

DOI: 10.11779/CJGE201706007

# 饱和半空间表面无限长梁的沉降变形

王 鹏<sup>1</sup>, 史 吏<sup>2</sup>, 张丙钦<sup>1</sup>, 谷 川<sup>1</sup>

(1. 温州大学建筑工程学院, 浙江 温州 325035, 2. 浙江工业大学建筑工程学院, 浙江 杭州 310014)

**摘 要:** 采用解析方法研究了饱和半空间表面无限长欧拉梁的沉降变形特性。假定梁与地基的竖向接触应力沿梁截面均匀分布、梁的挠度与梁截面下地基表面的位移均值相等, 分别考虑地基表面完全透水及完全不透水情况, 基于 Fourier 及 Laplace 联合变换获得了问题的解析解, 并通过已有研究结果及 ABAQUS<sup>TM</sup> 有限元分析模型对比验证了解的正确性。分析结果表明, 梁的弯曲刚度、地基的排水及不排水泊松比以及地基表面的透水条件对梁的沉降变形有明显影响。

**关键词:** 饱和半空间; 梁; 沉降变形; 时域

**中图分类号:** TU435

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-4548(2017)06-1022-08

**作者简介:** 王 鹏(1984-), 男, 博士, 副教授, 主要从事土动力学及地基处理方面的研究。E-mail: geowangpeng@163.com。

## Bending consolidation of an infinite beam of finite width resting on a saturated poroelastic halfspace

WANG Peng<sup>1</sup>, SHI Li<sup>2</sup>, ZHANG Bing-qin<sup>1</sup>, GU Chuan<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Wenzhou University, Wenzhou 325035, China; 2. College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China)

**Abstract:** The time-dependent flexural behavior of an infinite beam of finite width resting on the surface of a saturated poroelastic halfspace is examined. The vertical contact stress is assumed to be uniformly distributed across the beam section. The displacement continuity is achieved by equaling the beam deflection to the average displacement of the halfspace surface under the beam width. The drainage condition at the surface of the poroelastic halfspace is considered as either completely drained or completely undrained. The problem is analytically solved using the Fourier and Laplace transformations. The developed solutions are verified via comparisons with the existing analytical solutions and computational results by finite element code ABAQUS<sup>TM</sup>. The numerical results indicate that the beam bending rigidity, the drained and undrained Poisson's ratios and the drainage boundary conditions at the halfspace surface have important influences on the flexural responses of the beam.

**Key words:** saturated poroelastic halfspace; beam; bending consolidation; time-domain

## 0 引 言

梁与地基相互作用研究在诸如基础工程、隧道工程和铁路工程等方面有着重要意义。以往研究中往往将地基假定为弹性介质, 该方面的研究可根据梁与地基接触边界条件分为3类: ①第一类是应用最广泛的“弱耦合”<sup>[1-5]</sup>接触条件, 即假定梁与地基接触面光滑、竖向接触应力沿梁横截面均匀分布且梁位移与梁中心线位置处的地基位移连续; ②第二类接触条件为“平均耦合”<sup>[6]</sup>, 即假定竖向接触应力沿梁横截面均匀分布且梁位移与梁横截面下地基位移的平均值相等; ③第三类为“约束耦合”<sup>[7-8]</sup>, 即假定梁横截面下地基竖向位移与梁挠度相等, 而竖向接触应力的分布形式未知。

“约束耦合”严格满足了梁横向挠曲刚度无限大时(即梁的挠曲变形仅发生在纵向)的接触力学行为,

但该接触边界条件下的耦合积分方程求解过程十分繁琐。通过将竖向接触应力假定为3个矩形分布的叠加, Biot<sup>[9]</sup>首次得到了“约束耦合”问题的近似解。Rvachev<sup>[10]</sup>及 Lekkerkerker<sup>[11]</sup>采用改进的接触面应力分布形式, 重新求解了“约束耦合”问题。Selvadurai<sup>[12]</sup>研究了弹性全空间中埋置条形基础的挠曲变形, 对“约束耦合”问题的上述3种近似解进行了对比分析, 详细求解过程可参见文献[13, 14]。梁横向挠曲刚度要远大于纵向挠曲刚度, 因而“约束耦合”接触条件最为适用, 但“约束耦合”问题分析过程十分复杂。Steenbergen等<sup>[15]</sup>对比了上述3种接触边界条件下的弹

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51208383); 浙江省自然科学基金项目(LQ12E08008); 浙江省重点科技创新团队项目(2011R50020)  
**收稿日期:** 2016-01-08

性半空间等效刚度,发现相比于“弱耦合”,“平均耦合”与“约束耦合”更为接近。

当地下水位较高时,土体中充满孔隙水,因此将地基视为饱和多孔介质更符合实际情况。Biot<sup>[16]</sup>首先提出了饱和土体的三维渗流固结方程,并进一步考虑了惯性力的影响提出了动力固结方程<sup>[17]</sup>。基于 Biot 理论,许多学者<sup>[18-20]</sup>采用“弱耦合”条件,利用 Fourier 变换在波数-频域中求解控制方程,研究了轨道梁与饱和地基的动力相互作用问题。相比于梁与饱和地基的动力相互作用,饱和地基表面梁的准静态沉降变形问题则很少有人关注。Biot 等<sup>[21]</sup>对研究了二维饱和地基上梁的弯曲变形。Marvin<sup>[22]</sup>和 Booker 等<sup>[23]</sup>对饱和地基上板和筏板的沉降变形做了类似分析。其它类似研究多集中在饱和地基与表面或埋置刚性体的相互作用方面<sup>[24-26]</sup>。目前为止,未见三维饱和地基上覆梁沉降变形特性的研究报道。

在已有研究基础上,本文研究了饱和半空间表面有限宽、无限长欧拉梁的沉降变形特性。饱和土体采用修正 Biot 固结方程以考虑孔隙水压缩性,并采用“平均耦合”替代“约束耦合”作为梁-地基接触面条件以简化推导和求解。分别考虑饱和半空间表面完全透水及完全不透水两种情形,在 Fourier-Laplace 变换域中求解控制方程,并通过数值逆变换获得问题的时间-空间域解答。利用已有研究结果及 ABAQUS<sup>TM</sup> 有限元分析结果验证了推导过程的正确性。分析结果表明,梁的挠曲刚度、孔隙水的压缩性、半空间表面透水条件对 Heaviside 型集中荷载作用下、饱和半空间表面梁的挠曲变形及弯矩响应有较大影响。

## 1 控制方程

直角坐标系中宽度( $y$ 向)为 $2b$ 的无限长( $x$ 向)欧拉梁置于饱和半空间表面,如图1所示。梁与半空间接触区域记为 $\Gamma_c(x \in (-\infty, \infty); y \in (-b, b); z = 0)$ ,半空间表面其它区域记为 $\Gamma_e$ 。同时定义 $\Gamma_{e1}: x \in (-\infty, \infty), y \in (b, \infty), z = 0$ ;  $\Gamma_{e2}: x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, -b), z = 0$ 。有 $\Gamma_e = \Gamma_{e1} \cup \Gamma_{e2}$ ,  $\Gamma_c \cup \Gamma_e = \Gamma$ 及 $\Gamma_c \cap \Gamma_e = \emptyset$ 。

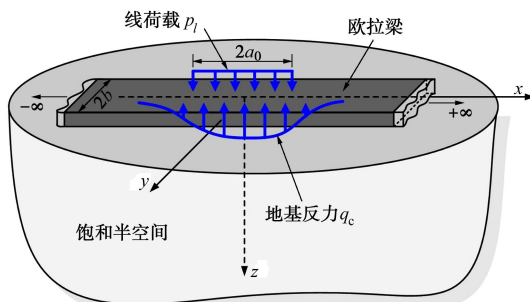


图1 饱和半空间上覆无限长欧拉梁分析模型

Fig. 1 Analysis model for an infinite beam on a saturated poroelastic halfspace

梁表面中心线上竖直作用一个分布宽度为 $2a_0$ ,幅值为 $p_l$ 的 Heaviside 线荷载。梁横截面刚度假定为无限大( $y$ 向没有挠曲变形),梁纵向挠曲变形由 Euler-Bernoulli 梁理论控制:

$$EI \frac{d^4 w_b(x, t)}{dx^4} + q_c(x, t) = p_l H(a_0 - |x|) H(t), \quad (1)$$

式中,  $w_b$ 为梁位移,  $EI$ 为梁纵向挠曲刚度,  $q_c$ 为作用于梁中心线处、大小待定的地基反力,  $H(\cdot)$ 为 Heaviside 函数,  $M_b$ 为梁弯矩, 并有 $M_b = -EI(d^2 w_b / dx^2)$ 。当线荷载分布宽度 $a_0$ 趋于0时,线荷载将退化为点荷载。

考虑孔隙水的压缩性,饱和土体本构方程为<sup>[25]</sup>

$$\sigma_{ij} = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} p \delta_{ij}, \quad (2a)$$

$$p = \frac{2\mu B^2(1-2\nu)(1+\nu_u)^2}{9(\nu_u - \nu)(1-2\nu_u)} \zeta_v - \frac{2\mu B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \varepsilon_{kk}, \quad (2b)$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad (3)$$

式中,  $p$ 为孔隙水压,  $\zeta_v$ 为孔隙水体应变,  $\sigma_{ij}$ 为总应力张量,  $\varepsilon_{ij}$ 为土骨架应变,  $u_i (i = x, y, z)$ 为各方向位移分量。

平衡方程为(不计体力)

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (4)$$

Darcy 渗流方程为

$$v_i = -kp_{,i}, \quad (5)$$

式中,  $v_i$ 表示各方向孔隙水流速。

渗流连续方程为

$$\frac{\partial \zeta_v}{\partial t} + v_{i,i} = 0. \quad (6)$$

上述方程共有5个独立变量:排水泊松比 $\nu$ ,不排水泊松比 $\nu_u$ ,剪切模量 $\mu$ , Skempton 孔压系数 $B$ 以及渗透系数 $k (k = k_D / \gamma_w, k_D$ 为达西渗透系数,  $\gamma_w$ 为水的重度)。

为便于分析,定义

$$c = \frac{2\mu B^2(1-\nu)(1+\nu_u)^2 k}{9(\nu_u - \nu)(1-\nu_u)}, \quad (7)$$

并对相关变量进行无量纲化

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{x}{b}, t^* = \frac{ct}{b^2}, w_b^* = \frac{w_b}{b}, u^* = \frac{u}{b}, M_b^* = \frac{M_b}{\mu b^3}, \\ p^* &= \frac{p}{\mu}, k^* = \frac{\mu k}{c}, v^* = \frac{bv}{c}, \sigma^* = \frac{\sigma}{\mu}, EI^* = \frac{EI}{\mu b^4}, \\ q_c^* &= \frac{q_c}{\mu b}, p_l^* = \frac{p_l}{\mu b}, a_0^* = \frac{a_0}{b}, F_0^* = \frac{F_0}{\mu b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中,  $u$ ,  $\sigma$ ,  $v$ 分别为位移、应力及孔隙水流速矢量,  $t$ 为时间。为简单起见,后续分析中将略去“\*”。

为求解方程,对 $(x, y)$ 坐标进行 Fourier 变换,对

时间  $t$  进行 Laplace 变换:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\xi, \eta, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, z, t) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy, \\ \varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi, \eta, z, t) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \bar{\varphi}(x, y, z, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, z, t) e^{-st} dt, \\ \varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} \bar{\varphi}(x, y, z, s) e^{st} ds, \end{cases} \quad (10)$$

式中,  $\xi, \eta$  分别为  $x, y$  方向的波数,  $s$  为 Laplace 参数。

将式 (2a)、(2b)、(3) 代入式 (4), 并进行 Laplace 变换, 可得

$$\bar{u}_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} \bar{u}_{j,ji} - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} \bar{p}_{,i} = 0 \quad (11)$$

假定初始条件  $\zeta_v|_{t=0} = 0$ , 并对式 (2b) 及式 (5)、(6) 进行 Laplace 变换, 可得

$$\frac{3(1-2\nu_u)}{2B(1+\nu_u)} \bar{p} + \bar{\varepsilon}_{kk} = \frac{kB(1-2\nu)(1+\nu_u)}{3(\nu_u - \nu)s} \bar{p}_{,ii} \quad (12)$$

将  $\nabla \cdot$  式 (11) 代入  $\nabla^2 \cdot$  式 (12), 消除土骨架体应变  $\varepsilon_{kk} = u_{k,k}$ , 可得

$$\nabla^4 \bar{p} - s \nabla^2 \bar{p} = 0 \quad (13)$$

式中,  $\nabla$  表示 Laplace 算子。

将式 (13) 关于坐标  $x$  和  $y$  进行 Fourier 变换, 可得孔压  $p$  在 Fourier-Laplace 变换域中的常微分控制方程, 解得

$$\bar{\bar{p}} = A_1 e^{-\gamma_1 z} + A_2 e^{-\gamma_2 z} \quad (14)$$

式中,  $A_1, A_2$  为未知参数,  $\gamma_i (i=1, 2)$  定义为

$$\begin{cases} \gamma_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + s}, \\ \gamma_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \end{cases} \quad (15)$$

式中,  $\text{Re}(\gamma_i) \geq 0$  以满足半空间正则条件。继而可解得土骨架位移及孔隙水竖向流速:

$$\bar{\bar{u}}_x = \frac{1}{i\xi} \left\{ [\chi_1 + a_1(\xi^2 + s)] A_1 e^{-\gamma_1 z} + [A_2(\chi_2 - a_2) + A_3\gamma_2 + A_4\eta] e^{-\gamma_2 z} + A_2 a_2 \gamma_2 \left( 1 - \frac{\eta^2}{\gamma_2^2} \right) z e^{-\gamma_2 z} \right\} \quad (16a)$$

$$\bar{\bar{u}}_y = i \left( -A_1 \eta a_1 e^{-\gamma_1 z} + A_4 e^{-\gamma_2 z} - A_2 \eta a_2 z \frac{e^{-\gamma_2 z}}{\gamma_2} \right) \quad (16b)$$

$$\bar{\bar{u}}_z = A_1 a_1 \gamma_1 e^{-\gamma_1 z} + A_3 e^{-\gamma_2 z} + A_2 a_2 z e^{-\gamma_2 z} \quad (16c)$$

$$\bar{\bar{v}}_z = k(A_1 \gamma_1 e^{-\gamma_1 z} + A_2 \gamma_2 e^{-\gamma_2 z}) \quad (16d)$$

式中,  $A_3, A_4$  为未知参数,  $a_1, a_2, \chi_1$  及  $\chi_2$  具体见附录。

利用式 (2a) 可得半空间表面应力分量:

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx} = \frac{i}{\xi} \left\{ A_1 g_1 \gamma_1 e^{-\gamma_1 z} + [A_2 g_2 \gamma_2 + A_3(2\xi^2 + \eta^2) + A_4 \eta \gamma_2] e^{-\gamma_2 z} + 2A_2 \xi^2 a_2 z e^{-\gamma_2 z} \right\} \quad (17a)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xy} = i \left[ 2A_1 \eta a_1 \gamma_1 e^{-\gamma_1 z} - \left( A_2 \frac{\eta a_2}{\gamma_2} - A_3 \eta + A_4 \gamma_2 \right) e^{-\gamma_2 z} + 2A_2 \eta a_2 z e^{-\gamma_2 z} \right] \quad (17b)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = A_1 g_3 e^{-\gamma_1 z} + (A_2 g_4 - 2A_3 \gamma_2) e^{-\gamma_2 z} - 2A_2 a_2 \gamma_2 z e^{-\gamma_2 z} \quad (17c)$$

式中,  $g_1, g_2, g_3, g_4$  具体见附录。

式 (14)、(16a)~(16c)、(17a)~(17c) 为  $\xi, \eta, z$  及  $s$  的函数, 构成了 Fourier-Laplace 变换域中饱和半空间准静态响应的基本解。对欧拉梁控制方程式 (1) 进行 Fourier-Laplace 变换, 可得

$$\bar{\bar{w}}_b(\xi, s) = \frac{2p_l a_0 \sin(\xi a_0)}{s \xi a_0} \frac{1}{EI \xi^4 + \bar{\bar{K}}(\xi, s)} \quad (18)$$

式中,  $\bar{\bar{K}}(\xi, s)$  为核函数, 定义为地基反力  $q_c$  及梁挠度  $w_b$  的比值:

$$\bar{\bar{K}}(\xi, s) = \frac{\bar{\bar{q}}_c(\xi, s)}{\bar{\bar{w}}_b(\xi, s)} \quad (19)$$

## 2 边界条件

对于底面不透水、横向挠曲刚度无穷大的欧拉梁, 其与表面透水的饱和半空间“约束耦合”时所对应的接触边界条件为

$$u_z(x, y, 0, t) = w_b(x, t) [(x, y) \in \Gamma_c; \forall t \geq 0] \quad (20a)$$

$$u_x(x, y, 0, t) = u_y(x, y, 0, t) = 0 [(x, y) \in \Gamma_c; \forall t \geq 0]; \quad (20b)$$

$$\sigma_{xx}(x, y, 0, t) = \sigma_{xy}(x, y, 0, t) = \sigma_{zz}(x, y, 0, t) = 0 [(x, y) \in \Gamma_c; \forall t \geq 0]; \quad (20c)$$

$$v_z(x, y, 0, t) = 0 [(x, y) \in \Gamma_c; \forall t \geq 0]; \quad (20d)$$

$$p(x, y, 0, t) = 0 [(x, y) \in \Gamma_c; \forall t \geq 0] \quad (20e)$$

饱和半空间初始条件及正则条件为

$$\zeta_v(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (\forall \mathbf{x} \in V) \quad (21a)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0, p(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0 \quad (\forall \mathbf{x} \in V, \forall t \geq 0) \quad (21b)$$

式中,  $V$  对应整个半空间。

如式 (20) 所示, “约束耦合”所定义的混合边界条件同时包括了总应力  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  及孔压  $p(\mathbf{x}, t)$ , 因此在梁的两条侧边处 (即  $y = \pm 1; x \in (-\infty, \infty), z = 0$ ; 注意梁宽已除以  $b$  进行无量纲化), 应力及孔压场存在奇异性, 使得耦合 Fredholm 积分控制方程的求解过程十分复杂。因而此处采用“平均耦合”假设, 即

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_z(x, y, 0, t) dy = w_b(x, t) \quad [(x, y) \in \Gamma_c, \forall t \geq 0]; \quad (22a)$$

$$\sigma_z(x, y, 0, t) = \frac{q_c(x, t)}{2} H(|y| - 1) \quad [(x, y) \in \Gamma, (\forall t \geq 0)]; \quad (22b)$$

$$\sigma_{zx}(x, y, 0, t) = \sigma_{zy}(x, y, 0, t) = 0 \quad [(x, y) \in \Gamma, \forall t \geq 0]; \quad (22c)$$

$$p(x, y, 0, t) = 0 \text{ or } v_z(x, y, 0, t) = 0 \quad [(x, y) \in \Gamma, \forall t \geq 0]; \quad (22d)$$

将式(22)进行 Fourier-Laplace 变换

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_z(\xi, \eta, 0, s) e^{i\eta y} d\eta \right] dy = \tilde{w}_b(\xi, s), \quad (23a)$$

$$\tilde{\sigma}_z(\xi, \eta, 0, s) = -\frac{\sin \eta}{\eta} \tilde{q}_c(\xi, s), \quad (23b)$$

$$\tilde{\sigma}_{zx}(\xi, \eta, 0, s) = \tilde{\sigma}_{zy}(\xi, \eta, 0, s) = 0, \quad (23c)$$

$$\tilde{p}(\xi, \eta, 0, s) = 0 \text{ or } \tilde{v}_z(\xi, \eta, 0, s) = 0. \quad (23d)$$

将式(17)、(14)、(16d)代入式(23b)、(23d), 可解得  $A_1 \sim A_4$ 。将式(16c)代入式(23a), 可得到完全排水及完全不排水条件下式(19)定义的核函数:

$$\tilde{K}(\xi, s) = \frac{\tilde{q}_c(\xi, s)}{\tilde{w}_b(\xi, s)} = \frac{4\pi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_2 g_6}{\Delta_0} \left( \frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 d\eta}, \quad (24a)$$

$$\tilde{K}(\xi, s) = \frac{\tilde{q}_c(\xi, s)}{\tilde{w}_b(\xi, s)} = \frac{4\pi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_1 g_6}{\Delta_1} \left( \frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 d\eta}, \quad (24b)$$

式中,  $g_6$ ,  $\Delta_0$ ,  $\Delta_1$  具体见附录。

进而对式(18)进行 Fourier 及 Laplace 逆变换, 可得梁位移和弯矩的时间—空间域解答:

$$\frac{w_b(x, t)}{2p_l a_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} s \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a_0)}{\xi a_0} \frac{e^{i\xi x}}{EI\xi^4 + \tilde{K}(\xi, s)} d\xi \right] e^{st} ds, \quad (25)$$

$$\frac{M_b(x, t)}{2p_l a_0} = \frac{EI}{2\pi i} \int_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} s \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a_0)}{\xi a_0} \frac{\xi^2 e^{i\xi x}}{EI\xi^4 + \tilde{K}(\xi, s)} d\xi \right] e^{st} ds. \quad (26)$$

若  $a_0$  趋于 0, 则  $\sin(\xi a_0)/(\xi a_0)$  退化为 1 且  $2p_l a_0$  退化为点荷载幅值  $F_0$ , 从而式(25)、(26)退化为点荷载作用下的欧拉梁响应解答。

### 3 方程求解

式(25)、(26)包含了两重积分逆变换, 无法得到显式的解析解, 因此需采用数值方法进行 Fourier 及

Laplace 逆变换。具体而言, 在较大数值上截断波数  $\xi$  和  $\eta$ , 并采用 Gauss 积分进行 Fourier 逆变换; 通过 IMSL<sup>TM</sup> 子程序 “dinlap” 进行 Laplace 逆变换<sup>[27-28]</sup>。基于 Tauberian 理论<sup>[29]</sup>, 可得梁位移及弯矩(式(25)、(26))在  $t \rightarrow 0^+$  及  $t \rightarrow +\infty$  的初值和终值, 以式(26)为例:

$$\frac{M_b(x, 0^+)}{2p_l a_0} = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \left\{ \frac{EI}{2\pi} \frac{1}{s} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a_0)}{\xi a_0} \frac{\xi^2}{EI\xi^4 + \tilde{K}(\xi, s)} e^{i\xi x} d\xi \right] \right\} \\ = \frac{EI}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a_0)}{\xi a_0} \frac{\xi^2}{EI\xi^4 + \lim_{s \rightarrow +\infty} \tilde{K}(\xi, s)} e^{i\xi x} d\xi, \quad (27a)$$

$$\frac{M_b(x, +\infty)}{2p_l a_0} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \frac{EI}{2\pi} \frac{1}{s} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a_0)}{\xi a_0} \frac{\xi^2}{EI\xi^4 + \tilde{K}(\xi, s)} e^{i\xi x} d\xi \right] \right\} \\ = \frac{EI}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a_0)}{\xi a_0} \frac{\xi^2}{EI\xi^4 + \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{K}(\xi, s)} e^{i\xi x} d\xi, \quad (27b)$$

式中,  $s \rightarrow 0$  及  $s \rightarrow +\infty$  条件下的核函数可通过式(24)得到

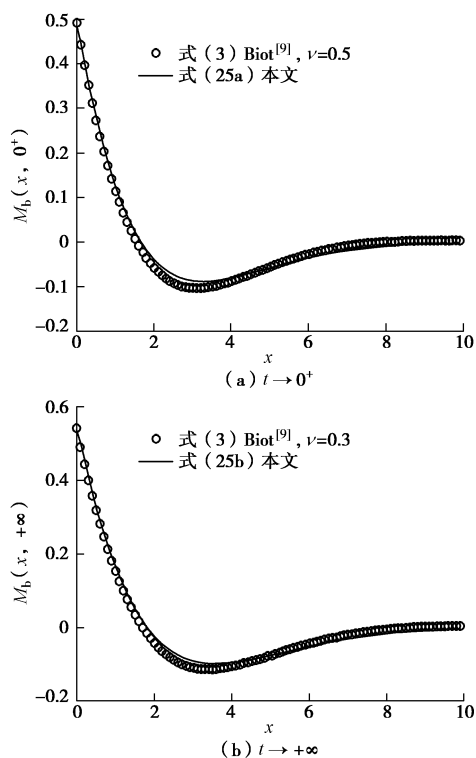
$$\tilde{K}_{0^+}(\xi) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \tilde{K}(\xi, s) = \frac{4\pi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(1-\nu_u)}{\gamma_2} \left( \frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 d\eta}, \quad (28a)$$

$$\tilde{K}_{+\infty}(\xi) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{K}(\xi, s) = \frac{4\pi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(1-\nu)}{\gamma_2} \left( \frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 d\eta}. \quad (28b)$$

式(25)、(26)、(27a)、(27b)、(28a)、(28b)被积函数为波数  $\xi$  及  $\eta$  的偶函数。为验证数值逆变换的准确性, 将  $t \rightarrow 0^+$  及  $t \rightarrow +\infty$  时, 式(28a)、(28b)中核函数及式(27)中弯矩与 Biot<sup>[9]</sup>计算结果进行对比, 分别见表 1 及图 2。Biot<sup>[9]</sup>基于“平均耦合”, 分析了点荷载作用下弹性半空间表面梁的挠曲变形。此处取模型参数  $\nu = 0.3$ ,  $\nu_u = 0.5$ ,  $EI = 16$  以及  $F_0 = 1$ , 采用 81 点 Gauss 积分进行 Fourier 逆变换, 并采用 “dinlap” 默认参数设置进行 Laplace 逆变换。由表 1 和图 2 对比结果可知此处的数值逆变换参数设置能够满足精度要求。

表 1 本文与 Biot<sup>[9]</sup>结果对比

Table 1 Comparison between numerical results and Biot's <sup>[9]</sup>						
$\xi$	$t \rightarrow 0^+$			$t \rightarrow +\infty$		
	Biot <sup>[9]</sup>	式 (28a)	误差/%	Biot <sup>[9]</sup>	式 (28b)	误差/%
0.1	1.92	1.94	1.30	1.37	1.39	1.31
0.5	3.80	3.73	-1.84	2.71	2.66	-1.85
1	5.68	5.66	-0.32	4.06	4.04	-0.32
3	13.56	13.53	-0.22	9.69	9.66	-0.22
8	33.28	33.37	0.27	23.77	23.84	0.27

图2 本文结果与 Biot<sup>[9]</sup>结果对比Fig. 2 Comparison between numerical results and Biot's<sup>[9]</sup>

#### 4 算例分析

将式(8)进行参数无量纲化后,式(24)中“核函数”仅与饱和半空间的5个材料参数中的3个有关,即排水泊松比 $\nu$ 、不排水泊松比 $\nu_u$ 及 Skempton 孔压系数 $B$ 。通过进一步分析, $B$ 可从“核函数”表达式中约去,从而“核函数”仅受排水泊松比 $\nu$ 、不排水泊松比 $\nu_u$ 及接触面透水条件的影响。所以此处重点分析了以上3个因素对梁挠曲位移及弯矩随时间变化的影响。Heaviside 型点荷载作用在欧拉梁的 $x=0$ 点,该点 $t$ 时刻的位移及弯矩固结度可表示为

$$U_w(t) = \frac{w_b(0,t) - w_b(0,0^+)}{w_b(0,+\infty) - w_b(0,0^+)}, \quad (29a)$$

$$U_M(t) = \frac{M_b(0,t) - M_b(0,0^+)}{M_b(0,+\infty) - M_b(0,0^+)}. \quad (29b)$$

图3分析了半空间表面透水条件对梁的挠曲位移及弯矩固结度影响,模型参数取为 $F_0=1$ ,  $EI=0.36$ ,  $\nu=0$ 以及 $\nu_u=0.5$ 。由图3可知,在完全透水条件下,梁位移及弯矩达到某一固结度所需时间小于完全不透水情形,即在时刻 $t$ 完全透水条件下的梁位移及弯矩固结度要大于完全不排水情形。

考虑半空间表面完全透水及完全不透水两种情形,图4分析了排水泊松比 $\nu$ 和不排水泊松比 $\nu_u$ 对梁挠曲位移和弯矩随时间变化的影响。参照 Selvadurai 等<sup>[30]</sup>, $\nu$ 和 $\nu_u$ 分别取 $(0, 0.5)$ ,  $(0, 0.2)$ 及 $(0.4, 0.5)$ ,其

它模型参数同图3。由图4可知,梁位移及弯矩的初值与终值( $t \rightarrow 10^{-4}$ ,  $t \rightarrow 10^2$ )分别取决于饱和半空间的排水及不排水泊松比,由式(28)可知此观察结论的正确性。梁位移与弯矩的( $w_b(t) - w_b(0)$ 与 $M_b(t) - M_b(0)$ )及变化速率与 $(\nu_u - \nu)$ 成正比。

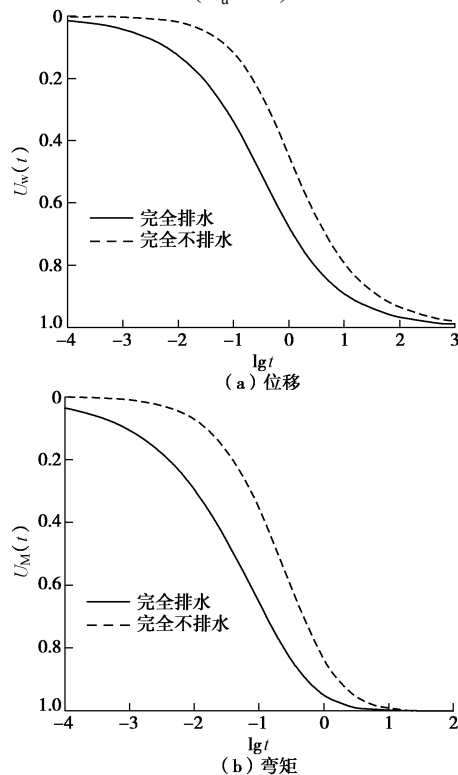


图3 排水条件对沉降变形的影响

Fig. 3 Effect of drainage conditions on consolidation

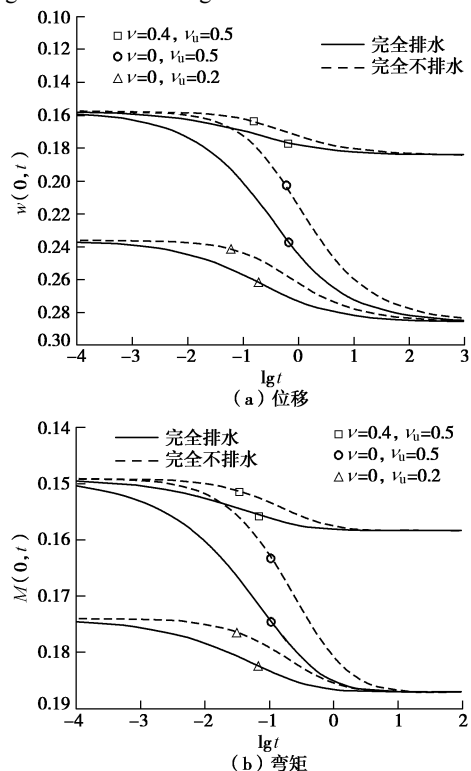


图4 泊松比对沉降变形的影响

Fig. 4 Effect of Poisson's ratios on consolidation

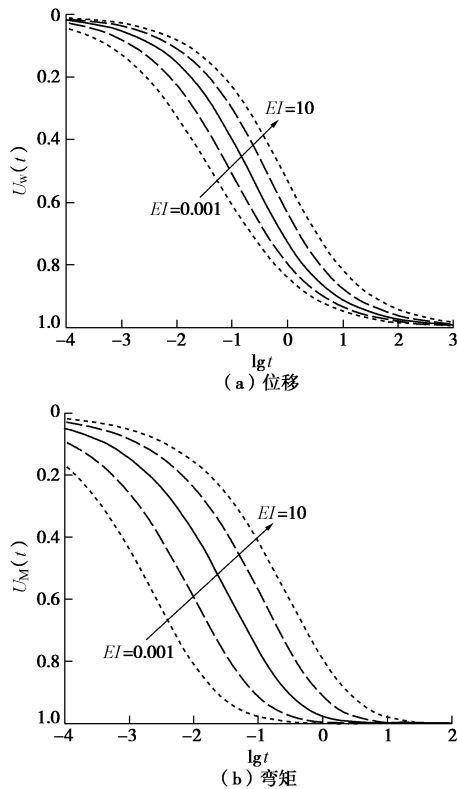


图5 弯曲刚度对沉降变形的影响

Fig. 5 Effect of beam bending rigidity on consolidation

图5给出了完全透水条件下,梁挠曲刚度对梁位移及弯矩固结度的影响。此处考虑了5种挠曲刚度,  $EI = 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10$ , 其它参数同图3。由图3可知,随挠曲刚度的增加,梁位移及弯矩达到某一固结度所需时间随着刚度的增加而减少。

## 5 有限元模拟

采用薄板模拟梁体,在 ABAQUS<sup>TM</sup> 中建立了饱和地基一薄板相互作用的三维有限元分析模型,并与本文解析研究结果进行对比。将  $x=0$  处的竖向点荷载  $F_0$  化为强度为  $F_0/2b$  的 shell-edge 型、沿板宽均匀分布的线荷载。基于荷载及分析模型关于  $x=0$  及  $y=0$  平面的对称性,此处仅考虑四分之一分析模型,并在荷载作用位置附近及板的侧边区域进行网格加密以考虑应力梯度的影响,具体如图6所示。

ABAQUS<sup>TM</sup> 三维模型分析耗时较长,故而此处采用较小边长( $4b$ )的立方体来模拟饱和地基,并采用六面体实体单元 C3D20RP 进行离散,该单元可考虑饱和土体中的孔隙水压,板采用四边形壳体单元 S8R5 离散。除两个对称平面外,地基地底固定,侧边自由。地基表面设为完全透水及完全不透水两种情形,其余面完全不透水。在设置  $x=0$  平面的对称边界条件时,取  $u_x = 0$ ,  $u_y$  和  $u_z$  自由,  $y=0$  对称平面则有  $u_y = 0$ ,  $u_x$  和  $u_z$  自由。

由于“平均耦合”是一个十分理想化的接触边界条件,无法在 ABAQUS<sup>TM</sup> 中直接实现。为实现接触面处的位移连续条件,将板单元与板底土体单元设置为紧密接触(ABAQUS<sup>TM</sup> 的“TIE”命令)以近似“平均耦合”的位移连续条件,从而要求将梁挠曲刚度设置为一个较低的值。因此,计算过程中取  $EI = 9 \times 10^{-5}$ , 排水及不排水泊松比( $\nu_u, \nu$ )=(0.3, 0.5)。图7对比了有限元分析及式(25)、(26)计算结果,由图可知两者计算结果十分匹配。

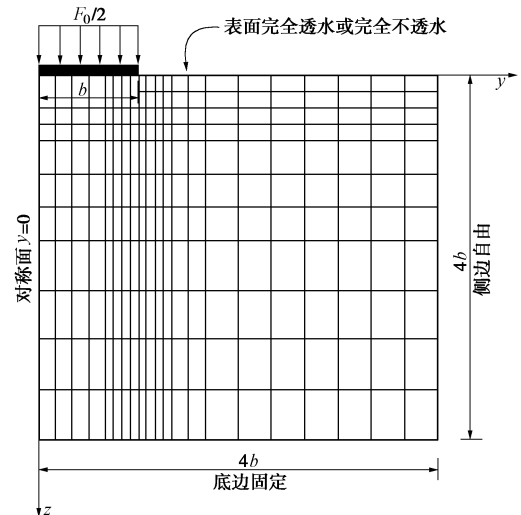


图6 有限元分析模型及网格划分示意图

Fig. 6 Schematic view of analysis model and finite element mesh

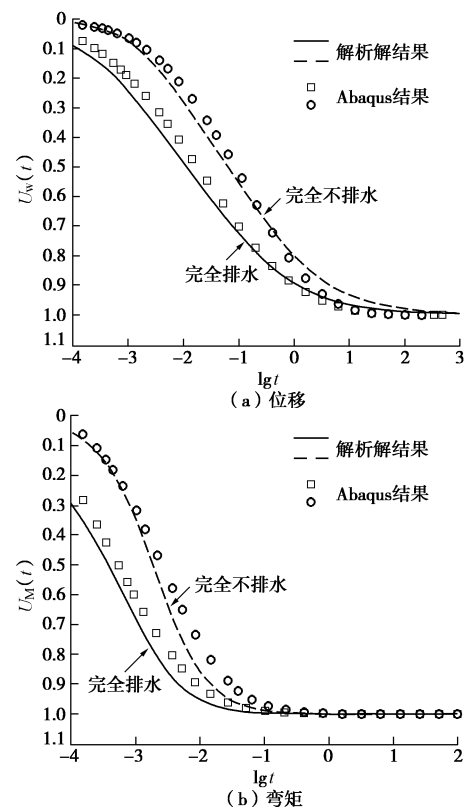


图7 解析与有限元结果对比

Fig. 7 Comparison between analytical and finite element results

## 6 结 语

基于“平均耦合”边界接触条件,研究了 Heaviside 型点荷载作用下饱和半空间表面无限长欧拉梁的沉降变形特性。考虑了饱和半空间表面完全透水及完全不透水两种情况,在 Fourier-Laplace 变换域中求解了控制方程,并通过数值积分逆变换获得了问题的时间—空间域解答。通过与  $t \rightarrow 0^+$  及  $t \rightarrow +\infty$  两种极限情况下的已有研究结果及 ABAQUS<sup>TM</sup> 有限元分析结果进行对比验证了本文求解的正确性。分析结果表明,梁的挠曲刚度、饱和土体的排水及不排水泊松比、半空间表面透水条件对梁沉降变形的大小和速率有着明显影响。

### 参考文献:

- [1] DIETERMAN H A, METRIKINE A. The equivalent stiffness of a halfspace interacting with a beam: critical velocities of a moving load along the beam[J]. *European Journal of mechanics A/Solids*, 1996, **15**(1): 67 - 90.
- [2] DIETERMAN H A, METRIKINE A. Steady-state displacement of a beam on an elastic halfspace due to a uniformly moving constant load[J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 1997, **16**(2): 295 - 306.
- [3] KONONOV A V, WOLFERT R A M. Load motion along a beam on a viscoelastic halfspace[J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2000, **19**: 361 - 371.
- [4] TAKEMIYA H. Simulation of track-ground vibrations due to a high-speed train: the case of X-2000 at Ledsgard[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **261**: 503 - 526.
- [5] XU B, LU J, WANG J H. Dynamic response of an infinite beam overlying a layered poroelastic halfspace to moving loads[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **306**: 91 - 110.
- [6] AUERSCH L. Dynamic interaction of various beams with the underlying soil-finite and infinite, halfspace and Winkler models[J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2008, **27**: 933 - 958.
- [7] LOMBAERT G, DEGRANDE G, CLOUTEAU D. Numerical modelling of free field traffic-induced vibrations[J]. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 2000, **19**: 473 - 488.
- [8] KARLSTROM A, BOSTROM A. An analytical model for train-induced ground vibrations from railways[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **292**(12): 221 - 241.
- [9] BIOT M A. Bending of an infinite beam on an elastic foundation[J]. *Journal of Applied Physics*, 1937, **4**: A1 - A7.
- [10] RVACHEV V L. On the bending of an infinite beam on an elastic halfspace[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1958, **22**: 984 - 988.
- [11] LEKKERKERKER J G. Bending of an infinite beam resting on an elastic halfspace[J]. *Physica Status Solid*, 1960, **63**(1): 199 - 201.
- [12] SELVADURAI A P S. The flexure of an infinite strip of finite width embedded in an isotropic elastic medium of infinite extent[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1984, **8**: 157 - 166.
- [13] SELVADURAI A P S. Elastic analysis of soil-foundation interaction, development in geotechnical engineering[M]. Amsterdam: Elsevier, 1979.
- [14] ALEYNIKOV S M. Spatial contact problems in geotechnics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2011.
- [15] STEENBERGEN M, METRIKINE A. The effect of the interface conditions on the dynamic response of a beam on a half-space to a moving load[J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2007, **26**: 33 - 54.
- [16] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. *Journal of Applied Physics*, 1941(12): 155 - 164.
- [17] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: I low-frequency range[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, **28**(2): 168 - 178.
- [18] 黎剑华, 徐 斌, 刘优平, 等. 简谐移动荷载作用下饱和土地基无限长梁的动力响应[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2010(3): 1116 - 1123. (LI Jian-hua, XU Bin, LIU You-ping, et al. Dynamic response of an infinite beam overlying a saturated poroelastic soil under harmonic moving loads[J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2010(3): 1116 - 1123. (in Chinese))
- [19] 金 波. 高速荷载下多孔饱和地基的动力响应[J]. *力学季刊*, 2004, **25**(2): 168 - 174. (JIN Bo. Dynamic response of a poroelastic halfspace generated by high speed load[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2004, **25**(2): 168 - 174. (in Chinese))
- [20] 蔡袁强, 王 玉, 曹志刚. 移动荷载作用下饱和地基板式轨道动力分析[J]. *振动工程学报*, 2011, **24**(1): 48 - 54. (CAI Yuan-qiang, WANG Yu, CAO Zhi-gang. Dynamic analysis of a slab track on the poroelastic soil subjected to moving loads[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2011,

- 24(1): 48 - 54. (in Chinese))
- [21] BIOT M A, CLINGAN F M. Bending settlement of a slab resting on a consolidating foundation[J]. Journal of Applied Physics, 1942, **13**(1): 35 - 40.
- [22] MARVIN E L. Viscoelastic plate on poroelastic foundation[J]. Journal of Engineering Mechanics Division, 1972, **98**: 911 - 928.
- [23] BOOKER J R, SMALL J C. The behavior of an impermeable flexible raft on a deep layer of consolidating soil[J]. International Journal for Numerical Methods in Geomechanics, 1986, **10**: 311 - 327.
- [24] CHIARELLA C, BOOKER J R. Time-settlement behavior of a rigid die resting on a deep clay layer[J]. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1975, **28**(3): 317 - 328.
- [25] YUE Z Q, SELVADURAI A P S. Contact problem for saturated poroelastic solid[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1995, **121**(4): 502 - 512.
- [26] YUE Z Q, SELVADURAI A P S. On the mechanics of a rigid disc inclusion embedded in fluid saturated poroelastic medium[J]. International Journal of Engineering Science, 1995, **33**(11): 1633 - 1662.
- [27] CRUMP K S. Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation[J]. Journal of the Association for Computing Machinery, 1976, **23**(1): 89 - 96.
- [28] DE HOOG F R, KNIGHT J H, STOKES A N. An improved method for numerical inversion of Laplace transforms[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1982, **3**(3): 357 - 366.
- [29] SNEDDON L N. The use of integral transforms[M]. New York: McGraw-Hill Company, 1972.
- [30] SELVADURAI A P S, YUE Z Q. On the indentation of a poroelastic layer[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1994, **18**: 161 - 175.

附录:

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \frac{3(\nu - \nu_u)}{2B(\nu - 1)(1 + \nu_u)}, \quad \chi_2 = \frac{3(2\nu_u - 1)}{2B(1 + \nu_u)}, \\ a_1(s) &= -\frac{3(\nu - \nu_u)}{2B(\nu - 1)(1 + \nu_u)s}, \quad a_2 = \frac{3}{4B(1 + \nu_u)}, \\ g_1(\xi, s) &= 2a_1\xi^2, \quad g_2(\xi, \eta) = \chi_2 + a_2\left(\frac{\eta^2}{\gamma_2^2} - 2\right), \\ g_3(\xi, \eta, s) &= -2a_1(\xi^2 + \eta^2), \quad g_4 = \frac{3(1 - 2\nu_u)}{2B(1 + \nu_u)}, \\ g_5(\xi, \eta, s) &= 2a_1(\xi^2 + \eta^2), \quad g_6 = \frac{3(\nu_u - 1)}{B(1 + \nu_u)}, \\ \Delta_0(\xi, \eta, s) &= (g_4 - g_3)(\xi^2 + \eta^2) - \gamma_2(\gamma_1 g_5 - \gamma_2 g_6), \\ \Delta_1(\xi, \eta, s) &= \gamma_2(\gamma_1 g_4 - \gamma_2 g_3) - \gamma_1 \gamma_2 (g_5 - g_6) \circ\end{aligned}$$