

DOI: 10.11779/CJGE201706024

动态巴西圆盘劈裂试验的极限分析解

杨仁树^{1, 2}, 陈 骏^{*1}, 刘殿书^{1, 2}

(1. 中国矿业大学(北京) 力学与建筑工程学院, 北京 100083; 2. 中国矿业大学(北京) 深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 北京 100083)

摘 要: 通过极限分析上限定理对巴西圆盘动态劈裂试验的弹性解进行了优化, 考虑高速冲击作用导致的岩石试件端部剪切裂纹对动态拉伸强度的影响, 获得了计算动态拉伸强度上限解的新公式。通过对实测的砂岩动态劈裂试验结果的分析, 对比了原始的弹性解和得到的上限解间的差别, 研究表明砂岩的动态拉伸性能随加载率的变化不明显, 随着加载率的提高, 动态拉伸强度曲线较平缓, 说明砂岩在动态作用下承受拉应力的能力较低, 抗拉强度的变化范围较小。同时验证了基于极限分析法的岩石动态抗拉强度公式可以为砂岩的工程应用提供更安全可靠的参考值。

关键词: 动态拉伸强度; 巴西圆盘试验; 极限分析; 上限解; 加载率

中图分类号: TU458

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2017)06 - 1156 - 05

作者简介: 杨仁树(1963 -), 男, 安徽和县人, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程, 矿建工程方面的教学与研究工作。E-mail: yangg1531@163.com。

Limit analysis solution of dynamic Brazilian tests

YANG Ren-shu^{1, 2}, CHEN Jun¹, LIU Dian-shu^{1, 2}

(1. School of Mechanics and Architecture Engineering, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing 100083, China;

2. State Key Laboratory for Geomechanics and Deep Underground Engineering, Beijing 100083, China)

Abstract: By using the limit analysis upper bound theorem, the elastic solution of dynamic Brazilian tests is optimized. Considering the effects of the radially angled cracks caused by the high-speed impact at contact points of the disk on the dynamic tensile strength, a new formula for computing the upper bound solution of the limit dynamic tensile strength is obtained. The original elastic solution and new upper bound solution are discussed by analyzing the dynamic tensile results of sandstone. The research shows that the dynamic tensile properties of sandstone do not change significantly with the loading rate. With the increase of the loading rate, the curve of dynamic tensile strength is relatively flat. The upper bound solution offers a more secure and reliable reference value for the use of sandstone rock mass.

Key word: dynamic tensile strength; Brazilian test; limit analysis; upper bound solution; loading rate

0 引 言

在实际工程问题中, 由于岩石的抗拉强度较抗压强度小 8~10 倍左右, 使得工程岩体大多发生拉伸劈裂破坏。在类似地震、冲击和爆破作用下, 岩石的动态抗拉强度是尤为重要的参考已知量。因为岩石的脆断性, 直接测量岩石的静、动态抗拉强度变得十分困难。1959 年 Beren 等发明了一种间接测量岩石、混凝土等脆性材料的拉伸强度的方法, 并在 1978 年作为国际岩石力学学会的推荐方法之一, 简称为巴西圆盘试验。因为巴西圆盘试验在静态下的试验设计和操作过程简洁方便, 因此很快被引入到 SHPB 试验系统中用于动态拉伸强度的测试方法^[1]。

采用 SHPB 试验系统加载的动态巴西圆盘试验是否成功的判据^[2]在于岩石的破裂是否从试件中心处开始以及岩石的拉伸裂纹是否平行于加载方向。为验证

动态巴西劈裂试验的有效性, Gomez 等^[3]对花岗岩进行了静、动态下的圆盘劈裂试验, 用高速摄影仪拍下了试件在受载过程中的光弹图片。可以看出, 试件在受到冲击荷载后, 经过约 30 μ s 的应力波的传播, 试件两端达到受力平衡, 其内部受力状态与静态下的试件内部受力状态一致。Zhu 等^[4]采用 RFPA 软件模拟得到了试件在静态和动态加载下的圆盘劈裂的应力云图。模拟结果表明, 动态试验中试样劈裂前的受载状态可以达到静态下的状态。陈静静^[5]采用 DIC 方法结合 ANSYS/LS-DYNA 模拟并观测了包含 PMMA、陶瓷和花岗岩 3 种材料的静、动态巴西圆盘试验, 得到 PMMA 动态巴西圆盘试验达到应力平衡的时间为 72

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(51404273)

收稿日期: 2016 - 06 - 03

*通讯作者(E-mail: cj0354@126.com)

μs , 并验证了陶瓷和花岗岩动态圆盘劈裂判据的有效性。这些研究说明了静态拉伸强度公式推广到动态范围使用的有效性。

但与此同时, 在高速冲击作用下, 岩石试件两端接触点处, 产生数条呈一定角度的径向裂纹。这意味着, 随着加载率的增加, 岩石试件中产生两种不同形式的破坏^[6]: 沿加载方向, 从中心起裂的拉伸破坏和从两接触点处起裂的剪切破坏。与静态加载在破坏形式上的区别随着加载率的提高愈发明显, 在可行性得到验证的前提下, 准确度是否如静态加载一般仍需检验。本文利用极限分析法对动态巴西圆盘试验得到的岩石拉伸强度结果进行理论推导和计算。

1 巴西圆盘试验原理及有效性分析

岩石在静态下的巴西圆盘试验其理论及技术已经十分成熟。对由 SHPB 试验系统加载的动态劈裂试验, 当试件接触面两端应力平衡时, 岩石动态拉伸强度 (σ_{id}) 可由试件承受的动荷载 ($P(t)$) 表征:

$$\sigma_{\text{id}} = \frac{2P(t)}{\pi DB}, \quad (1)$$

式中, D 为岩石试件的直径, B 为岩石试件的厚度。

$P(t)$ 的取值选择当拉伸破坏发生时的端部应力值或应力-时间曲线中的应力最大值。然而, 对试验进行的弹性解分析均是在理想情况下进行, 没有考虑到因为加载端部的局部受力过大而导致产生剪切裂纹。在实际的试验中, 随着加载率的增加, 由两接触点处起裂的剪切裂纹频繁发生, 并且不能单纯地认为两端接触点的剪切裂纹发生在拉伸裂纹之后。图 1 所示是 Zhang 等^[4]加载率为 830 GPa/s 时的大理岩动态抗拉强度。在达到峰值应力前, 两端面加载力基本呈恒应力率增加。在峰值后, 加载力逐渐降低。在整个过程中, 由于试件承受的外荷载显著的区别于静载, 产生的破坏形式和受力状态也不同。在高速摄影的图片中, 如图 2 所示, 应力平衡阶段试件端部颜色变化, 并在拉伸裂纹出现后该区域有剪切裂纹产生, 说明在应力平衡阶段试件端部应力集中, 发生微小裂纹继而裂纹延伸至肉眼可见。那么在取应力最大值计算动态拉伸强度时, 由于高速冲击下剪切裂纹的存在, 一定程度上的塑性变形会影响弹性解的精度, 导致获得的结果较理论值偏差较大。

此外, 对巴西圆盘的弹性分析中, 正是由于端部受压产生的楔形区 ABC (如图 4 所示) 对试件中部有侧向的作用力, 从而导致试件中部裂纹的产生和扩展。在冲击力作用下, 这种楔体效应将更加明显。并且由于冲击速度过大, 端部剪切裂纹的存在, 改变了试件内部的受力状态, 使动态拉伸强度值无法简单的靠弹性解得到。因此将静态公式直接运用于动态分析中,

影响了劈裂试验结果分析的准确性。

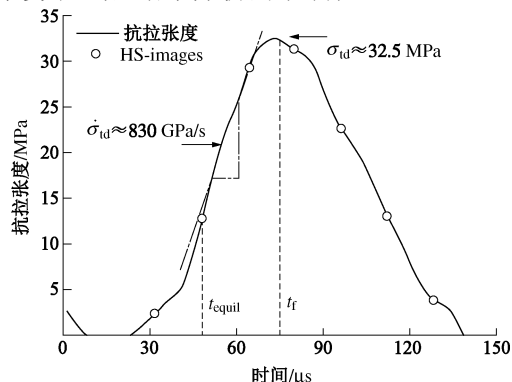


图 1 应力率 830 GPa/s 时大理岩动态拉伸强度^[5]

Fig. 1 Dynamic tensile strengths of marble at stress rate of 830 GPa/s^[5]

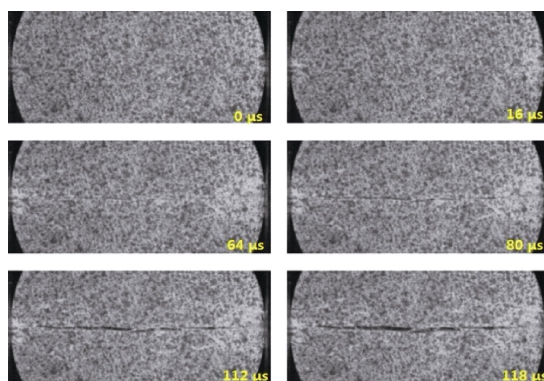


图 2 应力率 830 GPa/s 时大理岩高速摄影图片^[5]

Fig. 2 High-speed photos of marble at stress rate of 830 GPa/s^[5]

2 巴西圆盘动态劈裂试验极限分析解

2.1 极限分析法简介

与极限平衡法和滑移线法类似, 极限分析法在解决土力学“经典稳定问题”中获得了巨大的应用^[8-11]。不论结构的几何形状和荷载情况多么复杂, 总可以求得一个实用的破坏荷载值。在满足理想塑性假设和小变形假设的前提下, 可以得到以速率形式表达的虚功方程:

$$\int_{AT} \dot{T}_i^C \dot{u}_i^C dA + \int_{Au} \dot{T}_i^C \dot{u}_i^C dA + \int_V \dot{F}_i^C \dot{u}_i^C dv = \int_V \dot{\sigma}_{ij}^C \dot{\varepsilon}_{ij}^C dv. \quad (2)$$

式 (2) 中包括材料在破坏荷载或极限荷载时的应力率 $\dot{\sigma}_{ij}^C$ 和应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^C$ 以及连续的位移率 \dot{u}_i^C 。 \dot{F}_i^C 和 \dot{T}_i^C 分别表示破坏发生时的材料体力率和面力率。

对虚功方程 (2) 进一步分析, 在一个假设的且满足速度边界条件和应变与速度相容条件的变形模式中, 由外功率等于所消耗的内功率而得到的荷载, 不会小于实际破坏荷载。即极限分析上限定理。其中外力作的功率为

$$\int_{AT} T_i \dot{u}_i^p dA + \int_V F_i \dot{u}_i^p dv. \quad (3)$$

内部耗损功率为

$$\int_V D(\dot{\varepsilon}_{ij}^p) dv = \int_V \sigma_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p dv, \quad (4)$$

式中, 单位面积的能量耗损率 D 可以理解为应力分量 (σ, t) 与速度向量 $(\delta v, \delta u)$ 的点乘积。Chen^[12]已经得到的公式:

$$D = \delta w \left(f'_c \frac{1 - \sin \theta}{2} + f'_t \frac{\sin \theta - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right), \quad (5)$$

式中, f'_c , f'_t 是材料的单轴抗压强度和拉伸强度。

对于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的简单张离和 $\theta = \varphi$ 的简单滑动的特殊情况, 式 (5) 可简化为

$$D = f'_t \delta v \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right), \quad (6)$$

$$D = f'_c \frac{1 - \sin \varphi}{2} \delta w \quad (\theta = \varphi). \quad (7)$$

2.2 动态劈裂试验极限分析解

根据极限分析上限定理, 在由 SHPB 试验装置驱动巴西圆盘试验中, 使入射杆提供的外荷载作的功率等于试件内部的能量耗损率, 因此得到的岩石试件极限拉伸强度是岩石抗拉强度的一个上界值。

静态试验中为防止在荷载作用点附近试件的过早破坏, 通常在试件与压板间放置垫条^[13]。为便于理论计算, 本文在动态巴西圆盘劈裂试验中引入垫条概念, 假设垫条宽度为 $a = \frac{1}{12}R$, 当裂纹 AB , AC 从垫条边缘起裂扩展至试件圆心处, $\angle \alpha$ 的最小值约为 5° 。由此得到如图 3 所示的由刚性楔形区 ABC 构成的破坏模式, 由于岩石是内摩擦角为 φ 的有摩擦材料, 在发生剪切变形时, 如果两刚性体相对的切向速度变化为 δu , 必须始终伴随着一个分离速度 $\delta v = \delta u \tan \varphi$, ($\varphi \neq 0$), 对应的速度关系图见图 4。

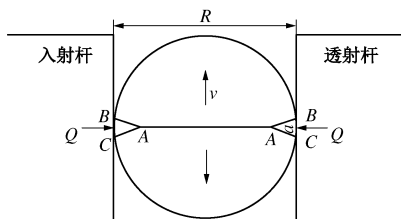


图 3 巴西圆盘劈裂试验的冲击破坏图
Fig. 3 Impact failure of Brazilian tests

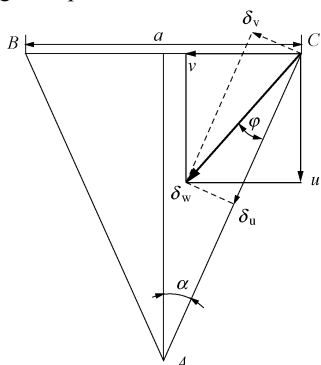


图 4 巴西圆盘劈裂试验的速度关系图
Fig. 4 Velocity diagram of Brazilian tests

为简化计算, 假设岩石试件的拉伸裂纹长度等于试件直径 R 。岩石试件高度为 l 。岩石内部耗损率 W 等于拉伸裂纹的能量耗损率 W_1 和剪切裂纹的能量耗损率 W_2 之和。

将式 (4)、(6)、(7) 运用于圆盘劈裂试验得到拉伸裂纹的能量耗损率:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= f'_t \cdot lR \cdot 2v, \\ v &= \delta w \sin(\alpha + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

剪切裂纹的能量耗损率:

$$W_2 = f'_c \cdot \frac{1}{2}(1 - \sin \varphi) \cdot 4l \cdot \frac{a}{2 \sin \alpha} \delta w, \quad (9)$$

化简得到

$$\left\{ \begin{aligned} W_1 &= 2f'_t \cdot lR \cdot \delta w \sin(\alpha + \varphi), \\ W_2 &= \frac{f'_c \cdot lR(1 - \sin \varphi)}{12 \sin \alpha} \delta w. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

因此, 岩石内部耗损率为

$$W = W_1 + W_2 = 2f'_t lR \delta w \sin(\alpha + \varphi) + \frac{f'_c \cdot lR(1 - \sin \varphi)}{12 \sin \alpha} \delta w. \quad (11)$$

根据极限分析上限定理, 外部荷载所做的功等于内部耗损率, 求得

$$2Q \cdot u = f'_t \cdot lR \cdot 2v + \frac{f'_c \cdot lR(1 - \sin \varphi)}{12 \sin \alpha} \delta w, \quad (12)$$

化简得到

$$Q = f'_t lR \tan(\alpha + \varphi) + \frac{f'_c lR(1 - \sin \varphi)}{24 \sin \alpha \cos(\alpha + \varphi)}, \quad (13)$$

式中, f'_t 即为不同冲击速度导致的破坏模式下, 岩石采用动态巴西圆盘劈裂试验得到的拉伸强度值。其考虑了由于冲击作用导致岩石动态破坏形式不同, 端部剪切裂纹对拉伸强度测量值的影响。以极限分析上限定理为基础, 忽略应力波和惯性力对试件的作用, 仅以岩石试件的最终破坏形式作为计算模型, 考虑岩石的拉、压关系, 认为岩石试件的破坏符合莫尔库仑破坏准则。由此得到的岩石拉伸强度是岩石极限拉伸破坏强度的一个上限解, 是对沿用至今的公式 (1) 的优化和补充。

3 极限分析解与弹性解析解的对比分析

根据所得公式 (13), 当岩石的内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$,

$f'_c/f'_t = 10$ 时, 令 $n = \frac{Q}{f'_t lR}$, 得到 α 与 n 的变化关系见表 1。

当岩石的内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$, $f'_c/f'_t = 5$ 时, 随着 α 角的不同, α 与 n 关系如表 2 所示。

此外, 岩石的巴西圆盘劈裂试验弹性解 $\sigma_{ld} = \frac{2P(t)}{\pi DB}$, 其外荷载 $P(t)$ 与拉伸强度 σ_{ld} 的比值为 1.57。

表 1 $\alpha - n$ 对应关系 ($\varphi = 30^\circ$, $f_c/f_t = 10$)
Table 1 Relationship between α and n ($\varphi = 30^\circ$, $f_c/f_t = 10$)

| $\alpha /(^{\circ})$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 30 |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| n | 3.6183 | 3.1901 | 2.8941 | 2.6809 | 2.5234 | 2.4053 | 2.1384 | 2.1394 | 2.5654 |

表 2 $\alpha - n$ 对应关系 ($\varphi = 30^\circ$, $f_c/f_t = 5$)
Table 2 Relationship between α and n ($\varphi = 30^\circ$, $f_c/f_t = 5$)

| $\alpha /(^{\circ})$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 30 |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| n | 2.1593 | 1.9583 | 1.8238 | 1.7311 | 1.6666 | 1.6222 | 1.5692 | 1.6656 | 2.1487 |

表 3 砂岩动态拉伸强度计算参数及结果
Table 3 Parameters and results of dynamic tensile strength of sandstone

| 编号 | 加载率/(MPa·s ⁻¹) | 直径 R /mm | 高度 L /mm | 弹性解 σ_t /MPa | 端部压力 P /kN | $\alpha /(^{\circ})$ | 上限解 f_t /MPa |
|-------|----------------------------|------------|------------|---------------------|--------------|----------------------|----------------|
| B1-10 | 0.79×10^5 | 49.22 | 49.50 | 11.71 | 44.79 | 9.5 | 7.47 |
| B1-17 | 1.41×10^5 | 49.40 | 49.30 | 17.20 | 65.77 | 6.0 | 8.47 |
| B1-16 | 2.62×10^5 | 49.34 | 49.94 | 20.88 | 80.78 | 5.0 | 9.06 |

而极限分析上限解的含义是岩石试件实际发生破坏的拉伸强度不小于极限分析上限解。将弹性解和上限解在同一坐标系中对比,如图 5 所示,在假设岩石抗压-抗拉强度比为 10 倍和 5 倍时,弹性解外荷载与拉伸强度的比值均位于上限解对应比值下方,说明不论在何种动态破坏模式下弹性解的结果均大于上限解,证明了极限分析上限解的正确性。而且,由于公式(13)考虑了冲击作用造成的局部剪切裂纹以及岩石试件的内摩擦角,极限分析上限解缩小了岩石在实际破坏中的为验证极限分析上限解与弹性解析解在试验结果上的区别。本文采用宫凤强^[7]的试验数据。通过对砂岩在动、静态下的劈裂试验结果分析得到:在加载率为 10^{-3} , 10^0 MPa/s 时,岩石的破坏模式基本不变,端部剪切裂纹几乎观察不到。在加载率在 $0.79 \sim 2.62$ (10^5 MPa/s) 范围内的冲击劈裂试验,在试样加载方向出现一条贯穿裂纹,并以该贯穿裂纹为对称位置,出现 4 个半椭圆型劈裂块体。在冲击劈裂下的破坏简图如图 6 所示。

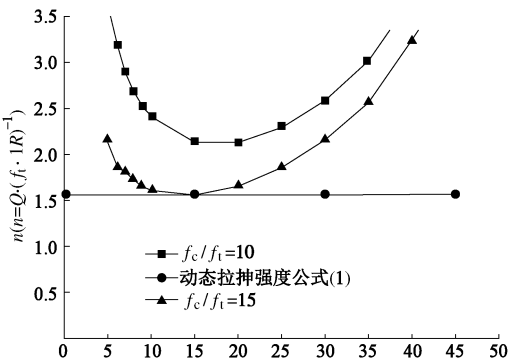


图 5 动态巴西圆盘弹性解析解与极限分析上限解对比图
Fig. 5 Comparison between elastic and upper bound solutions in Brazilian tests

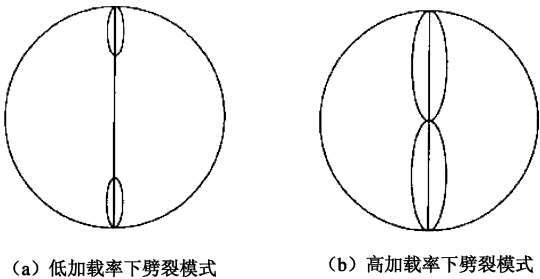


图 6 不同加载率下的冲击劈裂模式对比^[7]

Fig. 6 Comparison of impact splitting modes under different loading rates (a) low loading rate (b) high loading rate^[7]

文献[7]中试件 B1-10 砂岩的劈裂模式对应本文 $\angle\alpha = 9.5^\circ$ 时的破坏模式。试件 B1-17 和 B1-16 分别对应本文 $\angle\alpha = 6^\circ$ 和 5° 时的破坏模式。根据文献[7]中 σ_t 值结果,利用公式(1)反算得到 SHPB 冲击荷载的端部压力 P ,再利用式(13)及表 1 中参数得到砂岩动态劈裂试验的极限分析解。计算参数和结果见表 3 和图 7 所示。

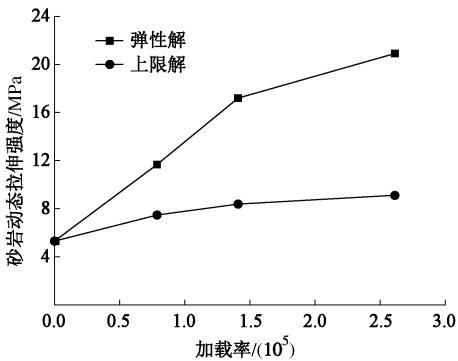


图 7 砂岩动态拉伸强度弹性解^[7]与极限分析上限解对比图
Fig. 7 Comparison between elastic and upper bound solutions for dynamic tensile strength of sandstone

取砂岩在准静态下的劈裂拉伸强度为 5.5 MPa, 随着加载率的增加, 砂岩动态劈裂拉伸强度依次提高了 213%, 313%, 380%。而采用式 (13) 进行计算, 其动态劈裂拉伸强度提高分别为 136%, 154%, 165%。当考虑冲击作用导致的端部剪切裂纹影响时, 砂岩动态拉伸强度的增长斜率放缓, 加载率对其强度的影响减弱, 说明砂岩在动态作用下承受拉应力的能力较低, 抗拉强度的变化范围较小。同时验证了基于极限分析法的岩石动态抗拉强度公式可以为砂岩的工程应用提供更安全可靠的参考值。

4 结 论

通过极限分析上限定理对巴西圆盘动态劈裂试验的弹性解进行优化, 考虑冲击作用下岩石试件端部剪切裂纹对动态拉伸强度的影响, 得到以下两点结论。

(1) 基于极限分析法, 在忽略应力波和惯性力作用的前提下, 通过建立虚功方程使试件承受的外荷载作的功率与试件内部的能量耗散率相等, 得到了考虑 SHPB 试验导致端部剪切裂纹影响的岩石动态拉伸强度的上限解。其端部压力和岩石动态拉伸强度间的关系可表示为 $Q = f_t l R \tan(\alpha + \varphi) + \frac{f_c l R (1 - \sin \varphi)}{24 \sin \alpha \cos(\alpha + \varphi)}$ 。

(2) 对比巴西圆盘弹性解析解, 极限分析上限解在计算砂岩动态抗拉强度时, 考虑动态试验现象和岩石力学参数后获得的结果小于弹性解析解, 本文认为极限分析解更接近真实岩体的拉伸强度值。

此外, 加载率对岩石类材料动态力学性能的影响是动力学研究中重要的方面。动态巴西圆盘试验中, 加载率同样对与加载端接触的岩石塑性剪切裂纹的长度影响显著, 本文分析了剪切裂纹对岩石拉伸强度的影响, 要进一步揭示加载率和裂纹长度及岩石动态抗拉强度间的相互关系, 今后还需要作更深入的研究。

参考文献:

- [1] 卢芳云. 霍普金森杆试验技术[M]. 北京: 科学出版社, 2013. (LU Fang-yun. Hopkinson bar techniques[M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese))
- [2] XIA K, YAO W. Dynamic rock tests using split Hopkinson (Kolsky) bar system - A review[J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2015, 7(1): 27 - 59.
- [3] GOMEZ J T, SHUKLA A, SHARMA A. Static and dynamic behavior of concrete and granite in tension with damage[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2001, 36(1): 37 - 49.
- [4] ZHANG Q B, ZHAO J. Determination of mechanical properties and full-field strain measurements of rock material under dynamic loads[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2013, 60: 423 - 439.
- [5] 陈静静. 基于高速 DIC 方法的脆性材料动态力学性能研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2014. (CHEN Jing-jing. Study on the dynamic mechanical properties of brittle materials by high-speed DIC[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2014. (in Chinese))
- [6] ZHU W C, BAI Y, LI X B, et al. Numerical simulation on rock failure under combined static and dynamic loading during SHPB tests[J]. International Journal of Impact Engineering, 2012, 49: 142 - 157.
- [7] 宫凤强. 动静组合加载下岩石力学特性和动态强度准则的试验研究[D]. 长沙: 中南大学, 2010. (GONG Feng-qiang. Experimental study of rock mechanical properties under coupled static-dynamic loads and dynamic strength criterion[D]. Changsha: Central South University, 2010. (in Chinese))
- [8] 杨小礼. 线性与非线性破坏准则下岩土极限分析方法及其应用[D]. 长沙: 中南大学, 2002. (YANG Xiao-li. Limit analysis method and its application to geotechnical engineering with linear and nonlinear failure criteria[D]. Changsha: Central South University, 2002. (in Chinese))
- [9] 杨 峰, 阳军生, 赵炼恒. 浅埋隧道工作面破坏模式与支护反力研究[J]. 岩土工程学报, 2010(2): 279 - 284. (YANG Feng, YANG Jun-sheng, ZHAO Lian-heng. Collapse mechanism and support pressure for shallow tunnel face[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010(2): 279 - 284. (in Chinese))
- [10] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1): 1 - 11. (CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(1): 1 - 11. (in Chinese))
- [11] 阿比尔的, 冯夏庭, 郑颖人, 等. 岩土类材料应变分析与基于极限应变判据的极限分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, 34(8): 1552 - 1560. (A Bierde, FENG Xia-ting, ZHENG Yin-ren, et al. Strain analysis and numerical analysis based on limit strain for geomaterials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2015, 34(8): 1552 - 1560. (in Chinese))
- [12] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. York: Elsevier Scientific Publishing Co, 1975.
- [13] GB/T50266—99 工程岩体试验方法标准[S]. 1999. (GB/T50266—99 Standard for tests method of engineering rock masses[S]. 1999. (in Chinese))