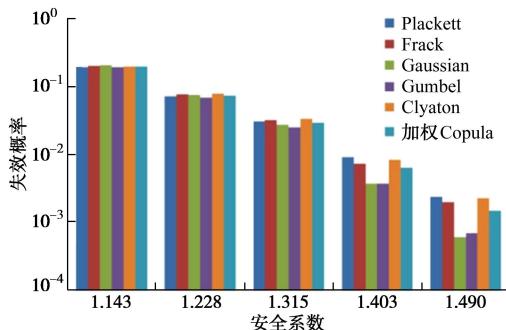


图8 不同 Copula 下算例边坡的失效概率与安全系数

Fig. 8 Relationship between failure probability and safety factor of instanced slope calculated from different Copulas

很显然, 边坡的失效概率随着安全系数的增加而减小, 但不同安全系数下 Copula 所得失效概率具有明显的差异性。安全系数较小时, 各 Copula 计算结果比较接近, 其差异性不显著, 随着安全系数的增大, 各 Copula 计算结果的差异性迅速增加, 如 $F_s=1.490$ 时, 利用 Plackett Copula 得出的失效概率为 Gaussian Copula 的 4 倍。比值 R 随着安全系数增大逐渐偏离于“1”进一步说明了这种差异性的增加。

此外, 在安全系数较高时, Gaussian 和 Gumbel Copula 得出的失效概率相对偏小, 而 Clayton 和 Plackett Copula 得出的失效概率相对偏大。因次, 直接应用 Clayton 或 Plackett Copula 会取得相对保守的结果, 而直接应用 Gaussian 或 Gumbel Copula 将会高估了边坡的可靠度。

Copula 自身结构不同造成了相应失效概率具有一定的差异性, 尤其在低失效概率(高安全系数)时, 失效概率计算结果对 Copula 类型比较敏感。加权组合的 Copula 得出的边坡失效概率综合了不同 Copula 的计算结果, 从而避免了上述差异性问题, 也能避免因为直接采用文中所选的某些 Copula 而引起的对边坡

可靠度偏保守或者过高估计的问题。

6 结 论

(1) 对于某一任意给定几何形状的边坡来讲, g-line 表征了其极限平衡状态, 借助该曲线可以得到边坡的失效域。g-line 的二次多项式拟合效果良好, 此时边坡失效域可由抗剪强度参数各自独立表征。将 Copula 建立的 $c - \tan\varphi$ 联合密度函数在该失效域上积分能方便地得出边坡的失效概率。

(2) 常用的 $S_n(p_c)$ 、AIC、RMSE 和 Bias 等途径得出的最优 Copula 不唯一, 在不能准确识别最优 Copula 时, 可利用评价指标得出各 Copula 的熵权系数, 依此构造的加权组合形式 Copula 计算结果更具有综合性, 同时也能减小计算误差。

(3) 不同 Copula 计算结果具有差异性, 其随着边坡安全系数的增大而显著增加。加权组合的 Copula 得出的边坡失效概率综合了各 Copula 的计算结果, 从而避免了不同 Copula 引起的失效概率差异性问题, 也能避免因直接采用某些 Copula 而引起的对边坡可靠度偏保守或者过高估计的问题。

参考文献:

- [1] 高大钊. 岩土工程的回顾与前瞻[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001. (GAO Da-zhao. A review and prospect of geotechnical engineering[M]. Beijing: China Communications Press, 2001. (in Chinese))
- [2] LI D Q, TANG X S, ZHOU C B, et al. Uncertainty analysis of correlated non-normal geotechnical parameters using Gaussian copula[J]. Sci China Tech Sci, 2012, 55: 3081 - 3089.
- [3] 姚耀武, 陈东伟. 土坡稳定可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 80 - 87. (YAO Yao-wu, CHEN Dong-wei. Reliability analysis of slope stability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 16(2): 80 - 87. (in Chinese))
- [4] LI D Q, CHEN Y F, LU W B, et al. Stochastic response surface method for reliability analysis of rock slopes involving correlated non-normal variables[J]. Computers and Geotechnics, 2011, 38(1): 58 - 68.
- [5] SL 386—2007 水利水电工程边坡设计规范[S]. 2007. (SL 386—2007 Design code for engineered slopes in water resources and hydropower projects[S]. 2007. (in Chinese))
- [6] WU X Z. Probabilistic slope stability analysis by a copula-based sampling method[J]. Computational Geosciences, 2013, 17(5): 739 - 755.

- [7] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于Copula函数的抗剪强度参数间相关性模拟及边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(12): 2284 – 2291. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Modeling dependence between shear strength parameters using Copulas and its effect on slope reliability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(12): 2284 – 2291. (in Chinese))
- [8] NATAF A. Détermination des distributions de probabilité dont les marges sont données[J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1962, **225**: 42 – 43.
- [9] LOW B K. Reliability analysis of rock slopes involving correlated nonnormals[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2007, **44**(6): 922 – 935.
- [10] NELSEN R B. An introduction to copulas[M]. New York: Springer, 2006.
- [11] CHERUBINI U, LUCIANO E, VECCHIATO W. Copula methods in finance[M]. England: John Wiley & Sons Ltd, 2004.
- [12] ESCARELA G, CARRIERE J F. Fitting competing risks with an assumed Copula[J]. Statistical Methods in Medical Research, 2003, **12**(4): 333 – 349.
- [13] 郭生练, 闫宝伟, 肖义, 等. Copula 函数在多变量水文分析计算中的应用及研究进展[J]. 水文, 2008, **28**(3): 1 – 7. (GUO Sheng-lian, YAN Bao-wei, XIAO Yi, et al. Multivariate hydrological analysis and estimation[J]. Journal of China Hydrology, 2008, **28**(3): 1 – 7. (in Chinese))
- [14] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于 Copula 函数的基桩荷载 – 位移双曲线概率分析[J]. 岩土力学, 2012, **33**(1): 171 – 178. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Probabilistic analysis of load-displacement hyperbolic curves of single pile using Copula[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, **33**(1): 171 – 178. (in Chinese))
- [15] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 不完备概率信息条件下边坡可靠度分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(6): 1027 – 1034. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Reliability analysis of slopes with incomplete probability information[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(6): 1027 – 1034. (in Chinese))
- [16] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 联合分布函数构造的Copula 函数方法及结构可靠度分析[J]. 工程力学, 2013, **30**(12): 8 – 17, 42. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Modeling bivariate distribution using copulas and its application to component reliability analysis[J]. Engineering Mechanics, 2013, **30**(12): 8 – 17, 42. (in Chinese))
- [17] WU X Z. Using copulas to characterise the dependency of GCL shear strengths[J]. Geosynthetics International, 2013, **20**(5): 344 – 357.
- [18] WU X Z. Trivariate analysis of soil ranking-correlated characteristics and its application to probabilistic stability assessments in geotechnical engineering problems[J]. Soils Found, 2013, **53**(4): 540 – 56.
- [19] 杨超, 黄达, 张永兴, 等. 基于 Copula 理论的岩体抗剪强度参数估值[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, **32**(12): 2463 – 2470. (YANG Chao, HUANG Da, ZHANG Yong-xing, et al. Estimation of shear strength parameters of rock mass based on copula theory[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, **32**(12): 2463 – 2470. (in Chinese))
- [20] 杨超, 黄达, 张永兴. 基于 Copula 理论岩体质量 Q 值及波速与变形模量多变量相关性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, **33**(3): 80 – 86. (YANG Chao, HUANG Da, ZHANG Yong-xing. Multivariable correlation of rock mass quality index Q system value, wave velocity and deformation modulus based on copula theory[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, **33**(3): 80 – 86. (in Chinese))
- [21] MOTAMEDIM, LIANG RY. Probabilistic landslide hazard assessment using Copula modeling technique[J]. Landslides, 2014, **11**(4): 565 – 573.
- [22] MARCHANT B P, SABY N P A, JOLIVET C C, et al. Spatial prediction of soil properties with copulas[J]. Geoderma, 2011, **162**(3/4): 327 – 34.
- [23] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于 Bootstrap 方法的岩土体参数联合分布模型识别[J]. 岩土力学, 2015, **36**(4): 913 – 922. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Bootstrap method for joint probability distribution identification of correlated geotechnical parameters[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(4): 913 – 922. (in Chinese))
- [24] AKAIKE H. A new look at the statistical model identification[J]. IEEE Trans Autom Control, 1974, AC-19(6): 16 – 722.
- [25] ZHANG L. Multivariate hydrological frequency analysis and risk mapping[D]. Baton Rouge: Louisiana State University, 2005.
- [26] GENEST C, REMILLARD B, BEAUDOIN D. Goodness-

- of-fit tests for copulas: a review and a power study[J]. *Insur Math Econ*, 2009, **44**: 199 – 214.
- [27] KOJADINOVIC I, YAN J. Modeling multivariate distributions with continuous margins using the copula R Package[J]. *J Stat Soft*, 2010, **34**(9): 1 – 20.
- [28] AKLAR, EAHARONOV, BKALDERON-ASAEL, et al. Analytical and observational relations between landslide volume and surface area[J]. *Journal of Geophysical Research*, 2011, **116**(F2): 1 – 10.
- [29] SKLAR A. Fonctions de répartition à dimensions éteursmarges[J]. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 1959, **8**: 229 – 231.
- [30] 于清波. 土石坝坝坡稳定可靠度研究及其工程应用[D]. 南京: 河海大学, 2006. (YU Qing-bo. Researches on the reliability of the stability of the earth-rock fill dam and its application[D]. Nanjing: Hohai University, 2006. (in Chinese))
- [31] 陈立宏, 陈祖煜, 刘金梅. 土体抗剪强度指标的概率分布类型研究[J]. *岩土力学*, 2005, **26**(1): 37 – 40. (CHEN Li-hong, CHEN Zu-yu, LIU Jin-mei. Probability distribution of soil strength[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, **26**(1): 37 – 40. (in Chinese))
- [32] HATA Y, ICHII K, TSUCHIDA T, et al. A practical method for identifying parameters in the seismic design of embankments[J]. *Georisk: Assess Manag Risk Eng Syst Geohazards*, 2008, **2**(1): 28 – 40.
- [33] SONG S B, VIJAY P S. Frequency analysis of droughts using the Plackett copula and parameter estimation by genetic algorithm[J]. *Stoch Environ Res Risk Assess*, 2010, **24**: 783 – 805.
- [34] YAN J. Enjoy the joy of copulas: with a package copula[J]. *J Stat Soft*, 2007, **21**(4): 1 – 21.
- [35] 周礼胜. 基于模糊层次分析法和信息熵的应急物资库存管理研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学管理学院, 2010: 34 – 36. (ZHOU Li-sheng. Study on emergency material inventory management based on FAHP and entropy[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2010: 34 – 36. (in Chinese))
- [36] 邹志红, 孙靖南, 任广平. 模糊评价因子的熵权法赋权及其在水质评价中的应用[J]. *环境科学学报*, 2005, **25**(4): 552 – 556. (ZOU Zhi-hong, SUN Jing-nan, REN Guang-ping. Study and application on the entropy method for determination of weight of evaluating indicators in Fuzzy Synthetic Evaluation for Water Quality Assessment[J]. *Acta Scientiae Circumstantiae*, 2005, **25**(4): 552 – 556. (in Chinese))
- [37] 李远耀. 三峡库区渐进式库岸滑坡的预测预报研究[D]. 武汉: 中国地质大学, 2010. (LI Yuan-yao. Research on prediction and forecast of progressive bank landslide in the Three Gorges Reservoir[D]. Wuhan: Hohai University, 2006. (in Chinese))
- [38] ILICH N. A matching algorithm for generation of statistically dependent random variables with arbitrary marginals[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, **192**(2): 468 – 478.