

DOI: 10.11779/CJGE201707001

竖向荷载作用下散体地基应力解析方法

曹文贵¹, 贺 敏¹, 王江营²

(1. 湖南大学岩土工程研究所, 湖南 长沙 410082; 2. 长沙理工大学水利工程学院, 湖南 长沙 410114)

摘要: 竖向荷载作用下地基应力分析方法是基础工程设计与计算的重要依据, 现有方法不能反映实际地基土的散体介质特性。为此, 依据现有散体介质应力传递研究成果, 首先假定竖向集中荷载作用下散体地基应力呈半无限曲线圆锥体形状向下传递, 将竖向集中荷载作用下散体地基应力分析问题转化为锥顶作用竖向集中荷载的曲线圆锥应力分析问题, 从探讨直线圆锥应力分析方法入手, 获得了半无限曲线圆锥应力的求解方法, 进而提出了竖向集中荷载作用下散体地基应力的解析方法; 然后, 将圆形竖向均布荷载作用下散体地基应力分析问题视为竖向集中荷载作用下散体地基应力的积分求解问题, 建立了圆形竖向均布荷载作用下散体地基应力分析方法, 该方法较充分地反映了地基土的散体介质特点, 较现有 Boussinesq 解具有明显的优越性; 最后, 采用该方法、Boussinesq 解以及颗粒流数值分析方法对圆形竖向均布荷载作用下散体地基应力分布进行了对比分析, 表明了本文方法的合理性与可行性。

关键词: 散体地基; 竖向集中荷载; 圆形竖向均布荷载; 应力传递; Boussinesq 解; 颗粒流数值分析

中图分类号: TU431 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2017)07-1165-08

作者简介: 曹文贵(1963-), 男, 湖南南县人, 博士后, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程教学与研究工作。E-mail: cwglyp@hnu.edu.cn。

Analytical method for stress of granular medium foundation under vertical load

CAO Wen-gui¹, HE Min¹, WANG Jiang-ying²

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China; 2. School of Hydraulic Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: The analytical method for stress of foundation under vertical load is an important basis of design and computation in foundation engineering. However, the existing methods cannot reflect the properties of granular media for foundation soils. Therefore, according to the current researches on stress transmission of granular media, firstly, supposing that the stress in a granular medium foundation under vertical point load always diffuses downward with a curve cone, an analytical problem for the stress of the granular medium foundation under vertical point load is converted into that of a curve cone under vertical point load at its top, and a stress-solving method for a curve cone is obtained by discussing the stress-solving method for a line cone, hence, an analytical method for the stress of the granular medium foundation under vertical point load is proposed. Then, an analytical method for the stress of the granular medium foundation under circular vertical uniform load is established by regarding the problem as the integral solution of the stress of the granular medium foundation under vertical point load, which can adequately report the characteristics of the granular media of foundation soils and shows obvious superiority to the Boussinesq solution. Finally, by simultaneously adopting the proposed analytical method and Boussinesq solution as well as the numerical analytical method with PFC^{3D}, a comparative analysis of stress distribution in granular medium foundation under circular vertical uniform load is carried out, and it is indicated that the proposed method is reasonable and feasible.

Key words: granular medium foundation; vertical point load; circular vertical uniform load; stress transmission; Boussinesq solution; numerical analysis with PFC^{3D}

0 引言

地基沉降分析是地基处理与基础工程设计的重要依据, 竖向附加荷载作用下的地基附加应力分析是其关键。目前地基附加应力几乎全部采用基于连续固体介质力学理论的 Boussinesq 解进行分析^[1], 可是, 地

基土体绝非连续固体介质, 是无抗拉强度或抗拉强度甚微的不连续散体, 其应力传递机理及其分布规律与

基金项目: 国家自然科学基金项目(51378198, 51508039); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20130161110017)

收稿日期: 2016-03-28

连续固体介质迥然不同,因此,采用 Boussinesq 解分析地基附加应力必然存在极大的不合理性,这实际已为国内外众多学者和工程技术人员^[3-19]充分认识。为此,深入研究并发展能充分反映具有不连续散体性质特点的地基附加应力分析方法具有重要的理论与工程实际意义,这正是本文研究的出发点。

目前,国内外众多学者^[2-13]对散粒体介质应力传递机理及其分布规律进行了较深入的试验与理论研究,其主要包括自重和外荷载作用下散体介质应力传递与分布规律两方面。对于前者,Roberts 通过观测粮仓底面所受压力的分布规律,首次发现了所谓“粮仓效应”,而且,Janssen^[2]于 1895 年提出了著名的 Janssen 公式,从理论上解释了“粮仓效应”,为散体介质应力传递机理与分布规律的研究奠定了较坚实的基础,然而,其并未考虑在外荷载作用下的散体介质应力传递问题,无法应用于地基附加应力分析;对于后者,Bouchaud 等^[3]、Cates 等^[4]基于弹塑性理论建立了无黏性颗粒体应力传递的双曲线偏微分方程,并获得了轴对称于荷载作用方向的双曲线楔形或锥形的应力传递范围及其形状; Da Silva 等^[5]基于二维颗粒体光弹模型试验,发现了以荷载作用线为对称轴的抛物线圆锥(台)应力传递范围及其形状;孙广忠^[6]通过室内竖向荷载作用下颗粒体模型试验发现了无黏性颗粒体应力传递的扩散效应; Geng 等^[7]通过圆盘和五边形组成的二维堆积体的光弹模拟试验,发现了其在竖向荷载作用下的应力分布峰值宽度与深度之间呈线性关系;文献[8~12]基于随机理论提出了散体介质应力传递分析的随机“q 模型”,但该模型认为颗粒之间的应力传递仅与颗粒的排列情况有关,以及应力传递只沿重力方向进行,忽视了散体颗粒应力亦可沿水平方向传递的客观实际情况;韦珊珊^[13]利用声波测试技术,研究了竖向荷载作用下散体地基的应力分布与传递规律,描述了土体工程性质(包括土类,含水率和密度等)变化对附加应力传递与分布的影响,并表明地基土体在竖向荷载作用下的附加应力扩散程度较 Boussinesq 解有明显减小的定性变化规律。上述研究对定性分析外荷载作用下散体介质应力传递机理与分布规律具有明显的作用,但均未提出在外荷载作用下散体介质的应力分布的分析方法,无法定量分析散体介质在外荷载作用下的应力分布,因而其应用受到限制。于是,为了定量分析散体介质在外荷载作用下的应力分布,一些学者^[14-18]就外荷载作用下散体介质的应力分析方法进行了初步研究。代志宏等^[14]从土体微观结构角度入手,以土颗粒作为隔离体进行静力学分析,并考虑颗粒粒径、颗粒之间胶结力和颗粒体静水压力等影响,发现了地基土体宏观附加应力呈圆锥状

向下传递与扩散的规律,为定量分析散体介质在外荷载作用下的应力分布分析方法研究提供了依据,但由于该模型参数多而复杂,也未能给出明确而可行的参数确定方法,难以实现其工程应用;廖智强等^[15]基于概率论思想提出了一种无须任何复杂模型及假设的附加应力概率论解析方法,虽然其分析结果与 Boussinesq 解较接近,但明显具有不合理性,因为散体在外荷载作用下的应力传递并非随机概率分析问题;刘源等^[16]利用焦散线法和激光全息光弹试验方法对二维颗粒堆积体在竖向荷载作用下的应力传递规律进行了试验研究,获得了不同深度的竖向应力分布曲线,虽然其验证了前述随机“q 模型”的合理性,但其仅适用于二维问题分析,并不适用于三维问题分析;蒋红英等^[17-18]利用随机理论建立了无黏性有序对称排列的二维颗粒堆积体应力的传导-扩散方程,虽具有一定的合理性,但无法解决无序排列的三维颗粒堆积体应力传递规律的分析问题。

综合上面所述,虽然目前研究对散体在荷载作用下的应力传递机理与分布规律有了较深入认识,但尚未建立出在荷载作用下的散体应力传递及分布的实用分析方法,无法应用于具有不连续散体特点的地基附加应力分析,有必要就此展开进一步研究,这正是本文研究的核心内容。为此,本文将在现有散体介质的应力传递机理研究基础上,考虑地基土体的不连续散体性质特点,对竖向附加荷载作用下地基应力分析方法展开深入研究,发展更加合理的地基附加应力分析方法,以期完善地基附加应力分析的理论与方法。

1 散体地基应力传递机理及分析模型

国内外许多学者^[3-19]已就竖向荷载作用下颗粒堆积体的应力传递机理进行了较深入研究,获得了一个重要的结论即竖向集中荷载作用下的半无限空间散体介质的应力呈曲线圆锥体向下扩散,如图 1 所示,其圆锥对称平面与圆锥表面交线为光滑曲线,它或为双曲线^[3-4],或为抛物线^[5, 16]等等。因此,在表面竖向集中荷载作用下的散体地基可分为曲线圆锥体以内和以外两部分,应力只在曲线圆锥体内进行传递,而曲线圆锥体以外部分没有应力传递,于是在表面竖向集中荷载作用下的散体地基应力可视为锥顶作用竖向集中力的曲线圆锥体的应力求解问题。

为了解决上述曲线圆锥体的应力求解问题,首先须解决曲线圆锥体形状的描述问题,为此,根据前述分析研究,曲线圆锥体是由其对称平面与圆锥体表面之交线沿曲线圆锥体对称轴即荷载作用线旋转形成的,因此,只要能用数学方程描述出上述交线的形状,

曲线圆锥体的形状就能准确地进行描述。可是, 尽管上述交线为一光滑旋转曲线, 但其形状与地基土的工程性质(包括土的类型、土颗粒直径与形状以及表面粗糙度、地基土颗粒级配等等)存在密切关系, 由于不同地基土的工程性质不同, 因此, 该交线难以采用确定的显式函数表示, 但可以采用较特殊的隐式函数进行描述。为了研究方便, 这里设定为较统一的隐式函数, 具体形式可表示为

$$r = f(z) \quad . \quad (1)$$

(r, z) 为曲线圆锥表面上任一点坐标, 如图 1 所示。当然, 式(1)的具体函数形式有待进一步研究。

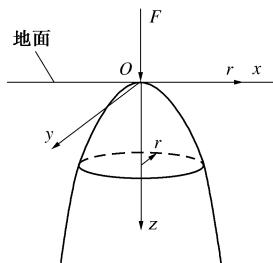


图 1 坚向集中荷载作用下地基应力传递模型

Fig. 1 Model for stress transmission of foundation under vertical point load

上述已介绍坚向集中荷载作用下的散体地基应力传递机理及其分析模型, 但是, 在工程实际中, 建筑地基往往更多地表现为坚向分布荷载作用下的地基问题, 因此, 有必要探讨分布荷载作用下散体地基应力传递机理及其分析模型。考虑到坚向分布荷载作用下地基应力传递机理及其分析模型与建筑物基础基底形状具有紧密关系, 地基应力传递机理实际上非常复杂, 本文仅讨论圆形坚向均布荷载作用下的散体地基应力分析方法, 因此, 下述仅探讨圆形坚向均布荷载作用下散体地基应力传递机理及其分析模型。为此, 依据前述坚向集中荷载作用下散体地基应力传递机理及其分析模型, 总结归纳出圆形坚向均布荷载作用下散体地基应力传递机理及其分析模型, 具体内容如下:

(1) 在表面圆形坚向均布荷载作用下, 散体地基应力以曲线圆台形状向下传递与扩散, 曲线圆台侧表面形状与图 1 曲线圆锥的相似, 如图 2 所示, 可表示为

$$r = r_0 + f(z) \quad , \quad (2)$$

式中, r_0 为地基表面均布荷载作用域的半径。

(2) 将半无限曲线圆台顶面圆形域划分为若干微元, 如果视微元上分布荷载为集中荷载, 则半无限曲线圆台内应力可视为各微元集中荷载作用于如图 1 所示曲线圆锥顶引起应力的叠加。

(3) 在表面圆形坚向均布荷载作用下, 散体地基

影响范围(即半无限曲线圆台)以外没有产生应力。

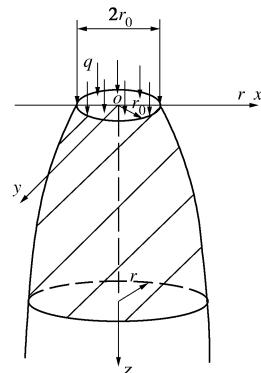


图 2 圆形坚向均布荷载作用下地基应力分析模型

Fig. 2 Analysis model for stress of foundation under circular vertical uniform load

上述即为本文提出的坚向荷载作用下散体地基附加应力分析模型。由此可以看出, 考虑散体介质特点的圆形坚向均布荷载作用下地基附加应力分析问题可转化为顶面作用圆形坚向均布荷载的半无限圆台的应力求解问题, 为此, 下面将做进一步介绍。

2 圆形坚向均布荷载作用下的散体地基应力分析方法

由前述分析可知, 圆形坚向均布荷载作用下散体地基应力分析问题可转化为如图 2 所示的半无限曲线圆台应力求解问题, 而半无限曲线圆台应力求解问题又可转化为坚向集中荷载作用于半无限曲线圆锥顶的应力求解问题, 因此, 本文将从探讨半无限曲线圆锥应力求解方法入手, 进而解决圆形坚向均布荷载作用下散体地基应力分析方法问题。

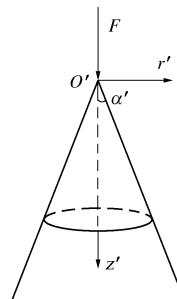


图 3 坚向集中荷载作用下直线圆锥应力分析模型

Fig. 3 Stress analysis model for line cone under vertical point load

2.1 集中荷载作用下曲线圆锥应力求解方法

为了获得半无限曲线圆锥应力的求解方法, 本文将首先从探讨半无限直线圆锥(如图 3 所示)应力求解方法入手, 为此, 如果选取其位移函数 ζ , 则须满足相容方程:

$$\nabla^4 \zeta = 0 \quad , \quad (3)$$

式中,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \quad . \quad (4)$$

于是, 直线圆锥各应力分量可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r'} &= \frac{\partial}{\partial z'} \left(\mu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r'^2} \right) \zeta , \\ \sigma_{\theta'} &= \frac{\partial}{\partial z'} \left(\mu \nabla^2 - \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \right) \zeta , \\ \sigma_{z'} &= \frac{\partial}{\partial z'} \left((2-\mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \zeta , \\ \tau_{z'r'} &= \frac{\partial}{\partial r'} \left((1-\mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \zeta , \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中, μ 为材料泊松比, $\tau_{z'r'} = \tau_{r'z'} = 0$ 。由于直线圆锥的轴对称性, 则 $\tau_{\theta'r'} = \tau_{r'\theta'} = \tau_{z'\theta'} = \tau_{\theta'z'} = 0$ 。为了利用式(3)确定出各应力分量, 必须确定出合理而满足边界条件的位移函数 ζ , 为此, 试选 3 个函数 $\zeta_1 = R'$, $\zeta_2 = z' \ln r'$, $\zeta_3 = z' \ln(R' + z')$ (其中 $R' = \sqrt{r'^2 + z'^2}$) [20] 的线性组合作为位移函数:

$$\zeta = A_1 \zeta_1 + A_2 \zeta_2 + A_3 \zeta_3 \quad , \quad (6)$$

式中, A_1 , A_2 和 A_3 分别为待定常数。将式(6)代入式(5)可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r'} &= A_1 \frac{z'}{R'^3} \left[(1-2\mu) - \frac{3r'^2}{R'^2} \right] + A_2 \frac{1}{r'^2} + A_3 \left(B_1 - B_2 \right), \\ \sigma_{\theta'} &= A_1 (1-2\mu) \frac{z'}{R'^3} - A_2 \frac{1}{r'^2} + A_3 \left[\frac{(1-2\mu)z'}{R'^3} - B_1 \right], \\ \sigma_{z'} &= A_1 \left[-\frac{3z'^3}{R'^5} - (1-2\mu) \frac{z'}{R'^3} \right] + A_3 \left(\frac{2\mu z'}{R'^3} - \frac{3z'^3}{R'^5} \right), \\ \tau_{z'r'} &= A_3 \frac{r'}{R'^3} \left(2\mu - \frac{3z'^2}{R'^2} \right) - A_1 \frac{r'}{R'^3} \left[\frac{3z'^2}{R'^2} + (1-2\mu) \right], \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{R'(R'+z')} , \\ B_2 &= \frac{(3+2\mu)z'}{R'^3} - \frac{3z'^3}{R'^5} . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由此可以看出, 式(7)包含 A_1 , A_2 和 A_3 3 个待定常数, 须根据边界条件确定。由于直线圆锥侧表面法线方向余弦为 $l=0$, $m=\cos\alpha'$, $n=-\sin\alpha'$ (如图 3 所示, α' 为直线圆锥顶角的一半), 于是, 由于直线圆锥侧表面上任意点满足关系式 $r'=z'\tan\alpha'$, 根据直线圆锥侧表面所受外力为 0 的边界条件可得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{r'})_{r'=z'\tan\alpha'} \cos\alpha' - (\tau_{z'r'})_{r'=z'\tan\alpha'} \sin\alpha' &= 0, \\ -(\sigma_{z'})_{r'=z'\tan\alpha'} \sin\alpha' + (\tau_{r'z'})_{r'=z'\tan\alpha'} \cos\alpha' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

另外, 根据圆锥受集中力 F 作用的竖向 (即圆锥对称轴线方向) 平衡条件, 即任意垂直于圆锥对称轴截面

上的正应力 σ_z 在截面上的面积积分必须与集中力 F 的大小相等, 可得

$$\int_0^{r'_1} (2\pi r' dr') \sigma_z = F \quad , \quad (10)$$

式中, r'_1 为圆锥任意截面圆半径, 可表示为 $r'_1 = z' \tan\alpha'$ 。于是, 将式(7)代入式(9)、(10)可得关于 A_1 , A_2 和 A_3 的 3 个方程, 联立求解可确定出这 3 个待定常数, 可表示为

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{F}{2\pi} \frac{(1-2\mu)\cos\alpha' - 2\mu}{1 - (1-2\mu)\cos\alpha' + (1-2\mu)\cos^2\alpha' - \cos^3\alpha'}, \\ A_2 &= 0, \\ A_3 &= -\frac{F}{2\pi} \frac{(1+\cos\alpha')(1-2\mu)}{1 - (1-2\mu)\cos\alpha' + (1-2\mu)\cos^2\alpha' - \cos^3\alpha'} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

再将式(11)代入式(7)即可得锥顶受集中力 F 作用的直线圆锥体的应力解, 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r'} &= \frac{F}{2\pi k} \left[(1-2\mu) \left(\frac{\cos\alpha' z'}{R'^3} - \frac{1+\cos\alpha'}{R'(R'+z')} \right) + \frac{3z'r'^2}{R'^5} \right] , \\ \sigma_{\theta'} &= \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{(1-2\mu)(1+\cos\alpha')}{R'(R'+z')} - \frac{(1-2\mu)z'}{R'^3} \right] , \\ \sigma_{z'} &= \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{3z'^3}{R'^5} - \frac{(1-2\mu)\cos\alpha' z'}{R'^3} \right] , \\ \tau_{z'r'} &= \tau_{r'z'} = \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{3z'^2 r'}{R'^5} - \frac{(1-2\mu)\cos\alpha' r'}{R'^3} \right] , \\ \tau_{\theta'r'} &= \tau_{r'\theta'} = \tau_{z'\theta'} = \tau_{\theta'z'} = 0 , \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中,

$$k = 1 - (1-2\mu)\cos\alpha' + (1-2\mu)\cos^2\alpha' - \cos^3\alpha' \quad (13)$$

前述已获得直线圆锥应力解即式(12), 于是, 本文将在此基础上探讨曲线圆锥体的应力求解方法。为此, 任取垂直于曲线圆锥对称轴的截面 AB (该截面实际为一圆), 并作相切于该截面圆的直线圆锥, 如图 4 所示, 直线圆锥顶点为 O' , 相应曲线圆锥顶点为 O 。根据圣维南原理, 在顶点 O 作用集中荷载 F 的曲线圆锥在截面 AB 上的应力与在顶点 O' 作用集中荷载 F 的直线圆锥在截面 AB 上的应力相同, 因此, 曲线圆锥受集中力 F 作用的应力求解可通过前述直线圆锥应力解进行坐标变换获得。为此, 下面具体介绍曲线圆锥受集中力 F 作用的应力求解过程与方法。

首先, 分析坐标系 $O'r'\theta'z'$ 与坐标系 $Or\theta z$ 之间的关系。如图 4 所示, 由于直线 $O'B$ 与两坐标系 z' 和 z 轴的夹角相等, 因此, 可得

$$\frac{f(z)}{z'} = f'(z) \quad . \quad (14)$$

如果令 $z' = g(z)$, 则由式(14)可得

$$z' = g(z) = \frac{f(z)}{f'(z)} \quad . \quad (15)$$

另外, 由图 4 可知

$$\cos \alpha' = \frac{z'}{\overline{O'B}} = \frac{z'}{\sqrt{f^2(z) + z'^2}} \quad . \quad (16)$$

于是, 将式 (15) 代入式 (16) 可得

$$\cos \alpha' = \frac{g(z)}{\sqrt{f^2(z) + g^2(z)}} \quad . \quad (17)$$

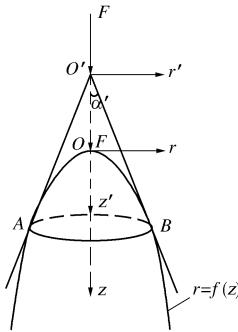


图 4 曲线圆锥应力求解模型

Fig. 4 Model for solving stress of curve cone

因此, 坐标系 $O'r'\theta'z'$ 与坐标系 $Or\theta z$ 之间转换关系可表示为

$$\left. \begin{array}{l} r' = r, \\ \theta' = \theta, \\ z' = g(z). \end{array} \right\} \quad (18)$$

于是, 将式 (17)、(18) 代入式 (12) 可得曲线圆锥 ($r \leq f(z)$) 在锥顶作用集中力 F 的应力解, 可表示为

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{t(1-2\mu)g(z)}{L^3} - \frac{(1+t)(1-2\mu)}{L(L+g(z))} + \frac{3r^2g(z)}{L^5} \right], \\ \sigma_\theta = \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{(1+t)(1-2\mu)}{L(L+g(z))} - \frac{(1-2\mu)g(z)}{L^3} \right], \\ \sigma_z = \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{3g^3(z)}{L^5} - \frac{t(1-2\mu)g(z)}{L^3} \right], \\ \tau_{rz} = \tau_{rz} = \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{3rg^2(z)}{L^5} - \frac{t(1-2\mu)r}{L^3} \right], \\ \tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = 0, \end{array} \right\} \quad (19)$$

式中,

$$L = \sqrt{r^2 + g^2(z)} \quad , \quad (20)$$

$$t = \frac{g(z)}{\sqrt{f^2(z) + g^2(z)}} \quad , \quad (21)$$

$$k = 1 - (1-2\mu)t + (1-2\mu)t^2 - t^3 \quad . \quad (22)$$

据此可获得在表面坚向集中荷载作用下散体地基应力求解方法, 其可分为集中荷载作用影响范围以内和以外两种情况进行表述, 具体情况如下:

(1) 在表面坚向集中力 F 作用的影响范围以内 ($r \leq f(z)$) 的散体地基应力可采用式 (19) 进行分析。

(2) 在表面坚向集中力 F 作用的影响范围以外

($r > f(z)$) 的散体地基应力为

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\theta r} = \tau_{\theta z} = 0 \quad . \quad (23)$$

上述即为坚向集中荷载作用下散体地基应力求解方法。在此基础上, 可以方便地获得圆形坚向均布荷载作用下散体地基应力求解方法, 其具体分析过程如下所述。

2.2 圆形坚向均布荷载作用下散体地基应力分析方法

为了获得圆形坚向均布荷载作用下散体地基应力分析方法, 可利用前述坚向集中荷载作用下散体地基应力解, 采用积分方法进行分析, 为此, 首先将式 (19) 采用直角坐标系的形式表示, 可得

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{3g(z)x^2}{L^5} + (1-2\mu)(B_3 - B_4x^2) \right], \\ \sigma_y = \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{3g(z)y^2}{L^5} + (1-2\mu)(B_3 - B_4y^2) \right], \\ \sigma_z = \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{3g^3(z)}{L^5} - \frac{t(1-2\mu)g(z)}{L^3} \right], \\ \tau_{xy} = \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{3g(z)xy}{L^5} - B_4(1-2\mu)xy \right], \\ \tau_{yz} = \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{3g^2(z)y}{L^5} - \frac{t(1-2\mu)y}{L^3} \right], \\ \tau_{zx} = \frac{F}{2\pi k} \left[\frac{3g^2(z)x}{L^5} - \frac{t(1-2\mu)x}{L^3} \right], \end{array} \right\} \quad (24)$$

式中,

$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + g^2(z)} \quad , \quad (25)$$

$$\left. \begin{array}{l} B_3 = \frac{[(1+t)L^2 - g(z)(L+g(z))]}{L^3[L+g(z)]}, \\ B_4 = \frac{(1+t)[2L+g(z)]}{L^3[L+g(z)]^2}. \end{array} \right\} \quad (26)$$

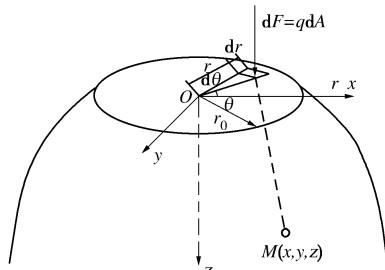


图 5 圆形坚向均布荷载作用下散体地基应力分析模型

Fig. 5 Stress analysis model for granular medium foundation under circular vertical uniform load

于是, 下面将利用式 (24) 在荷载作用圆形域上进行积分以获得圆形坚向均布荷载作用下散体地基应力求解方法。如图 5 所示, 设坚向均布荷载为 q , 均布荷载作用圆形域半径为 r_0 , 并以均布荷载作用圆形域中心为原点 O 建立直角坐标系 $Oxyz$, 取微元面积 $dA = r dr d\theta$, 微元集中力 $dF = qdA = qr dr d\theta$, 微元集中

力 dF 在地基任一点 $M(x, y, z)$ 引起的应力可利用式(24) 获得, 可表示为

$$\Delta\sigma = [\Delta\sigma_x, \Delta\sigma_y, \Delta\sigma_z, \Delta\tau_{xy}, \Delta\tau_{yz}, \Delta\tau_{zx}]^T, \quad (27)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_x &= \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{3g(z)B_5^2}{L^5} + (1-2\mu)B_7 \right] q r d\theta, \\ \Delta\sigma_y &= \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{3g(z)B_6^2}{L^5} + (1-2\mu)B_8 \right] q r d\theta, \\ \Delta\sigma_z &= \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{3g^3(z)}{L^5} - \frac{t(1-2\mu)g(z)}{L^3} \right] q r d\theta, \\ \Delta\tau_{xy} &= \frac{1}{2\pi k} B_5 B_6 \left[\frac{3g(z)}{L^5} - (1-2\mu)B_4 \right] q r d\theta, \\ \Delta\tau_{yz} &= \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{3g^2(z)B_6}{L^5} - \frac{t(1-2\mu)B_6}{L^3} \right] q r d\theta, \\ \Delta\tau_{zx} &= \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{3g^2(z)B_5}{L^5} - \frac{t(1-2\mu)B_5}{L^3} \right] q r d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中,

$$L = \sqrt{B_5^2 + B_6^2 + g^2(z)}, \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} B_5 &= (x - r \cos \theta), \\ B_6 &= (y - r \sin \theta), \\ B_7 &= B_3 - B_4 B_5^2, \\ B_8 &= B_3 - B_4 B_6^2. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

于是, 利用式(27) 或式(28) 在圆形竖向均布荷载作用域 A 上进行积分即可得到圆形竖向均布荷载作用下散体地基影响范围内 (即半无限曲线圆台) 的应力解, 可表示为

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T = \iint_A d\sigma. \quad (31)$$

亦可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{3g(z)B_5^2}{L^5} + (1-2\mu)B_7 \right] q r d\theta, \\ \sigma_y &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{3g(z)B_6^2}{L^5} + (1-2\mu)B_8 \right] q r d\theta, \\ \sigma_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{3g^3(z)}{L^5} - \frac{t(1-2\mu)g(z)}{L^3} \right] q r d\theta, \\ \tau_{xy} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{2\pi k} B_5 B_6 \left[\frac{3g(z)}{L^5} - (1-2\mu)B_4 \right] q r d\theta, \\ \tau_{yz} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{3g^2(z)B_6}{L^5} - \frac{t(1-2\mu)B_6}{L^3} \right] q r d\theta, \\ \tau_{zx} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{3g^2(z)B_5}{L^5} - \frac{t(1-2\mu)B_5}{L^3} \right] q r d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

值得注意, 在利用式(32) 进行积分时, 须满足条件:

$$\sqrt{(x - r \cos \theta)^2 + (y - r \sin \theta)^2} \leq f(z). \quad (33)$$

当然, 如果点 $M(x, y, z)$ 在圆形竖向均布荷载作用下散体地基影响范围以外 (即 $\sqrt{x^2 + y^2} > r_0 + f(z)$), 则 M 点的应力为

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (34)$$

对于基础中心线上各点应力, 可以在式(32) 中令 $x=y=0$ 获得, 具体可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \frac{q}{k} \left[\frac{1}{2} \lambda^3 - \frac{3}{2} \lambda + \frac{1}{2} (1-2\mu)(t-1)(1-\lambda) + 1 \right], \\ \sigma_z &= \frac{q}{k} \left[-\lambda^3 + t(1-2\mu)\lambda - t(1-2\mu) + 1 \right], \\ \tau_{xy} &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

式中,

$$\lambda = \frac{g(z)}{\sqrt{r_1^2 + g^2(z)}}, \quad (36)$$

$$r_1 = \begin{cases} f(z) & r_0 \geq f(z) \\ r_0 & r_0 < f(z) \end{cases}. \quad (37)$$

至此已获得在竖向集中荷载和圆形竖向均布荷载作用下散体地基的应力分析方法。由此可以看出, 前述竖向集中荷载和圆形竖向均布荷载作用下散体地基应力解中均包含一个未知函数 $f(z)$, 该函数反映散体地基在竖向荷载作用下的应力传递机理, 是本文地基应力求解的关键, 由于其与地基土工程性质密切相关, 受众多因素影响, 难以采用统一形式表示, 必须对此进行专门研究, 本文对此暂不作探讨, 留待以后再作专题研究。当然, 文献[5]已给出相关研究成果, 值得借鉴。

3 验证与讨论

前述已经建立出竖向集中荷载和圆形竖向均布荷载作用下散体地基应力分析方法, 其合理性还需验证, 为此就算例 (在表面作用圆形竖向均布荷载的地基) 分别采用本文方法、Boussinesq 解以及适合于散体介质分析的颗粒流分析软件 (PFC^{3D}) 进行对比分析。

3.1 验证分析

(1) 分析方案

散体地基表面作用圆形竖向均布荷载 $q=200$ kPa, 均布荷载作用圆形域半径 $r_0=0.3$ m, 分别采用本文方法、Boussinesq 解和颗粒流数值分析方法 (PFC^{3D}) 进行对比分析。

(2) 数值分析参数确定

参考文献[21]中 Karlsruhe 细砂标定的颗粒力学参数, 具体情况见表 1。

表1 Karlsruhe 细砂数值分析参数

Table 1 Parameters of numerical analysis of Karlsruhe fine sands

数值分析 模型参数	数值	颗粒物理 力学参数	数值
颗粒数/个	58976	密度/(g·cm ⁻³)	2.65
平均半径/m	0.02	摩擦系数	3
最大/最小半径	2.2	法向刚度/(N·m ⁻¹)	1.5×10 ⁸
扩大系数	1.28	切向刚度/(N·m ⁻¹)	2.06×10 ⁸
测量球半径/m	0.04	孔隙率	0.38

(3) 散体地基应力传递影响范围函数 $f(z)$ 的确定

采用颗粒流数值分析软件对上述计算模型进行分析, 根据其分析所得应力分布采用拟合方法获得影响范围函数 $f(z)$,

$$r = f(z) = z / (0.7588 + 0.3073z) \quad (38)$$

依据上述分析方案和计算参数, 采用本文方法、Boussinesq 解和颗粒流数值分析方法获得了分布荷载中心线及水平截面的应力对比分析结果, 见表 2~4。

表2 中心线 σ_z 对比分析Table 2 Comparative analysis of σ_z on centre line

深度 z/m	计算方法	应力值/kPa		相对误差/%
		解析解	数值解	
0.2	Boussinesq 解	165.86	192.91	14.02
	本文解析解	200		3.68
0.4	Boussinesq 解	97.6	124.93	21.88
	本文解析解	132.28		5.88
0.6	Boussinesq 解	56.9	70.55	19.35
	本文解析解	74.78		6.00
0.8	Boussinesq 解	35.82	43.82	18.26
	本文解析解	46.36		5.80
1.0	Boussinesq 解	24.26	28.45	14.73
	本文解析解	31.5		10.72
1.2	Boussinesq 解	17.38	21.28	18.33
	本文解析解	23.02		8.18
1.4	Boussinesq 解	13.02	16.41	20.66
	本文解析解	17.8		8.47
1.6	Boussinesq 解	10.1	14.23	29.02
	本文解析解	14.38		1.05
1.8	Boussinesq 解	8.06	11.14	27.65
	本文解析解	12		7.72
2.0	Boussinesq 解	6.56	9.45	30.58
	本文解析解	10.3		8.99

表3 水平截面 σ_z 对比分析 ($y=0$, $z=0.8m$)Table 3 Comparative analysis of σ_z on horizontal section ($y=0$, $z=0.8 m$)

x/m	计算方法	应力值/kPa		相对误差/%
		解析解	数值解	
0.2	Boussinesq 解	31.94	40.89	21.89
	本文解析解	42.80		4.67
0.4	Boussinesq 解	23.02	31.47	26.85
	本文解析解	34.00		8.04
0.6	Boussinesq 解	14.12	19.78	28.61
	本文解析解	21.96		11.02
0.8	Boussinesq 解	7.92	8.89	10.91
	本文解析解	9.26		4.16
1.0	Boussinesq 解	4.32	1.49	189.9
	本文解析解	1.50		0.67

表4 水平截面 σ_z 对比分析 ($y=0$, $z=1.5 m$)Table 4 Comparative analysis of σ_z on horizontal section ($y=0$, $z=1.5 m$)

x/m	计算方法	应力值/kPa		相对误差/%
		解析解	数值解	
0.2	Boussinesq 解	10.98	14.95	26.56
	本文解析解	15.64		4.62
0.4	Boussinesq 解	9.76	13.40	27.16
	本文解析解	14.82		10.60
0.6	Boussinesq 解	8.10	12.39	34.62
	本文解析解	13.58		9.60
0.8	Boussinesq 解	6.36	11.95	46.78
	本文解析解	12.08		1.09
1.0	Boussinesq 解	4.80	9.34	48.61
	本文解析解	9.82		5.14

3.2 讨论

针对拟定的计算方案, 采用 3 种方法分别对圆形坚向均布荷载作用下散体地基应力进行了分析与计算, 本文据此进行如下讨论:

(1) 由于颗粒流数值分析方法能较真实地反映散体介质的应力传递机理, 因此, 采用该方法进行分析最符合实际。所以, 本文以此方法所获结果作为比较分析的“真实值”, 当然, 它的真实性还是有限制的, 本文之所以这样处理仅仅是一种无奈的办法, 因为就目前研究水平而言, 尚找不到更能反映实际的分析方法。

(2) 采用本文方法所得应力分析结果比采用 Boussinesq 解所得应力分析结果更加接近数值方法分析结果, 说明本文方法比 Boussinesq 解更具合理性。

(3) 虽然本文方法分析结果更接近于数值分析结果, 但是, 两者之间仍然存在较大差距, 究其原因, ①数值分析结果未必能完全反映客观实际, 这主要与数值软件开发时所采用的计算技术与参数选用的合理性有关; ②本文方法建立时虽然考虑了散体介质应力传递的机理, 但是, 影响范围内土体仍被视为连续介质, 存在一定的不合理性。

(4) 采用本文方法进行分析时, $f(z)$ 的确定是关键, 本文进行验证分析时是通过数值分析结果采用拟合方法获得的, 其不适用于具体工程问题分析, 没有普遍适用性, 这使本文方法的工程应用受到限制, 因此, 对此应作更深入研究。

4 结 论

(1) 在现有散体介质应力传递机理研究上, 总结归纳出了坚向集中荷载作用下散体地基圆锥形影响范围边界曲面描述的统一模型, 揭示了坚向荷载作用下散体地基应力传递机理, 为坚向荷载作用下散体地基应力分析方法研究奠定了基础。

(2) 建立出了坚向集中荷载作用下散体地基应力

的解析方法, 为竖向分布荷载作用下散体地基应力分析方法研究创造了条件。

(3) 建立出了圆形竖向均布荷载作用下散体地基应力分析方法, 该方法较充分地反映了地基的散体介质特点。

(4) 通过工程算例的比较分析, 表明了本文方法的合理性与可行性。

参考文献:

- [1] 赵明华. 土力学与基础工程[M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2000. (ZHAO Ming-hua. Soil mechanics and foundation engineering[M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2000. (in Chinese))
- [2] JANSEN H A. Versuche Über getreide druck getreide druck in silozellen[J]. Zeitshrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 1895, **39**(35): 1045 – 1049.
- [3] BOUCHAUD J P, CATES M E, CLAUDIN P. Stress distribution in granular media and nonlinear wave equation[J]. Journal de Physique I, 1995, **5**(6): 639 – 656.
- [4] CATES M E, WITTMER J P, BOUCHAUD J P, et al. Development of stresses in cohesionless poured sand[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 1998, **356**(1747): 2535 – 2560.
- [5] DA SILVA M, RAJCHENBACH J. Stress transmission through a model system of cohesionless elastic grains[J]. Nature, 2000, **406**(6797): 708 – 710.
- [6] 孙广忠. 岩体力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 1983. (SUN Guang-zhong. Rock mass mechanics foundation[M]. Beijing: Science Press, 1983. (in Chinese))
- [7] GENG J, HOWELL D, LONGHI E, et al. Footprints in sand: the response of a granular material to local perturbations[J]. Physical Review Letters, 2001, **87**(3): 035506-(1-4).
- [8] COPPERSMITH S N, LIUC H, MAJUMDAR S, et al. Model for force fluctuations in bead packs[J]. Physical Review E, 1996, **53**(5): 4673 – 4685.
- [9] LIU C H, NAGEL S R, SCHECTER D A, et al. Force fluctuations in bead packs[J]. Science, 1995, **269**(5223): 513 – 515.
- [10] MILLER B, O'HERN C, BEHRINGER R P. Stress fluctuations for continuously sheared granular materials[J]. Physical Review Letters, 1996, **77**(15): 3110 – 3113.
- [11] MUETH D M, JAEGER H M, NAGEL S R. Force distribution in a granular medium[J]. Physical Review E, 1998, **57**(3): 3164 – 3169.
- [12] RADJAI F, JEAN M, MOREAU J J, et al. Force distribution in dense two-dimensional granular systems[J]. Physical Review Letters, 1996, **77**(2): 274 – 277.
- [13] 韦珊珊. 土中应力分布传递规律的试验及测试技术研究[D]. 南宁: 广西大学, 2003. (WEI Shan-shan. Research on test, measuring and testing techniques of laws of stress distribution and transfer in soil[D]. Nanning: Guangxi University, 2003. (in Chinese))
- [14] 代志宏, 吴 恒, 张信贵. 附加应力在土体中传递分布的细观模型[J]. 工程地质学报, 2004, **12**(增刊): 73 – 78. (DAI Zhi-hong, WU Heng, ZHANG Xin-gui. The mesoscopic structure model of additional stress transfer in the soil[J]. Journal of Engineering Geology, 2004, **12**(S0): 73 – 78. (in Chinese))
- [15] 廖智强, 刘根保. 附加应力的概率式解答[J]. 岩土力学, 2015, **36**(8): 2223 – 2227. (LIAO Zhi-qiang, LIU Gen-bao. Probabilistic solution to additional stress[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(8): 2223 – 2227. (in Chinese))
- [16] 刘 源, 缪馥星, 苗天德. 二维颗粒堆积体中力的传递与分布研究[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(4): 468 – 473. (LIU Yuan, MIAO Fu-xing, MIAO Tian-de. Force distributions in two dimensional granular packs[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(4): 468 – 473. (in Chinese))
- [17] 蒋红英. 颗粒介质传力特性及其在岩土工程中的若干应用问题[D]. 兰州: 兰州大学, 2005. (JIANG Hong-ying. Transmission of force through granular matter and its several applications in geological engineering[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2005. (in Chinese))
- [18] 蒋红英, 苗天德, 鲁进步. 二维颗粒堆中力传递的一个概率模型[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(7): 881 – 885. (JIANG Hong-ying, MIAO Tian-de, LU Jin-bu. A probabilistic model for force transmission in two dimensional granular packs[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(7): 881 – 885. (in Chinese))
- [19] 孙其诚, 程晓辉, 季顺迎, 等. 岩土类颗粒物质宏-细观力学研究进展[J]. 力学进展, 2011, **41**(3): 351 – 371. (SUN Qi-cheng, CHENG Xiao-hui, JI Shun-ying, et al. Advances in the micro-macro mechanics of granular soil materials[J]. Advances in Mechanics, 2011, **41**(3): 351 – 371. (in Chinese))
- [20] 李遇春. 弹性力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2009. (LI Yu-chun. Elastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2009. (in Chinese))
- [21] 常 在, 杨 军, 程晓辉. 砂土强度和剪胀性的颗粒力学分析[J]. 工程力学, 2010, **27**(4): 95 – 104. (CHANG Zai, YANG Jun, CHENG Xiao-hui. Granular mechanical analysis of the strength and dilatancy of sand[J]. Engineering Mechanics, 2010, **27**(4): 95 – 104. (in Chinese))