

DOI: 10.11779/CJGE201706026

## 对“横观各向同性砂土的强度准则”讨论的答复

曹 威, 王 睿, 张建民

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

### Reply to discussion on “New strength criterion for sand with cross-anisotropy”

CAO Wei, WANG Rui, ZHANG Jian-min

(State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2017)06-1163-02

作者简介: 曹 威(1991-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为砂土本构关系。E-mail: caow13@mails.tsinghua.edu.cn。

非常感谢董彤和孔亮对“横观各向同性砂土的强度准则”一文的讨论(以下简称“讨论”)。

“讨论”建议给出 $\Lambda$ 与 $\delta$ 的解析式。原文提出的各向异性参量 $\Lambda$ 并不是大主应力方向角 $\delta$ 的简单替代量,而是综合地反映各向异性状态的量,不一定与 $\delta$ 有简单的显式关系,在一般应力状态下相比于简单的采用大主应力方向角 $\delta$ 存在显著的优势。由原文式(12), $\Lambda$ 的定义为

$$\Lambda(\sigma, F) = \frac{\sigma_N - \sigma_{\text{SMP}}}{I_1}, \quad (1)$$

该式实际上已经可以唯一确定 $\Lambda$ ,所以给出 $\Lambda$ 与 $\delta$ 的解析式必要性不大。 $\Lambda$ 与 $\delta$ 虽在特殊应力状态下存在解析关系式,但在一般应力状态下,两者并不存在简单的对应关系。下面对 $\Lambda$ 与 $\delta$ 的关系进行具体讨论。

由式(1)可以看出, $\Lambda$ 是应力状态和沉积面方向的函数:其中 $\sigma_{\text{SMP}}$ , $I_1$ 仅仅取决于主应力分量的大小,只有沉积面上的正应力 $\sigma_N$ 不仅取决于主应力分量的大小,同时与应力相对于沉积面的方向有关。因而 $\Lambda$ 与 $\delta$ 之间的关系可以归结为 $\sigma_N$ 与 $\delta$ 之间的关系。基于以上分析,对两种情况进行展开讨论:①当应力张量相对于沉积面处于某种特殊方向时, $\Lambda$ , $\delta$ 之间存在简单的关系,可以给出显示的解析表达式;②在一般应力状态下, $\Lambda$ , $\delta$ 之间对应关系较为复杂,而且 $\Lambda$ 并不是 $\delta$ 的一个等效的替代,它可以克服 $\delta$ 在描述强度方面的某些不足,具有明确的自身特点和优势。

#### (1) 特殊应力方向

第一种特殊应力方向,是只有两个主应力的纯粹二维情况,例如对二维粒状材料进行双轴压缩。“讨论”中给出的式(12)给出了这种情况下 $\Lambda$ 与 $\delta$ 的关系,笔者在此给出另外一种表达式。

根据原文式(3)、(6),经计算可得到

$$\sigma_{\text{SMP},2D} = \frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}. \quad (2)$$

而根据原文式(13),或者根据“讨论”中的办法,可得到“讨论”中的式(5):

$$\sigma_N = \sigma_1 \cos^2 \delta + \sigma_3 \sin^2 \delta. \quad (3)$$

将式(2)、(3)代入式(1),并整理,得

$$\Lambda(\sigma, F)_{2D} = \frac{\sigma_1^2 \cos^2 \delta + \sigma_3^2 \sin^2 \delta - I_2}{I_1^2}, \quad (4)$$

这就是 $\Lambda$ 与 $\delta$ 的关系式。

将 $\delta=0^\circ$ , $\delta=90^\circ$ 分别代入,可得

$$\begin{cases} \Lambda_{0^\circ,2D} = \frac{\sigma_1^2 - I_2}{I_1^2}, \\ \Lambda_{90^\circ,2D} = \frac{\sigma_3^2 - I_2}{I_1^2}. \end{cases} \quad (5)$$

这样就得到了 $\Lambda_{\tau_0}$ 与 $\Lambda_{\tau_{90}}$ 的具体表达式。

第二种特殊应力方向,是虽然有3个主应力分量,但其中一个主应力的方向平行于沉积面(为讨论方便不妨假设是中主应力),例如常见的空心圆柱扭剪试验时的应力状态。此时,只需将 $\sigma_{\text{SMP}}$ 的表达式变为<sup>[1]</sup>

$$\sigma_{\text{SMP},3D} = \frac{3I_3}{I_2}. \quad (6)$$

采取与上述二维情况类似的步骤,可得

$$\Lambda(\sigma, F)_{3D} = \frac{(\sigma_1^2 \cos^2 \delta + \sigma_3^2 \sin^2 \delta)I_2 - 3I_3}{I_1 I_2}, \quad (7)$$

同样将 $\delta=0^\circ$ , $\delta=90^\circ$ 分别代入,可得

$$\begin{cases} \Lambda_{0^\circ,3D} = \frac{\sigma_1^2 I_2 - 3I_3}{I_1 I_2}, \\ \Lambda_{90^\circ,3D} = \frac{\sigma_3^2 I_2 - 3I_3}{I_1 I_2}. \end{cases} \quad (8)$$

#### (2) 一般应力方向

在一般的三维应力状态下, $\sigma_N$ 与 $\delta$ 之间不存在简单的对应关系,而是与3个主应力的大小、方向都有关系,因而 $\Lambda$ 与

$\delta$  之间不存在简单的对应关系。如果已知应力张量在某坐标系下的分量, 那么  $\sigma_N$  可以通过原文式 (13) 方便地求出, 并不需要计算  $\delta$ 。

另外, 大主应力方向角  $\delta$  本身并不适合直接作为各向异性强度关系的参量, 因为  $\delta$  并不是应力张量  $\sigma$  的连续函数。

如图 1 所示, 假设较大两个主应力大小相等, 而小主应力平行于沉积面。如果认为  $\delta$  为大主应力与沉积面法向的最小夹角, 那么此时  $\delta = 0^\circ$ 。但如果在垂直于小主应力的平面内, 在任意角度  $\alpha$  增加一个微小的正应力分量  $d\sigma$ , 则  $\delta$  马上由  $0^\circ$  变为  $\alpha$ , 从而可以看出,  $\delta$  不是应力张量  $\sigma$  的连续函数, 从而不适于直接作为强度准则中各向异性参量。一般来说, 利用应力的某种“角度”作为各向异性参量, 都会面临这个问题<sup>[2-3]</sup>, 因而许多研究者对其他方法进行了探索<sup>[4-5]</sup>, 这也是原文重新构造各向异性参量的基本出发点。

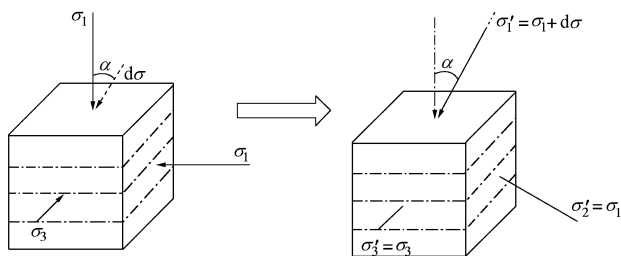


图 1 大主应力方向角不是应力的连续函数的说明

Fig. 1 Illustration of how angle of major principal stress is not a continuous function of stress tensor

原文“横观各向同性砂土的强度准则”的目的在于建立一个数学形式简单、物理机制清晰、参数易于确定的各向异性强度准则。“讨论”也指出, 本文的假设“相当于假设强度参数与大主应力方向角之间满足特定的三角函数关系, 根据已有试

验规律该假设是合理的”, 这说明笔者提出的参量在退回到简单的特殊应力状态时符合试验规律, 从侧面进一步验证了原文假设的合理性。而原文所建立的强度各向异性准则更是相比目前大多数强度准则拥有参数少而易于确定、自动满足客观性原理、容易推广到其它经典强度准则或本构关系等方面的优势。

## 参考文献:

- [1] MATSUOKA H, NAKAI T. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses[J]. Doboku Gakkai Ronbunshu, 1974, **232**: 59 - 70.
- [2] 张连卫, 张建民, 张 嘎. 基于 SMP 的粒状材料各向异性强度准则[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(8): 1107 - 1111. ZHANG Lian-wei, ZHANG Jian-min, ZHANG Ga. SMP-based anisotropic strength criteria of granular materials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **30**(8): 1107 - 1111. (in Chinese))
- [3] 姚仰平, 孔玉侠. 横观各向同性土强度与破坏准则的研究[J]. 水利学报, 2012, **43**(1): 43 - 50. (YAO Yang-ping, KONG Yu-xia. Research on the cross-anisotropic soil's strength and failure criterion[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2012, **43**(1): 43 - 50. (in Chinese))
- [4] YAO Y, TIAN Y, GAO Z. Anisotropic UH model for soils based on a simple transformed stress method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2017, **41**(1): 54 - 78.
- [5] CAO W, WANG R, ZHANG J M. Formulation of anisotropic strength criteria for cohesionless granular materials[J]. International Journal of Geomechanics, 2017, **17**(7): 04016151.