

DOI: 10.11779/CJGE201704011

# 基于模型不确定的挡墙土压力计算

陈建功<sup>1, 2</sup>, 张海权<sup>1, 2</sup>, 许明<sup>3</sup>, 赵鑫曜<sup>1, 2</sup>, 杨泽君<sup>1, 2</sup>

(1. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400045; 2. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室(重庆大学), 重庆 400045)

**摘要:** 基于模型不确定性土压力问题, 从滑动土体整体静力平衡方程出发, 推导了一般情况下土压力泛函极值等周模型, 包含了主动和被动极限状态两种情况。通过引入坐标变换对土压力变分问题进行求解, 得到了滑裂面函数和沿滑裂面分布的法向应力函数, 将土压力的求解进一步转化为以两个拉格朗日常数为未知量的函数的极值问题。在函数  $\Phi$  随作用点位置系数  $\xi$  的变化曲线中, 可以找到一段  $\Phi = 0$  的水平直线段, 此直线段即为合理作用点位置系数范围, 由此可以确定对应的土压力范围。通过算例对主动和被动两种情况予以说明。计算表明, 作用点位置系数存在上下界限值, 且分别对应土压力最大值和最小值及对应的滑裂面。土压力的大小和作用点位置依赖于挡墙变位模式, 作用点位置系数上下限处所对应的土压力构成的数值范围, 包含了各种挡墙变位模式下的土压力。通过本文提出的方法可以得到挡墙不同变位模式下, 土压力大小和作用点位置的区间估计, 以便为工程设计人员选用。

**关键词:** 刚性挡土墙; 土压力; 模型不确定; 极限平衡变分法

中图分类号: TU476

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2017)04 - 0669 - 07

**作者简介:** 陈建功(1967 - ), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程等方面的教学和科研。E-mail: cjb77928@126.com。

## Calculation of earth pressure on rigid retaining wall based on model indeterminacy

CHEN Jian-gong<sup>1, 2</sup>, ZHANG Hai-quan<sup>1, 2</sup>, XU Ming<sup>3</sup>, ZHAO Xin-yao<sup>1, 2</sup>, YANG Ze-jun<sup>1, 2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 2. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area (Chongqing University), Ministry of Education, Chongqing 400045, China)

**Abstract:** The earth pressure on rigid retaining wall considering model indeterminacy is focused. Based on the force equilibrium equations for sliding mass, the functional extreme-value isoperimetric model for earth pressure in the general case is derived, including active and passive limit state situations. Through the introduction of coordinate transformation, the slip surface function and normal stress function along the slip surface are obtained, the solution of earth pressure is further transcribed as the functional extreme-value problem by means of two Lagrange undetermined multipliers. In the changing curve of function  $\Phi$ , the minimum varies along with the position factor of action point  $\xi$ , and one can find a section of horizontal line segment with  $\Phi = 0$ . This line segment corresponds to the position factor range of action point of resultant earth pressure, then the corresponding earth pressure scope can be determined, and the two cases of active and passive earth pressures are explained by the calculation example. The calculated results show that the position factor of action point has the upper and lower limit values, which correspond to the maximum and minimum values of earth pressure respectively, and corresponding slip surfaces can also be obtained. It is found that the magnitude of earth pressure and the position of action point depend on the modes of wall movement. The range of values of earth pressure corresponds to the upper and lower limits of the position factor of action point, and it comprises the earth pressures on the rigid retaining wall with all possible wall modes of movement. In a word, the interval estimation of the magnitude of earth pressure and the position of action point for different modes of wall movement can be obtained using the proposed method, so that it is convenient for the engineer to choose.

**Key words:** rigid retaining wall; earth pressure; model indeterminacy; variational limit equilibrium method

## 0 引言

挡土墙上土压力的计算是经典的土力学课题, 从法国学者库仑于1773年提出库仑土压力理论开始, 距今已有200多年了。由于确定挡土结构上的土压力是进行结构设计和稳定性分析的先决条件, 直接关系到工

程设计的安全可靠及经济合理, 但土压力的确定仍然是一个难点问题, 至今也没有完全解决。这主要是由土压力发生条件提供的不充分或偶然因素的干扰所产

基金项目: 国家自然科学基金项目(51478065)

收稿日期: 2015 - 08 - 22

生的随机不确定性造成的。土压力不确定性包括计算模型的不确定性和计算所需力学参数的不确定性。计算模型的不确定性是指挡土结构物上作用的土体极限荷载随墙体的不同变位模式发生改变。Narain等<sup>[1]</sup>、Ichihara等<sup>[2]</sup>、Sherif等<sup>[3]</sup>、Fang等<sup>[4]</sup>、周应英等<sup>[5-6]</sup>、Fang等<sup>[7]</sup>、徐日庆等<sup>[8]</sup>的研究已经证明,刚性挡墙上作用的主动土压力和被动土压力随墙体不同运动形式而发生改变,相应土压力的大小各不相同。而土体力学参数的不确定性是由岩土材料本身的特点决定的。岩土材料是一种天然材料,在地质历史形成过程中,常产生有原生的层理结构面,以后在温度、湿度和构造应力的作用下又会产生次生结构面。这些结构面控制着土体的物理力学性质。另外,土体的力学性质还与土体的埋深、土体中的地下水状况以及地应力场状况有关。李兴高等<sup>[9-13]</sup>采用极限平衡变分法对库仑土压力以及土压力计算模型的不确定性问题进行了一系列的研究,并对被动土压力作出了区间估计。

极限平衡变分法最早是由Kopácsy提出的<sup>[14-15]</sup>。此后,许多国内外学者Baker<sup>[16-19]</sup>、Garber等<sup>[20-21]</sup>、Spencer等<sup>[22]</sup>、Leshchinsky等<sup>[23-24]</sup>、栾茂田等<sup>[25]</sup>、陈榕等<sup>[26]</sup>、Li<sup>[27]</sup>、郝冬雪<sup>[28]</sup>等陆续将其应用于土体稳定性分析问题。王奎华等<sup>[29]</sup>采用变分学方法求解了主动土压力的计算公式及滑裂面曲线方程。从以上的分析可以看出许多学者在这方面做出了自己的研究和贡献,得出了许多有意义的成果。这里需要指出的是大多数研究主要考虑的是挡墙竖直,坡面水平,未考虑坡面超载的情况,具有一定局限性,本文在此基础上,采用变分极限平衡法,针对坡面起伏,且有不均匀超载,墙背倾斜,黏性填土等更为一般的情况,更接近工程实际,对考虑作用点位置的刚性挡土墙的土压力计算进行理论探讨,同时考虑主动和被动极限状态两种情况,通过本文所提出的求解方法,可以得到挡墙不同变位模式下,土压力大小和作用点位置的区间估计,以便为工程设计人员选用,进而为工程设计提供一定的指导。

## 1 模型不确定性的数学背景

土体达到临界状态时,挡土墙上的土压力实质上是求解一类弹塑性边值问题,数学上包括这类定解问题的完整表达应当包括描述滑动土体静力平衡、变形相容条件及挡墙土体之间相互作用的泛定方程组和描述不同墙体变位下土体边界处的定解条件(位移和应力边界条件)。作为一个整体,二者构成定解问题,才有可能提供具体问题的适定解。不同的墙体变位模式决定了滑动土体的不同位移边界条件,也就相应存

在不同的解答。事实上,由于挡墙在设计时往往很难准确预估其墙体变位模式,求解问题的定解条件是不能确定的,因而求解问题的结果是泛定的。这种泛定性表现为不同的墙背土压力分布,在数学模型中可用合力和作用点位置两个变量来体现这种不确定性。

## 2 考虑作用点位置的土压力变分模型

### 2.1 滑动土体的极限平衡方程

设挡土墙墙背粗糙且倾斜,倾斜角 $\alpha$ ,墙高 $H$ ,墙土之间的摩擦角为 $\delta$ ,墙后土体为重度 $\gamma$ 、黏聚力 $c$ 和内摩擦角 $\varphi$ 的Coulomb材料。图1和图2分别表示墙后土体处于主动和被动极限状态的情况。在极限平衡状态下,墙后土体形成滑动楔体,其滑裂面通过刚性挡土墙墙踵,用曲线 $y=s(x)$ 表示,坡面形状用曲线 $y=g(x)$ 表示, $q(x)$ 为作用在坡面上的竖向压力集度, $P_a$ 、 $P_p$ 分别为作用在墙背上的主动和被动土压力合力, $\sigma(x)$ 、 $\tau(x)$ 分别为作用在滑动面上的法向、切向应力。取墙后处于极限平衡状态的滑楔体 $OAB$ 作为研究对象,根据力的平衡方程:

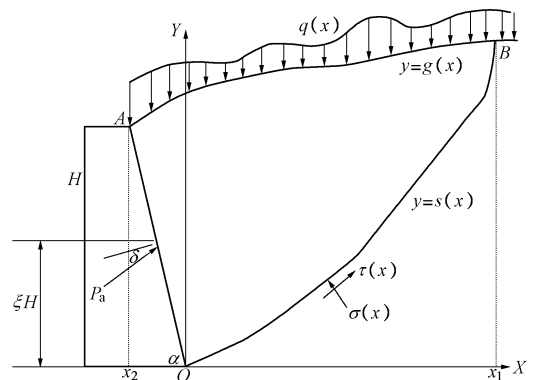


图1 主动土压力计算模型

Fig. 1 Computational model for active earth pressure

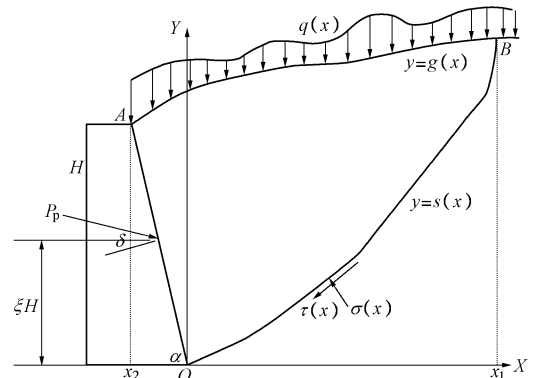


图2 被动土压力计算模型

Fig. 2 Computational model for passive earth pressure

由 $\sum X=0$ , 得

$$P_n \sin(\alpha - n\delta) + \int_0^{x_1} n\tau dx - \int_0^{x_1} \sigma s' dx = 0, \quad (1)$$

由  $\sum Y = 0$ , 得

$$P_n \cos(\alpha - n\delta) + \int_0^{x_1} n\tau s' dx + \int_0^{x_1} \sigma dx - \int_0^{x_1} q dx - \int_{x_2}^0 [\gamma(g - kx) + q] dx - \int_0^{x_1} \gamma(g - s) dx = 0, \quad (2)$$

由  $\sum M_O = 0$ , 得

$$P_n \cos \delta \frac{\xi H}{\sin \alpha} + \int_{x_2}^0 [\gamma(g - kx) + q] x dx + \int_0^{x_1} [n(s - xs')\tau - (x + ss')\sigma + qx + (g - s)\gamma x] dx = 0. \quad (3)$$

以上三式中当  $n=1$  时,  $P_n$  为主动土压力  $P_a$ , 当  $n=-1$  时,  $P_n$  为被动土压力  $P_p$ ,  $s'=ds/dx$ ,  $k=\tan \alpha$ ,  $x_1$  为点  $B$  的  $X$  坐标,  $x_2$  为点  $A$  的  $x$  坐标,  $x_2 = -H/\tan \alpha$ .  $\xi$  为土压力作用点位置系数, 其值为作用点位置至墙踵的垂直距离与挡土墙高度的比值。设在滑面上法向应力  $\sigma(x)$  和切向应力  $\tau(x)$  服从 Mohr-Coulomb 破坏准则即

$$\tau = n_1 \sigma + c, \quad (4)$$

式中,  $n_1 = \tan \phi$ 。

## 2.2 土压力整体极限平衡变分模型

考察式 (1) ~ (4), 对于给定的  $\xi$  作用点位置系数, 土压力  $P_n$  为自变量函数  $\sigma(x)$  和滑裂面  $s(x)$  的泛函极值问题, 具体如下:

由式 (3) 得泛函:

$$J = M_n + z_0 = \int_0^{x_1} F_0 dx, \quad (5)$$

其中  $M_n = P_n \xi H \cos \delta / \sin \alpha$ ,  $F_0 = (nn_1 s' x + x + ss' - nn_1 s) \sigma - (g - s) \gamma x + ns' xc - nsc - qx$ ,  $z_0 = \int_{x_2}^0 [\gamma(g - kx) + q] x dx = \text{const}$ 。

由式 (1) 得约束条件:

$$\int_0^{x_1} (z_1 F_0 + F_1) dx = z_2, \quad (6)$$

其中,  $F_1 = (nn_1 - s') \sigma + nc$ ,  $z_1 = \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - n\delta)}{\xi H \cos \delta} =$

$\text{const}$   $z_2 = z_0 z_1 = \text{const}$ 。

由式 (2) 得约束条件:

$$\int_0^{x_1} (z_3 F_0 + F_2) dx = z_4, \quad (7)$$

其中,  $F_2 = (nn_1 s' + 1) \sigma + ncs' - q - \gamma(g - s)$ ,  $z_3 = \frac{\sin \alpha \cos(\alpha - n\delta)}{\xi H \cos \delta} = \text{const}$ ,  $z_4 = z_0 z_3 - \int_{x_2}^0 [\gamma(g - kx) + q] dx$ 。

上述为边界待定的条件变分极值中的等周问题。滑裂面曲线的起始点为  $O$  点, 坐标为  $x_0 = 0, y_0 = 0$ , 终点为土体表面上  $B$  点, 坐标  $(x_1, g(x_1))$  待定。

在约束条件下的变分法, 用拉格朗日乘子法构造如下的泛函  $J^*$ , 使上述条件极值问题转化为无约束的

泛函极值问题:

$$J^* = \int_0^{x_1} F dx, \quad (8)$$

其中,  $F = F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ 。

$F$  为辅助函数,  $\lambda_1, \lambda_2$  为拉格朗日乘子。依据等周问题极值存在的必要条件, 滑裂面方程  $y = s(x)$  及沿滑裂面分布的法向应力  $\sigma(x)$  必须满足欧拉微分方程、边界条件及可动边界处的横截条件:

(1) 辅助函数  $F$  的 Euler 微分方程

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial s'} \right) = 0. \quad (10)$$

(3) 积分约束方程: 同式 (6)、(7)

$$\text{固定边界条件: } s(0) = 0, \quad (11)$$

$$\text{可动边界条件: } s(x_1) = g(x_1). \quad (12)$$

(4) 可动边界处的横截条件:

$$\left( F - s' \frac{\partial F}{\partial s'} + g' \frac{\partial F}{\partial s'} \right) \Big|_{x=x_1} = 0. \quad (13)$$

## 3 土压力变分问题的求解

### 3.1 土体中的滑裂面函数

由式 (9), 可以得到

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x - nn_1 s + \lambda_1 nn_1 + \lambda_2}{-nn_1 x - s + \lambda_1 - \lambda_2 nn_1}, \quad (14)$$

引入坐标变换:

$$\left. \begin{aligned} u &= x + \lambda_2, \\ v &= s - \lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

坐标变换后的计算模型见图 3。

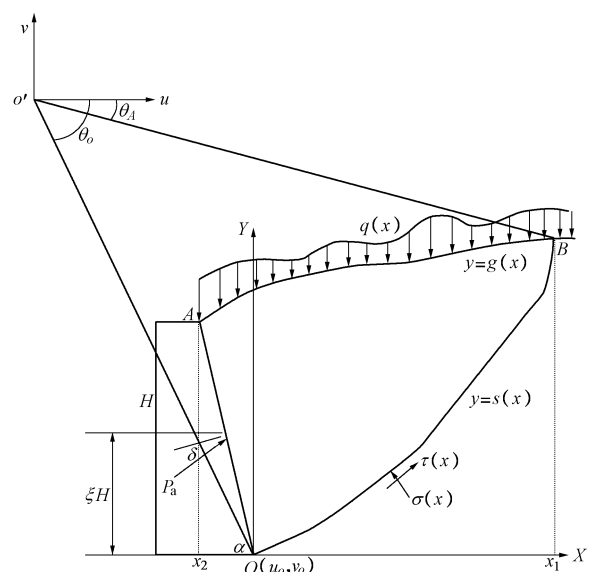


图3 坐标变换后的土压力计算模型

Fig. 3 Computation model of active earth pressure after coordinate transformation

令  $w = v/u$ ，则微分方程式 (14) 可化为齐次方程：

$$w + u \frac{dw}{du} = \frac{nn_1 w - 1}{nn_1 + w}, \quad (16)$$

分离变量得通解为

$$\ln[u^2(1+w^2)] = -2nn_1 \arctan w + z_5, \quad (17)$$

对变换后的坐标换成极坐标：

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}, \quad (18)$$

式 (17) 变为

$$r = z_6 e^{-nn_1 \theta}, \quad (19)$$

$z_5, z_6$  为任意积分常数。

由固定边界条件： $s(0) = 0$ ，原坐标原点  $O$  在新坐标中为  $u_0 = \lambda_2, v_0 = -\lambda_1, O'$  点在新坐标的极坐标为  $(r_0, \theta_0)$ ，则滑裂面方程为

$$r = r_0 e^{nn_1(\theta_0 - \theta)}, \quad (20)$$

$$\text{其中 } r_0 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \begin{cases} \theta_0 = -\arctan(\lambda_1 / \lambda_2) & \lambda_2 > 0 \\ \theta_0 = -\pi - \arctan(\lambda_1 / \lambda_2) & \lambda_2 \leq 0 \end{cases},$$

滑裂面为对数螺旋面。

### 3.2 滑裂面上的应力

由式 (10) 得

$$2nn_1 \sigma + (nn_1 x + s - \lambda_1 + nn_1 \lambda_2) \sigma' - \gamma x - \lambda_2 \gamma + 2nc = 0, \quad (21)$$

将上式写成新坐标下的极坐标形式：

$$\frac{d\sigma}{d\theta} - 2nn_1 \sigma = 2c - \gamma r_0 e^{nn_1(\theta_0 - \theta)} \cos \theta, \quad (22)$$

上式微分方程通解为 ( $n_1 \neq 0$  时)

$$\sigma = e^{\int_{\theta_1}^{\theta} 2nn_1 d\theta} \left( z_7 + \int_{\theta_1}^{\theta} (2nc - \gamma r_0 e^{nn_1(\theta_0 - \theta)} \cos \theta) e^{\int_{\theta_1}^{\theta} -2nn_1 d\theta} d\theta \right), \quad (23)$$

$z_7$  为积分常数， $\theta_1$  为任意角度，可取  $\theta_1 = 0$

$$\sigma = z_7 e^{2nn_1 \theta} - \frac{\gamma r_0 e^{nn_1(\theta_0 - \theta)} (\sin \theta - 3nn_1 \cos \theta) + 3nn_1 \gamma r_0 e^{nn_1(\theta_0 + 2\theta)}}{1 + 9n_1^2} - \frac{c}{n_1}, \quad (24)$$

由可动边界处的横截条件式可得滑裂面  $B$  点处正应力：

$$\sigma(x_1) = \sigma(\theta_1) = \frac{nc \sin \theta_1 + \cos \theta_1 (q(x_1) - nc g'(x_1))}{\sin \theta_1 (g'(x_1) - nn_1) + \cos \theta_1 (nn_1 g'(x_1) + 1)}, \quad (25)$$

代入 (24) 得

$$z_7 = e^{-2nn_1 \theta_1} \left[ \frac{c}{n_1} + \frac{nc \sin \theta_1 + \cos \theta_1 (q(x_1) - nc g'(x_1))}{\sin \theta_1 (g'(x_1) - nn_1) + \cos \theta_1 (nn_1 g'(x_1) + 1)} + \frac{\gamma r_0 e^{nn_1(\theta_0 - \theta_1)} (\sin \theta_1 - 3nn_1 \cos \theta_1) + 3nn_1 \gamma r_0 e^{nn_1(\theta_0 + 2\theta_1)}}{1 + 9n_1^2} \right]. \quad (26)$$

## 4 土压力的不确定计算

上述变分问题包含 3 个未知常数  $\lambda_1, \lambda_2$  和作用点位置系数  $\xi$ ，对于给定  $\xi$ ，问题才有适定解，可用两个约束条件方程式 (6) 和式 (7) 来求出，等同于求下式函数  $\Phi$  的零值问题：

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2) = \left[ \int_0^{x_1} (z_1 F_0 + F_1) dx - z_2 \right]^2 + \left[ \int_0^{x_1} (z_3 F_0 + F_2) dx - z_4 \right]^2 = 0. \quad (27)$$

上式的解可通过求解函数  $\Phi$  的极小值且极小值为 0 得到，而当  $\Phi$  的极小值不为零时，说明所给定的土压力作用点不能使土体处于极限平衡状态。本文采用 matlab 提供的 fminsearch 函数进行求解，此函数只需要建立  $\Phi$  函数模块并给定一个初始值即可搜索出函数的极小值，只要给出合适的初始值（一般可取  $\lambda_1 = \lambda_2 = H$ ），搜索是比较迅速的。

当作用点位置系数  $\xi$  不确定时，变分问题包含无数个可行解，函数  $\Phi$  多了一个未知量  $\xi$ ，但仍应满足  $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \xi) = 0$  的要求。 $\xi$  从 0 ~ 1 取不同的值，可得到相应  $\Phi$  函数的极小值，在函数  $\Phi$  极小值随作用点位置系数  $\xi$  的变化曲线中，可以找到一段  $\Phi = 0$  的水平直线段，此线段所对应的即为土压力合力作用点位置系数范围，由此可以确定对应的土压力范围。

### 4.1 算例分析

设墙高 6 m，墙后土重度  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ，黏聚力  $c = 10 \text{ kPa}$ ，内摩擦角  $\varphi = 20^\circ$ ，挡土墙倾角  $\alpha = 70^\circ$ ，土体坡面用一倾斜线加一个正弦函数来模拟， $g(x) = 6 + \tan 10^\circ (x - 6 \cot 70^\circ) + \sin(2\pi x / 5) / 10$ ，挡墙与土体的摩擦角  $\delta = 10^\circ$ ，非均匀超载用一正弦函数加一常数来模拟  $q(x) = 5 + 2 \sin(2\pi x / 5)$ 。

图 4~6 分别为主动极限状态下函数  $\Phi$  随作用点位置系数  $\xi$  的变化曲线、主动土压力合力及滑裂面随作用点位置系数  $\xi$  的变化曲线。计算表明，作用点位置系数存在上下界限值（此例下限值  $\xi_d = 0.3728$ ，上限值  $\xi_u = 0.5643$ ），在此范围内， $\Phi = 0$ ，也即是说当土压力的合力作用点位于距墙踵 2.23 ~ 3.38 m 范围内时，墙后土体可以达到极限平衡状态。在作用点位置系数下界限处，主动土压力最小（176.4 kN），滑裂面为平面；随着作用点位置的上移，主动土压力呈非线性增长，相应滑裂面为对数螺旋面，在作用点位置系数上限处，主动土压力最大（187.8 kN）。

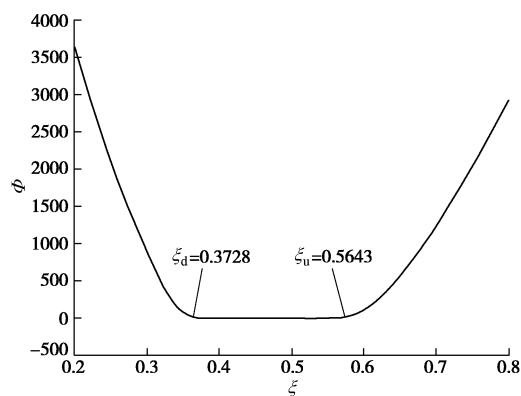
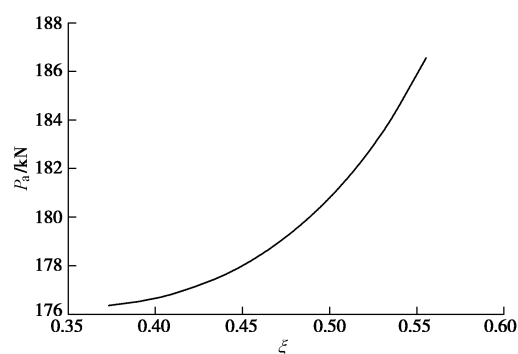
图4  $\Phi$  函数曲线Fig. 4 Curve of function  $\Phi$ 

图5 主动土压力变化曲线

Fig. 5 Curves of varied active pressure

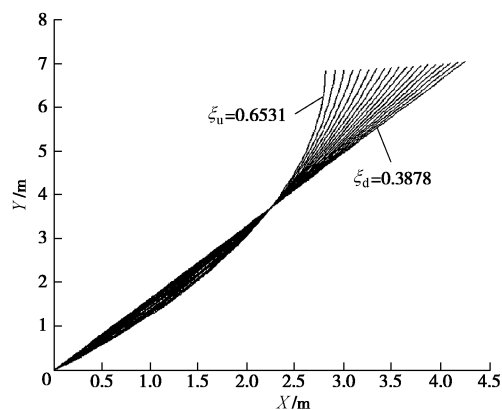


图6 滑裂面曲线

Fig. 6 Curves of slip surface

图7~9为被动极限状态下函数 $\Phi$ 随作用点位置系数 $\xi$ 的变化曲线、被动土压力合力及滑裂面随作用点位置系数 $\xi$ 的变化曲线。同样在被动极限状态下,作用点位置系数存在上下界限值(此例下限值 $\xi_d=0.2910$ ,上限值 $\xi_u=0.4260$ ),在此范围内, $\Phi=0$ ,即当土压力的合力作用点位于距墙踵1.75~2.56 m范围内时,墙后土体可以达到被动极限平衡状态。在作用点位置系数下限处,被动土压力最小(1081.7 kN),滑裂面为对数螺旋面;随着作用点位置的上移,被动

土压力呈非线性增长,相应滑裂面也为对数螺旋面,且其曲率半径逐渐增大,在作用点位置系数上限处,滑裂面为平面,被动土压力最大(1158.4 kN)。

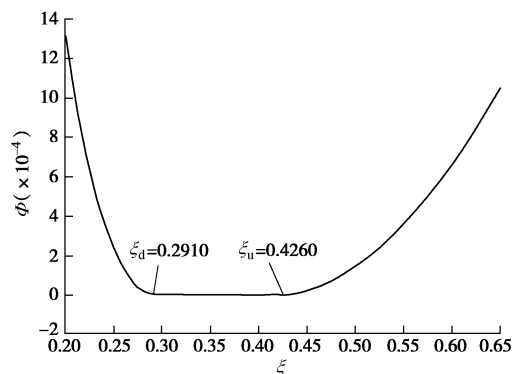
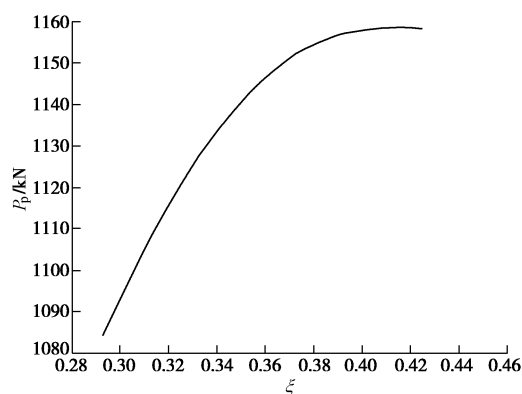
图7  $\Phi$  函数曲线Fig. 7 Curve of function  $\Phi$ 

图8 被动土压力变化曲线

Fig. 8 Curves of varied passive pressure

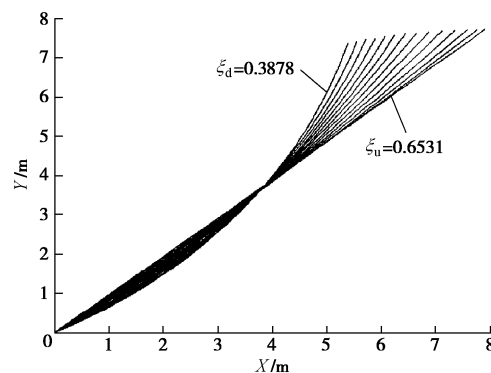


图9 滑裂面曲线

Fig. 9 Curves of slip surface

可见土压力的大小和作用点位置取决于挡墙和土体接触面的共同协调变形,并随着挡墙变位模式的不同而发生变化,若按照一定方式连续改变墙体变位模式,则挡墙上作用的土压力和作用点位置也同样发生连续的变化,土压力大小存在最大值和最小值,作用点位置也存在最低点和最高点。由于挡墙在设计时往往很难准确预估其墙体变位模式,对于作用于墙背的

土压力和作用点位置，较为合理的做法是给出一定的区间范围，尽量包含墙体所有可能变位模式情况下挡墙所受到的土压力和作用点位置，以供工程设计人员选用。

4.2 与库仑土压力理论结果对比

取墙高 6 m，考虑墙后土体坡面为一倾斜平面，其上作用有均布荷载  $q=10\text{ kPa}$ ，填土为砂土，重度  $\gamma=18\text{ kN/m}^3$ ，黏聚力  $c=0$ ，内摩擦角  $\varphi=30^\circ$ ，挡土墙倾角  $\alpha=70^\circ$ ，坡面倾角  $\beta=20^\circ$ ，挡墙与土体的摩擦角  $\delta=10^\circ$ 。表 1 为按本文方法与按库仑理论计算结果对比。从计算结果的对比可以看出，采用本文方法所计算的下界限土压力值与库仑理论的计算结果是完全一致的，此时滑裂面为平面，但合力作用点与按库仑理论土压力线性分布假定的计算结果明显不同，这是因为库仑理论没有考虑土楔体的力矩平衡，土压力按线性分布假定计算合力作用点。由此可以看出，按库仑理论所计算的土压力值是按本文所提计算结构的一种特例而已。

表 1 与库仑理论的计算结果对比

Table 1 Comparison of calculated results of earth pressure with those of Coulomb theory

类别	主动土压力			被动土压力		
	本文解		库仑解	本文解		库仑解
	$P_a/\text{kN}$	$\xi$	$P_a/\text{kN}$	$P_p/\text{kN}$	$\xi$	$P_p/\text{kN}$
下界限	258.9	0.5714	258.9	1904.6	0.3369	1904.6
上界限	261.3	0.6531		2087.9	0.5355	

5 结 语

本文从挡土墙后滑楔体整体静力平衡方程出发，推导了一般情况下土压力泛函极值的等周模型，包含了主动和被动极限状态。土压力是作用点位置系数的函数，土压力的不确定性主要依赖于挡墙变位模式，其值大小存在最大值和最小值，作用点位置也存在最高点和最低点。对于给定的一个合力作用点位置  $\xi$ ，土压力的求解转化为以两个拉格朗日常数为未知量的函数  $\Phi$  的极值问题。通过计算极限状态下函数  $\Phi$  随作用点位置系数  $\xi$  的变化曲线，确定土压力作用点位置系数的上下界限值及对应的土压力值，完成区间估计，以供工程设计人员选用。

参考文献：

[1] NARAIN J, SARAN S, NANDAKUMARAN P. Model study of passive earth pressures in sand[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1969, **95**(4): 969

- 983.

[2] ICHIHARA M, MATSUZAWA H. Earth pressure during earthquake[J]. Soils and Foundations, 1973, **13**(4): 75 - 86.

[3] SHERIF M A, ISHIBASHI I, LEE C D. Earth pressures against rigid retaining walls[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 1982, **108**(5): 679 - 786.

[4] FANG Y S, ISHIBASHI M. Static earth pressures with various walls movements[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1986, **112**(3): 317 - 333.

[5] 周应英. 桥用刚性挡土墙的土压力模型试验研究[J]. 国外公路, 1987, **7**(3): 14 - 17. (ZHOU Ying-ying. Model test study of the earth pressure on the rigid retaining wall used in bridges[J]. Journal of Foreign Highway, 1987, **7**(3): 14 - 17. (in Chinese))

[6] 周应英, 任美龙. 刚性挡土墙后主动土压力的试验研究[J]. 岩土工程学报, 1990, **12**(2): 19 - 26. (ZHOU Ying-ying, REN Mei-long. Experimental study of the active earth pressure on rigid retaining wall[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1990, **12**(2): 19 - 26. (in Chinese))

[7] FANG Y S, CHEN T J, WU B E. Passive earth pressures with various walls movements[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1994, **128**(8): 651 - 659.

[8] 徐日庆, 陈页开, 杨仲轩, 等. 刚性挡墙被动土压力模型试验研究[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(5): 569 - 575. (XU Ri-qing, CHEN Ye-kai, YANG Zhong-xuan, et al. Experimentag research on the passve earth pressue acting on a rigid wall Chinese[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(5): 569 - 575. (in Chinese))

[9] 李兴高, 刘维宁. 刚性挡墙上土压力不确定性的计算研究[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(3): 353 - 359. (LI Xin-gao, LIU Wei-ning. Study on the indeterminacy of the earth pressure on rigid retaining walls[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(3): 353 - 359. (in Chinese))

[10] 李兴高, 刘维宁, 张 弥. 关于库仑土压力理论的探讨[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(6): 677 - 681. (LI Xing-gao, LIU Wei-ning, ZHANG Mi. Discussion on Coulomb earth pressure theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(6): 677 - 681. (in Chinese))

[11] 李兴高, 刘维宁. 被动土压力作用的变分极限平衡法研究[J]. 工程力学, 2007, **24**(1): 11 - 18. (LI Xing-gao, LIU Wei-ning. Study on the passive earth pressure by variational limit equilibrium method[J]. Engineering Mechanics, 2007,

- 24(1): 11 - 18. (in Chinese))
- [12] 李兴高, 刘维宁. Coulomb 土压力理论的两种解法[J]. 岩土力学, 2006, 27(6): 981 - 985. (LI Xing-gao, LIU Wei-ning. Two methods to get the Coulomb earth pressure theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(6): 981 - 985. (in Chinese))
- [13] LI Xing-gao, LIU Wei-ning. Study on the action of the active earth pressure by variational limit equilibrium method[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 2010, 34(10): 991 - 1008.
- [14] KOPÁSCY J. Three-dimensional stress distribution and slip surfaces in earth works at rupture[C]// Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering. London, 1957(1): 339 - 342.
- [15] KOPÁSCY J. Distribution des contraintes à la rupture, forme de la surface de glissement et hauteur théorique des talus[C]// Proceedings of the 5th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering. Paris, 1961: 641 - 650. (KOPÁSCY J. Sliding surface shape and stress distribution of high slope[C]// Proceedings of the 5th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering. Paris, 1961: 641 - 650. (in France))
- [16] BAKER R, GARBER M. Variational analysis of the stability of slopes[C]// Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering. Tokyo, 1977: 9 - 12.
- [17] BAKER R, GARBER M. Discussion of "On slip surface and slope stability analysis." by Chen W F, Snitbhan N[J]. Soils and Foundations, 1977, 17(1): 65 - 68.
- [18] BAKER R, GARBER M. Theoretical analysis of the stability of slopes[J]. Géotechnique, 1978, 28(4): 395 - 411.
- [19] BAKER R. Sufficient conditions for existence of physically significant solutions in limiting equilibrium slope stability analysis[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40: 3717 - 3735.
- [20] GARBER M, BAKER R. Bearing capacity by variational method[J]. Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, 1977, 103(11): 1209 - 1225.
- [21] GARBER M, BAKER R. Extreme-value problems of limiting equilibrium[J]. Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, 1979, 105(10): 1155 - 1171.
- [22] SPENCER A J M, O'MAHONY T C. An application of the calculus of variations to rectilinear flow of granular materials[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1985, 9(2): 25 - 235.
- [23] LESHCHINSKY D, BAKER R. Three-dimensional slope stability: end effects[J]. Soils and Foundations, 1986, 26(4): 98 - 100.
- [24] LESHCHINSKY D, SAN K C. Pseudostatic seismic stability of slopes: design charts[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1994, 120(9): 1514 - 1532.
- [25] 栾茂田, 金崇磐, 林 皋. 非均质土体稳定性分析的广义极限平衡法及其应用[J]. 大连理工大学学报, 1991, 31(4): 463 - 471. (LUAN Mao-tian, JIN Chong-pan, LIN Gao. Generalized limit equilibrium method with applications for stability analysis of non-homogeneous soil structures and foundations[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1991, 31(4): 463 - 471. (in Chinese))
- [26] 陈 榕, 栾茂田, 郝冬雪, 等. 加筋地基极限承载力的变分解法[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(5): 774 - 779. (CHEN Rong, LUAN Mao-tian, HAO Dong-xue, et al. The ultimate bearing capacity of reinforced foundation by variational solution[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(5): 774 - 779. (in Chinese))
- [27] LI Xing-gao. Bearing capacity factors for eccentrically loaded strip footings using variational analysis[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013, 18(2): 470 - 474.
- [28] 郝冬雪, 张永建, 陈 榕, 等. 输电线路掏挖基础极限上拔承载力变分解法[J]. 岩土力学, 2015, 36(1): 163 - 170. (HAO Dong-xue, ZHANG Yong-jian, CHEN Rong, et al. Variational solution of ultimate uplift capacity for excavated foundation of transmission tower[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(1): 163 - 170. (in Chinese))
- [29] 王奎华, 马少俊, 吴文兵. 挡土墙后曲面滑裂面下黏性土主动土压力计算[J]. 西南交通大学学报, 2011, 46(5): 732 - 738. (WANG Kui-hua, MA Shao-jun, WU Wen-bing. Active earth pressure of cohesive soil backfill on retaining wall with curved sliding surface[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2011, 46(5): 732 - 738. (in Chinese))