

DOI: 10.11779/CJGE201704002

# 考虑颗粒破碎的砂土临界状态特性描述

罗 汀, 刘 林, 姚仰平

(北京航空航天大学交通科学与工程学院, 北京 100191)

**摘要:** 近年来, 随着土石坝和高填方等工程的兴建, 粒状土得到了广泛的应用。粒状土在高应力作用下会发生颗粒破碎的现象相当严重, 因此粒状土的颗粒破碎问题不容忽视。为了更合理地描述颗粒破碎对粒状土中砂土力学特性的影响, 首先分析砂土试验结果, 得出了砂土颗粒分别在平均正应力和剪应力作用下的破碎特性。其次, 基于 UH (unified haedening, 统一硬化) 模型, 引入可以表示砂土压缩破碎和剪切破碎的相关参数, 建立了可以考虑颗粒破碎的砂土本构模型。该模型不仅能够反映砂土的剪胀、剪缩、应变硬化和软化等特性, 而且可以反映在平均正应力的作用下, 不同的压缩曲线最终会归一的特点, 同时还能够反映剪应力作用下砂土临界状态线下移的现象。最后, 使用模型预测了 Lade 的常规三轴试验, 模型预测结果与试验结果符合良好, 说明该模型能够合理地描述砂土的力学特性。

**关键词:** 砂土; 颗粒破碎; UH 模型; 临界状态

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2017)04-0592-09

作者简介: 罗 汀(1957-), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事土的本构关系研究。E-mail: tluo@buaa.edu.cn。

## Description of critical state for sands considering particle crushing

LUO Ting, LIU Lin, YAO Yang-ping

(School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** In recent years, granular soil is widely used in more and more earth-rockfill dams and high-filled projects being built. However, particle crushing of granular soil can not be ignored as the particle crushing of granular soil under high stress is very common. In order to describe the behaviours of sands, some researches are completed as follows. Firstly, by analyzing the experimental results, some breaking characteristics of sands are discovered under the applied pressure stress and shear stress. Secondly, based on the UH model, a constitutive model for sands is proposed by introducing three new parameters of particle crushing which are about pressure stress and shear stress respectively. The proposed model is capable of describing the characteristics of sands, such as stress-strain relationships, shear dilatancy, strain-hardening and softening. In addition, the characteristics, that different compression curves will eventually arrive together under high stress and the critical state line will move down under shear stress, can also be reflected by the model. Finally, by comparing the predicted results of the model and the test results of Lade's, it is proved that the proposed model can describe the behaviours of sands well.

**Key words:** sand; particle crushing; UH model; critical state line

## 0 引言

近年来, 随着土石坝、高填方等重大工程的兴建, 具有良好工程特性的粒状土(堆石、砂石、砂土)得到广泛应用。为了满足实际应用的需求, 坡体高度和填方高度逐渐增加, 土石坝和高填方内部产生较高的应力, 导致粒状土发生颗粒破碎。颗粒破碎对粒状土的力学性质影响较大, 因此, 粒状土的破碎问题不容忽视。本文拟针对粒状土中砂土的颗粒破碎问题进行研究

Terzaghi 等<sup>[1]</sup>对砂土在高应力水平下进行单轴压缩试验时, 发现颗粒的破碎十分显著。同时发现颗粒破碎使得压缩曲线的斜率会明显变陡。De Souza<sup>[2]</sup>对

多种砂进行了高压试验, 发现在压缩过程中存在一个破碎点, 在应力低于破碎点应力时, 砂粒破碎程度较小, 在应力高于破碎点应力时, 砂粒破碎相当明显。Yamamuro 等<sup>[3-4]</sup>对砂土进行了一系列高压排水和不排水三轴试验, 得出了与 De Souza 相同的结论。Daouadji 等<sup>[5]</sup>提出颗粒破碎会导致临界状态线的位置发生变化, 并且基于此建立了砂土破碎的本构模型, 但是模型参数较多, 不便工程使用。Muir 等<sup>[6]</sup>、Thevanayagam 等<sup>[7]</sup>分别通过 DEM 和室内试验证明了 Daouadji 提出

基金项目: 国家重点基础研究发展计划项目(2014CB047001); 国家自然科学基金项目(51179003, 11272031)

收稿日期: 2016-01-19

的观点。李相崧等<sup>[8]</sup>基于 Dafalis 边界面模型引入状态参量建立了砂土本构模型, 该模型共有 11 个参数。姚仰平等<sup>[9]</sup>针对粒状材料的颗粒破碎特性, 建立了砂土本构模型。基于 Daouadji 的观点, 胡伟等<sup>[10]</sup>结合消耗塑性功建立了一个能够考虑颗粒破碎效应的本构模型。Sheng 等<sup>[11]</sup>通过双对数坐标描述了砂土的等向压缩特性和临界状态特性。

本文拟在 UH (unified hardening, 统一硬化) 模型<sup>[12]</sup>的基础上, 考虑颗粒破碎致使临界状态线位置发生变化的特性, 引入表示颗粒压缩破碎和剪切破碎程度的参数, 建立可以考虑颗粒破碎的砂土模型。

## 1 砂土的试验规律

### 1.1 一维压缩特性

图 1 是砂土的一维固结试验曲线<sup>[5]</sup>。与正常固结黏土在  $e - \lg p$  坐标系 ( $e$  为孔隙比,  $p$  为平均正应力) 内的压缩曲线为直线不同, 砂土的压缩线在  $e - \lg p$  空间上为曲线, 见图 1。这是由于砂土颗粒的破碎加大了材料的变形。在压缩过程中, 压缩曲线开始发生弯曲处出现一个破碎点, 该破碎点所对应的应力称为破碎应力。当平均正应力  $p$  低于破碎应力时, 压缩曲线的斜率较小, 原因是颗粒破碎不明显, 且能够填充孔隙的细小颗粒有限, 较大颗粒之间形成一种架空结构, 使得砂土变形较小, 如图 2 (a) 所示; 当平均正应力  $p$  超过破碎应力时, 颗粒破碎变得明显。随着破碎的持续发生, 砂土的压缩曲线逐渐趋于一条直线, 变得与黏性土的等向压缩线形状相似。这是由于大量颗粒因挤压发生破碎, 粒径急剧减小, 细小颗粒填充于砂土孔隙中, 之前形成的大颗粒骨架结构消失, 造成土体较大的变形, 如图 2 (b) 所示。此时压缩变形已经不受初始密度的影响, 而只受颗粒破碎的控制。

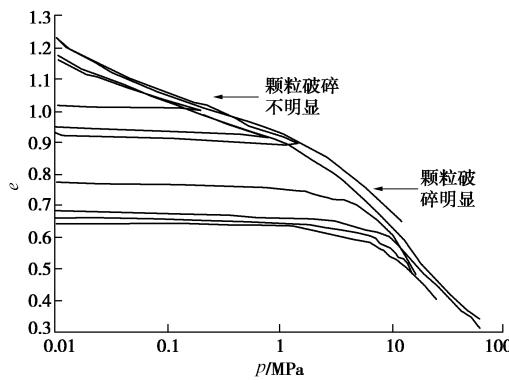


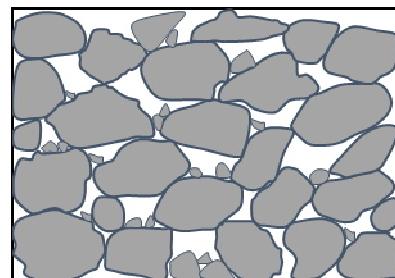
图 1 砂土一维固结试验结果<sup>[5]</sup>

Fig. 1 Results of consolidation tests on sands

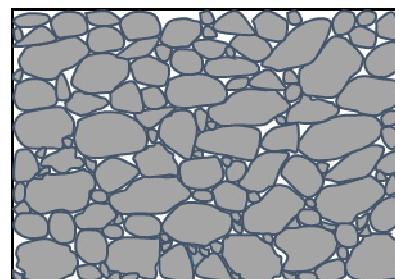
### 1.2 剪切特性

砂土的剪切特性受土料的初始密度和围压的影

响。同一种土料, 不同的初始条件, 土的应力应变关系曲线和体积应变曲线均呈现不同的类型, 如图 3 所示。



(a)



(b)

图 2 砂土颗粒排列示意图

Fig. 2 Particle arrangement of sands

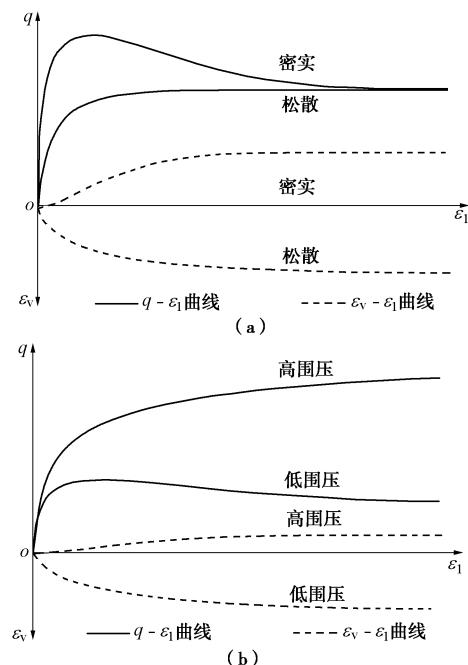


图 3 不同初始条件下的体变和应力 - 应变关系示意图

Fig. 3 Volumetric strains and stress-strain relationships with different initial conditions

### 1.3 临界状态特性

Hardin 等<sup>[13]</sup>提出的相对破碎参数  $B_f$  可以描述土料的破碎程度,  $B_f$  由 0 向 1 逐渐变化, 当  $B_f$  越大, 破碎越严重。Lade 等利用相对破碎参数  $B_f$  描述了 Cambria 砂的临界状态与破碎的关系, 见图 4 和图 5。

如图 4 所示, 当应力相对较小时,  $B_r$  接近 0, 说明颗粒几乎没有发生破碎; 当应力高于 4 MPa 时,  $B_r$  开始突然增大, 以上现象说明该材料的颗粒破碎应力为 4 MPa。图 5 中显示, 从颗粒破碎应力开始, 材料的临界状态线突然向下发生移动, 从而导致临界状态线与压缩线之间的距离变大。这一现象与 Daouadji 等<sup>[5]</sup>、Muir 等<sup>[6]</sup>、Thevanayagam 等<sup>[7]</sup>提出的临界状态线位置随着颗粒的破碎而发生下移的观点一致。

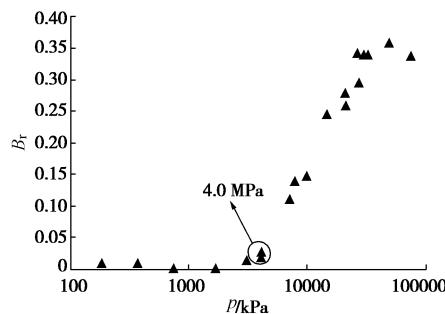


图 4 相对破碎参数  $B_r$  与平均正应力  $p$  的关系<sup>[3]</sup>

Fig. 4 Relationship between Hardin's relative breakage parameter  $B_r$  and effective mean normal stress  $p$

$B_r$  和有效均正应力  $p$

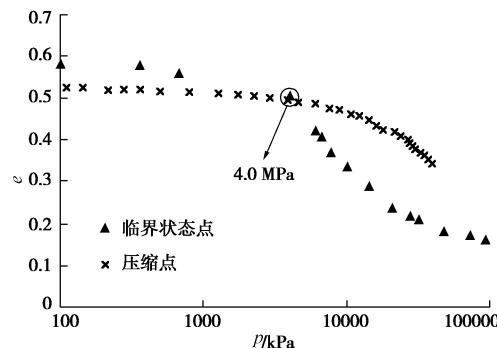


图 5 孔隙比  $e$  与平均正应力  $p$  的关系<sup>[3]</sup>

Fig. 5 Relationship between void ratio and effective mean normal stress  $p$

## 2 等向压缩描述

经典的临界状态土力学认为在  $e - \ln p$  空间内正常固结黏性土的压缩线为一条直线(简称为 NCL), 超固结土的压缩线均为曲线, 见图 6 所示。对于同一种黏土, NCL 具有特殊性和唯一性。鉴于此, 基于临界状态土力学建立的本构模型均以 NCL 为参考线。

其中黏性土 NCL 上的压缩变形可按下式进行计算:

$$e = N - \lambda \ln p \quad (1)$$

式中  $\lambda$  为  $e - \ln p$  空间上正常压缩线斜率;  $N$  为 NCL 上平均正应力为 1 kPa 时对应的孔隙比。

对于砂土, 无论初始状态如何, 其压缩曲线在  $e$

$- \lg p$  空间内均为曲线, 如图 1 所示。因此, 针对砂土无法提出类似于黏性土 NCL 的特殊曲线来作为参考线。然而, 通过整理砂土试验数据<sup>[14]</sup>发现, 在  $e - \lg(p + p_s)$  空间上的压缩曲线与黏性土在  $e - \lg p$  空间上的压缩曲线形状类似, 同样会形成一条近似直线的压缩线, 见图 7 所示。

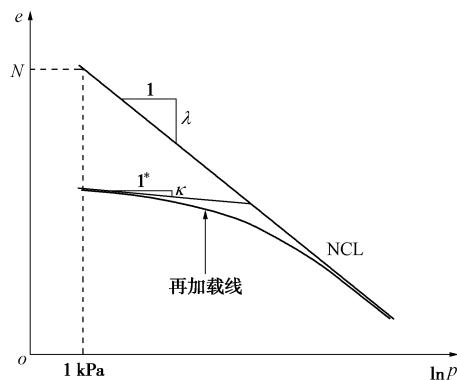


图 6 黏性土等向压缩示意图

Fig. 6 Isotropic compression for clay soils

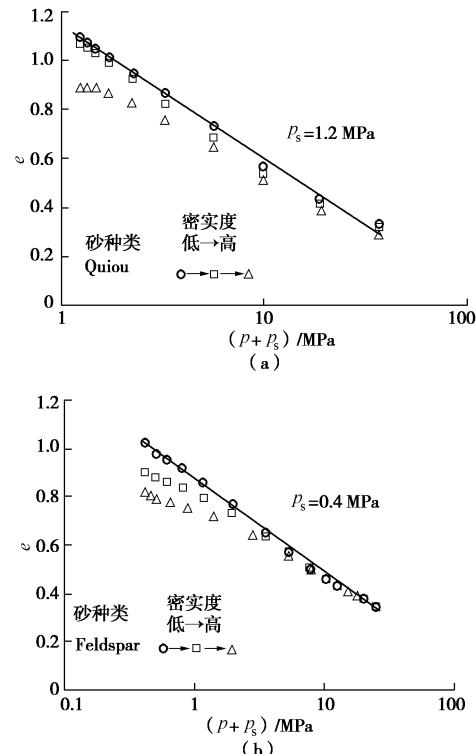


图 7 在  $e - \lg(p + p_s)$  空间上砂土一维压缩曲线<sup>[14]</sup>

Fig. 7 One-dimensional compression curves for sands in  $e - \lg(p + p_s)$  plane<sup>[14]</sup>

本文在 UH 模型的基础上, 引入应力  $p_s$  来计算砂土在等向压缩条件下的压缩变形, 具体加载曲线见图 8。同时将在  $e - \ln(p + p_s)$  空间上与黏性土 NCL 类似的等向压缩线定义为参考压缩线, 称为 RCL。

RCL 上的压缩变形可按下式计算:

$$e = N - \lambda \ln \left( \frac{p + p_s}{1 + p_s} \right) \quad . \quad (2)$$

式中,  $\lambda$  为  $e - \ln(p+p_s)$  空间上 RCL 的斜率;  $N$  为 RCL 上平均正应力为 1 kPa 时所对应的孔隙比。

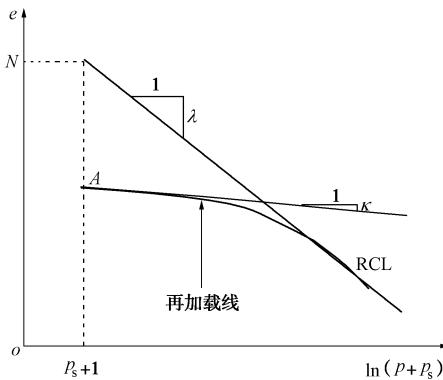


图 8 砂土在  $e - \ln(p+p_s)$  空间上的等向压缩示意图

Fig. 8 Isotropic compression for sands in  $e - \ln(p+p_s)$  plane

为了研究应力  $p_s$  的意义, 本文通过式 (2) 求出在  $e - \ln p$  空间上 RCL 的曲率  $K$ ,

$$K = \frac{\lambda p_s p (p + p_s)}{[(p + p_s)^2 + \lambda^2 p^2]^{3/2}} \quad , \quad (3)$$

通过式 (3) 可以得出当  $p=p_s$  时, RCL 的曲率最大, 见图 9。

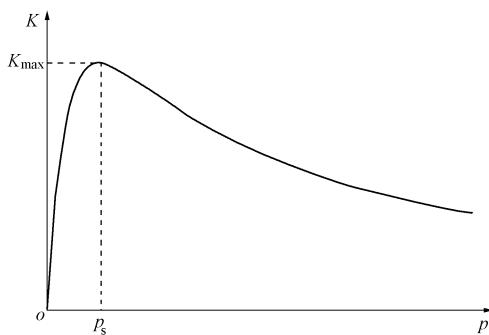


图 9 曲率  $K$  与平均正应力  $p$  的关系图

Fig. 9 Relationship between curvature and mean normal stress

同时, 整理试验数据<sup>[14]</sup>发现, 在  $e - \lg p$  空间内, 当  $p=p_s$  时, RCL 开始接近直线, 见图 10 所示。

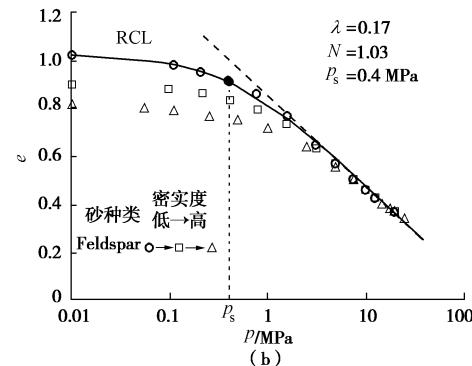
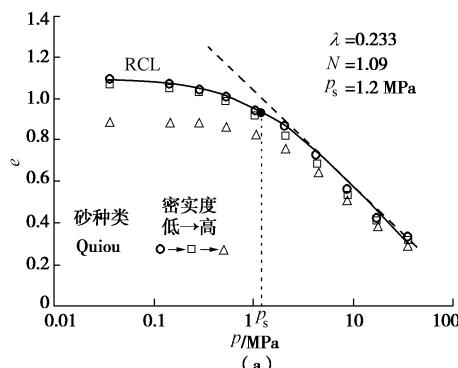


图 10 在  $e - \lg p$  空间上砂土一维压缩曲线<sup>[14]</sup>

Fig. 10 One-dimensional compression curves for sands in  $e - \lg p$  plane<sup>[14]</sup>

结合图 9 和图 10, 分析在  $e - \lg p$  空间内, 平均正应力达到应力  $p_s$  时, 砂土颗粒形成的架空结构有可能已经在此刻消失, 整体结构有可能开始进入相对稳定阶段, 变形开始主要依赖颗粒挤压破碎, 此时土颗粒状态如图 2 (b) 所示。通过以上分析, 本文将应力  $p_s$  定义为砂土的结构应力。

### 3. 本构关系及临界状态描述

#### 3.1 考虑颗粒破碎的砂土本构关系

##### (1) 硬化定律

与 Cam-clay 模型相比, UH 模型在硬化参量上做了改进。UH 模型采用了与潜在强度和临界状态应力比相关的统一硬化参量, 表达式如下:

$$H = \int dH = \int \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\epsilon_v^p = \int \frac{1}{\Omega} d\epsilon_v^p \quad , \quad (4)$$

其中

$$\Omega = \frac{M^4 - \eta^4}{M_f^4 - \eta^4} \quad . \quad (5)$$

式中  $\eta$  为应力比, 即广义剪应力  $q$  与平均正应力  $p$  的比值。 $M$  为临界状态应力比;  $M_f$  为土的潜在强度, 计算式为

$$M_f = 6 \left[ \sqrt{\frac{k}{R} \left( 1 + \frac{k}{R} \right)} - \frac{k}{R} \right] \quad , \quad (6)$$

其中

$$k = \frac{M^2}{12(3-M)} \quad , \quad (7)$$

式中,  $R$  为超固结参数或者密实参数。

##### (2) 屈服条件

###### a) 当前屈服面

本文采用破碎应力来反映颗粒剪碎。颗粒破碎可以导致砂土的临界状态线下移, 使得 CSL 与 RCL 之间的距离随着破碎程度而改变。姚仰平等<sup>[15-16]</sup>在椭圆屈服面的基础上, 引入一个状态参数  $\chi$ , 将椭圆屈服

面修正为与砂土相符的泪滴形屈服面，屈服面方程为

$$f = \frac{\eta^2}{M^2 - \chi\eta^2} + 1 - \frac{p_x}{p} = 0 \quad . \quad (8)$$

式中  $p$  为当前平均正应力； $p_x$  为当前屈服面与  $p$  轴的交点； $\chi$  由初始平均正应力  $p_0$  和初始孔隙比  $e_0$  决定，是修正 RCL 与 CSL 之间距离的一个初始状态参数， $0 \leq \chi \leq 1$ 。

通过论文前面分析，砂土的破碎程度同时受破碎应力和当前平均正应力的影响，因此砂土的 RCL 与 CSL 之间的距离也应受二者的影响。所以本文将  $\chi$  修正为

$$\chi = \chi_0 \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{p}{p_c} \right)^2 \right) \right) \quad , \quad (9)$$

式中， $\chi_0$  是依赖于 RCL 与 CSL 之间距离所确定的一个修正参数， $p_c$  为破碎应力。

在以上屈服面的基础上，引入砂土结构应力  $p_s$  得到当前屈服面的表达式：

$$f = \ln \left( \left( 1 + \frac{\eta^2}{M^2 - \chi\eta^2} \right) p + p_s \right) - \ln(p_{x0} + p_s) - \frac{1}{c_p} \int \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p = 0 \quad . \quad (10)$$

如图 11 所示，土的当前屈服面为当前应力点所在的屈服面。式中  $p_{x0}$  为当前屈服面与  $p$  轴的初始交点； $c_p = (\lambda - \kappa)/(1 + e_0)$ ； $\kappa$  为  $e - \ln(p + p_s)$  空间上弹性回弹线斜率。

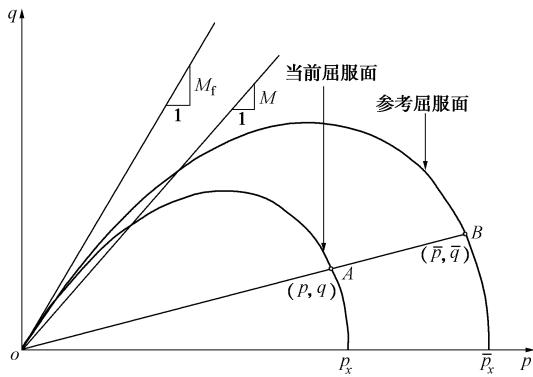


图 11 当前屈服面和参考屈服面示意图

Fig. 11 Current yield surface and reference yield surface

### b) 参考屈服面

如图 11 中所示，参考屈服面是参考应力点所在的屈服面， $\bar{p}$  为等应力比条件下参考屈服面上与当前平均正应力  $p$  所对应的应力。引入参考屈服面后，可借用当前屈服面和参考屈服面的关系来描述土的超固结程度和密实程度。本文采用的参考屈服面表达式为

$$f = \ln \left( \left( 1 + \frac{\bar{\eta}^2}{M^2 - \chi\bar{\eta}^2} \right) \bar{p} + p_s \right) - \ln(\bar{p}_{x0} + p_s) - \frac{1}{c_p} \int d\varepsilon_v^p = 0 \quad , \quad (11)$$

式中， $\bar{p}_{x0}$  为参考屈服面与  $p$  轴的初始交点。

### (3) 超固结参数（密实参数）

当前屈服面与参考屈服面的关系反映了土的超固结程度和密实程度，具体用超固结参数（密实参数） $R$  来表示。其中， $R$  为等应力比条件下当前应力与参考应力的比值，即

$$R = \frac{p}{\bar{p}} = \frac{q}{\bar{q}} \quad . \quad (12)$$

通过参考屈服面方程式 (11) 可求得

$$\bar{p} = \frac{(\bar{p}_{x0} + p_s) \exp \left( \frac{\varepsilon_v^p}{c_p} \right) - p_s}{1 + \frac{\eta^2}{M^2 - \chi\eta^2}} \quad , \quad (13)$$

结合式 (12) 和式 (13)，可得

$$R = \frac{p \left( 1 + \frac{\eta^2}{M^2 - \chi\eta^2} \right)}{(\bar{p}_{x0} + p_s) \exp \left( \frac{\varepsilon_v^p}{c_p} \right) - p_s} \quad , \quad (14)$$

式中， $\varepsilon_v^p$  为加载过程中的塑性体积应变。

### (4) 考虑剪切的应力应变关系

根据 Hooke 定律计算弹性应变增量：

$$d\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{1 + e_0} \frac{dp}{p + p_s} \quad , \quad (15)$$

$$d\varepsilon_v^p = \frac{2}{9(1-2\nu)} c_\kappa \frac{dq}{p + p_s} \quad , \quad (16)$$

式中， $\nu$  为土的泊松比， $c_\kappa = \kappa/(1 + e_0)$ 。

塑性体应变增量的计算式为

$$d\varepsilon_v^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial p} \quad , \quad (17)$$

其中， $\Lambda$  为塑性标量因子，表达式为

$$\Lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq}{\frac{1}{c_p} \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} \frac{\partial g}{\partial p}} \quad , \quad (18)$$

$g$  为塑性势面，其表达式为

$$g = \eta^2 + M^2 - \frac{M^2 p_x}{p} = 0 \quad . \quad (19)$$

塑性剪应变增量可按下式计算：

$$d\varepsilon_d^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial q} \quad , \quad (20)$$

则

$$d\epsilon_d^p = \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} d\epsilon_v^p . \quad (21)$$

在  $p - q$  空间中的应力应变关系可表示为

$$\begin{cases} d\epsilon_v \\ d\epsilon_d \end{cases} = \begin{cases} d\epsilon_v^e + d\epsilon_v^p \\ d\epsilon_d^e + d\epsilon_d^p \end{cases} = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} D_{pp} & D_{pq} \\ D_{qp} & D_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix}, \quad (22)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} D_{pp} &= c_\kappa \frac{p}{p + p_s} + c_p \frac{\Omega}{A_0} p A, \\ D_{pq} &= c_p \frac{\Omega}{A_0} 2M^2 p^4 q, \\ D_{qp} &= c_p \frac{\Omega}{A_0} \frac{2p^2 q}{M^2 p^2 - q^2} A, \\ D_{qq} &= c_p \frac{\Omega}{A_0} \frac{4M^2 p^5 q^2}{M^2 p^2 - q^2} + \frac{2}{9} c_\kappa \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{p}{p + p_s}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中

$$\begin{aligned} A_0 &= (M^2 p^2 - \chi q^2) \\ &\quad [(M^2 p^2 + (1-\chi)q^2)p + p_s(M^2 p^2 - \chi q^2)], \quad (24) \\ A &= M^4 p^4 - (1+2\chi)M^2 p^2 q^2 - \chi(1-\chi)q^4 + \\ &\quad 2 \frac{\chi_0}{p_c^2} q^4 p^2 \exp\left(-\left(\frac{p}{p_c}\right)^2\right). \quad (25) \end{aligned}$$

该模型通过引入破碎参数考虑了发生破碎时砂土特性的改变, 且当参数  $\chi_0$  和结构应力  $p_s$  均为 0 时, 模型可退回到 UH 模型。

### 3.2 一维压缩特性描述

利用本文所提出的模型计算相同初始压力、不同初始密度下的砂土等向压缩, 结果见图 12。图中各曲线在低压时斜率均较小, 说明土体变形较小, 表示土颗粒破碎不明显。随着压力的增加, 颗粒破碎逐渐发生, 压缩曲线斜率开始增大。最终, 各条压缩曲线都趋于一条稳定压缩曲线, 此时初始密度的影响已经消失, 压缩特性主要由颗粒挤压破碎所控制, 与等向压缩试验现象一致。

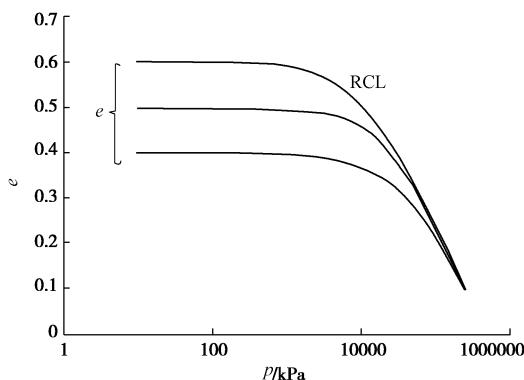


图 12 等向压缩的预测曲线

Fig. 12 Prediction in isotropic consolidation with different initial void ratios

### 3.3 剪切特性描述

本文所提出的模型对初始孔隙比为 0.5, 围压在 1.0 MPa 到 5.0 MPa 的砂土进行计算, 见图 13, 在应力较高时, 应力应变关系表现为应变硬化, 体积应变表现为剪缩; 在应力较低时, 应力应变关系表现为应变软化, 体积应变表现为剪胀。通过图 13 (c) 中各曲线的变化趋势, 可以得到土料在不同围压下的应力比最终都达到临界状态应力比, 并且在围压较小时, 在加载过程中会出现峰值应力比, 围压越小峰值应力比越高。

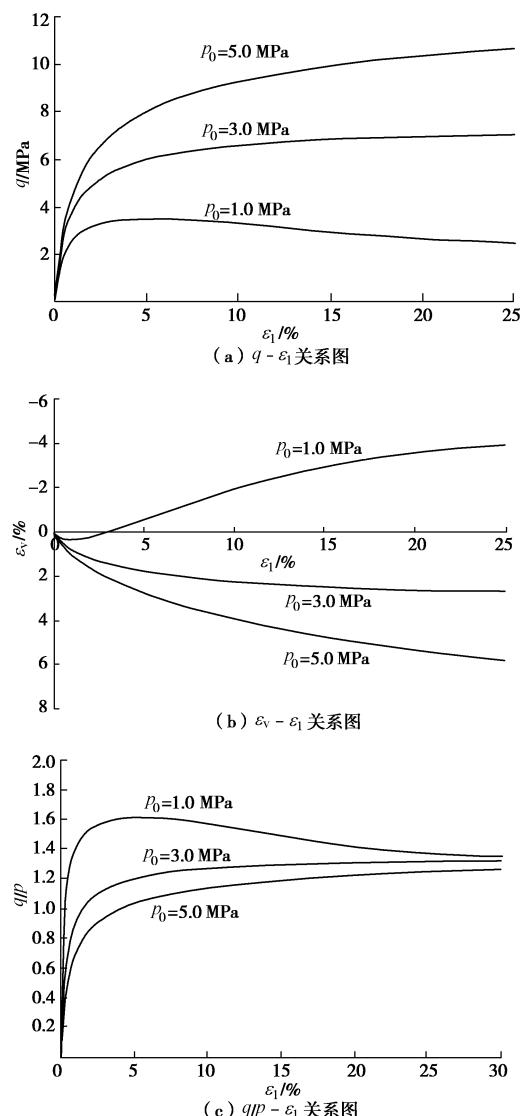


图 13 相同初始密度, 不同初始围压下的模型预测

Fig. 13 Predictions using model with same initial density and different initial confining pressures

如图 14 所示, 本模型对初始围压为 1.0 MPa, 不同初始密度的计算结果显示, 密实土料的应力应变关系表现为应变软化, 体应变表现为剪胀; 松散土料的应力应变关系表现为应变硬化, 体应变表现为剪缩。同时, 通过图 14 (c) 可以得到, 不论密实还是松散

的土料，应力比在最终都达到临界状态应力比，且土料越密实，在加载过程中峰值应力比越高。

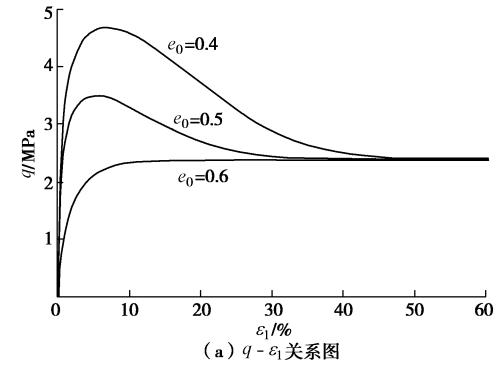
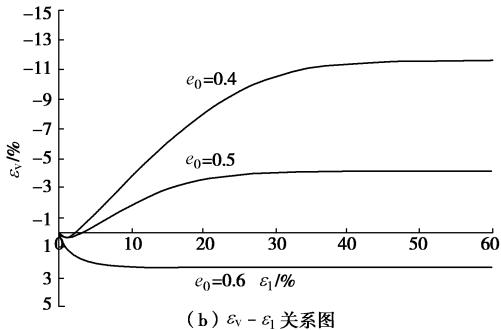
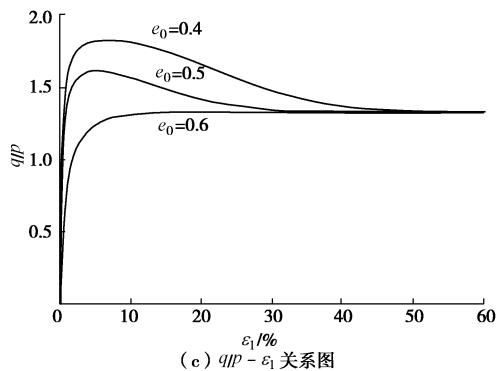
(a)  $q - \varepsilon_1$  关系图(b)  $\varepsilon_v - \varepsilon_1$  关系图(c)  $q/p - \varepsilon_1$  关系图

图 14 相同初始围压，不同初始密度下的模型预测

Fig. 14 Predictions using model with same initial confining pressure and different initial densities

以上分析表明，本文所提出的模型能够定性反映伴有颗粒破碎的砂土的固结特性和剪切特性。

### 3.4 临界状态特性描述

相较于平均正应力，剪应力更容易使颗粒发生剪碎现象，从而产生很多细小的颗粒，同时细小颗粒填充材料孔隙，使得与不发生破碎时相比，孔隙比变化较大，因此随着颗粒破碎程度的不同，临界状态线的位置也不同，且颗粒破碎程度越大，临界状态线离参考压缩线的距离越远。如图 15 所示，当  $\chi_0=0$  时，表示模型中只有平均正应力引起颗粒破碎，剪应力不引起颗粒破碎；当  $0<\chi_0<1$  时，表示模型中平均正应力和剪应力均会引起颗粒破碎，并且破碎程度越大， $\chi_0$  越大；当  $\chi_0=1$  时，表示颗粒发生最大程度的破坏。

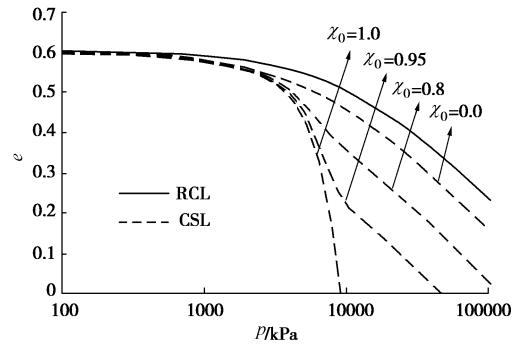


图 15 CSL 位置的分析

Fig. 15 Analysis of CSL location

## 4 模型试验验证

本文将与 Lade 等<sup>[3]</sup>对 Cambria 砂的试验数据进行对比，来验证所提模型。

### 4.1 参数分析及确定

(1) UH 模型中所需参数均可通过室内常规试验得到。其中  $\lambda$  为 RCL 在  $e - \ln p$  空间上渐近线的斜率， $N$  为 RCL 上平均正应力为 1 kPa 时所对应的孔隙比，定义  $N$  与 CSL 上平均正应力为 0 时所对应的孔隙比近似相等，即  $N$  决定了临界状态线 (CSL) 和参考压缩线 (RCL) 的位置，见图 16。

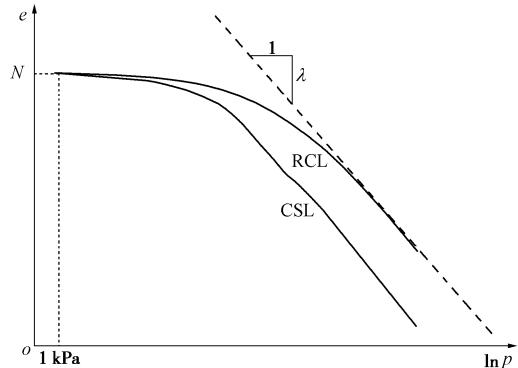


图 16 砂土 RCL 与 CSL 示意图

Fig. 16 RCL and CSL for sands

(2) 相对于 UH 模型，本文所提出的模型中增加了 3 个与破碎有关的参数。

#### a) 结构应力 $p_s$ 的确定方法

结构应力  $p_s$  是指 RCL 上砂土的架空结构消失，整体结构开始进入相对稳定阶段时所对应的应力，可根据下式进行计算。

$$p_s = \frac{\exp\left(\frac{N-e_0}{\lambda}\right) - p_0}{1 - \exp\left(\frac{N-e_0}{\lambda}\right)} \quad (26)$$

式中  $e_0$  为砂土在 RCL 上的初始孔隙比； $p_0$  为砂土在 RCL 上的初始平均正应力。另外，也可通过调整结构

应力  $p_s$  使得 RCL 在  $e - \ln(p+p_s)$  空间上转变为直线来确定结构应力  $p_s$ 。由于本文没有 RCL 的试验数据, 因此可通过等向压缩试验拟合得到, 见图 17。

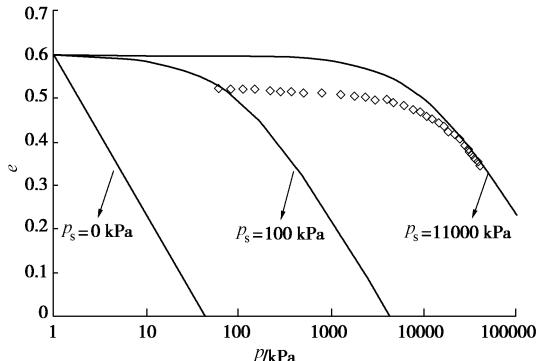


图 17 与颗粒压缩破碎相关的参数分析

Fig. 17 Parametric study on particle crushing caused by compression

如图 17 所示, 由于等向压缩不会发生破坏, 即等向压缩不涉及临界状态, 所以当  $p_s$  等于 0 时, RCL 为一条直线, 本模型回归到 UH 模型。随着  $p_s$  的增大, RCL 发生弯曲, 此时可以描述含有颗粒破碎的砂土一维特性。

### b) 破碎应力 $p_c$ 的确定方法

破碎应力  $p_c$  是指在 RCL 上砂土开始发生破碎时所对应的应力。当平均正应力达到破碎应力时, 虽然破碎已经开始发生, 但是砂土颗粒的架空结构仍然存在, 只是此架空结构在随着破碎程度的增加逐渐消失, 砂土整体结构逐渐向稳定状态发展。破碎应力  $p_c$  可通过室内等向压缩试验和筛分试验得到, 见图 4 和图 5。

### c) $\chi_0$ 的确定方法

$\chi_0$  是依赖于 RCL 与 CSL 之间距离所确定的一个修正参数, 可通过临界状态线拟合得到, 见图 18。由于临界状态线的位置受颗粒破碎程度的影响, 因此  $\chi_0$  越大, 说明破碎程度越大。图 18 显示, 当  $\chi_0=0.8$  时, CSL 的计算值与试验值相近。

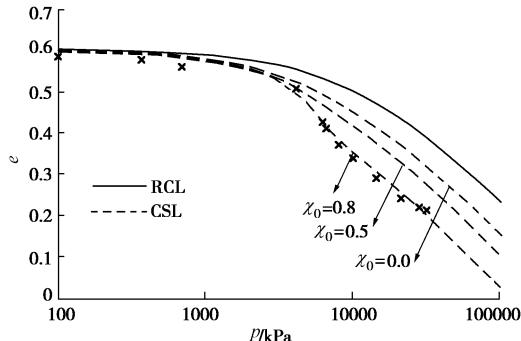


图 18 与颗粒剪切破碎相关的参数分析

Fig. 18 Parametric study on particle crushing caused by shearing

通过以上方法确定的 Cambria 砂的材料参数如表 1 所示。

表 1 模型参数取值

Table 1 Values of model parameters

材料参数	数值	备注
$M$	1.33	
$\lambda$	0.16	
$\kappa$	0.04	
$v$	0.1	与 UH 模型相同
$N$	0.605	
$p_s/\text{MPa}$	11.0	
$p_c/\text{MPa}$	4.0	
$\chi_0$	0.8	破碎参数

## 4.2 模型预测与试验数据对比

图 19 是对初始孔隙比为 0.521 的 Cambria 砂进行等向压缩试验预测, 与试验数据相比, 预测结果较好。

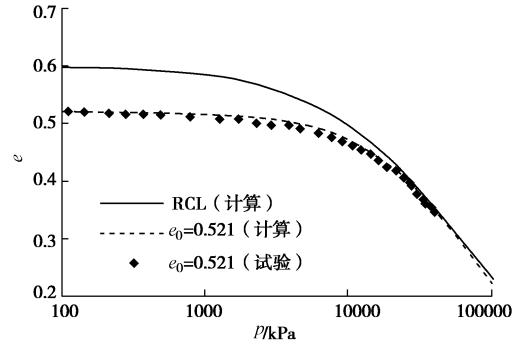


图 19 等向压缩计算

Fig. 19 Prediction in isotropic consolidation

图 20 是对初始孔隙比为 0.521 的 Cambria 砂进行三轴排水试验预测模拟, 其中三轴排水的初始围压分别为 2.1, 4.0, 5.8, 8.0 MPa, 计算结果可以反映砂土的剪胀、剪缩、应变软化和硬化, 且在定量上与试验数据也符合较好。

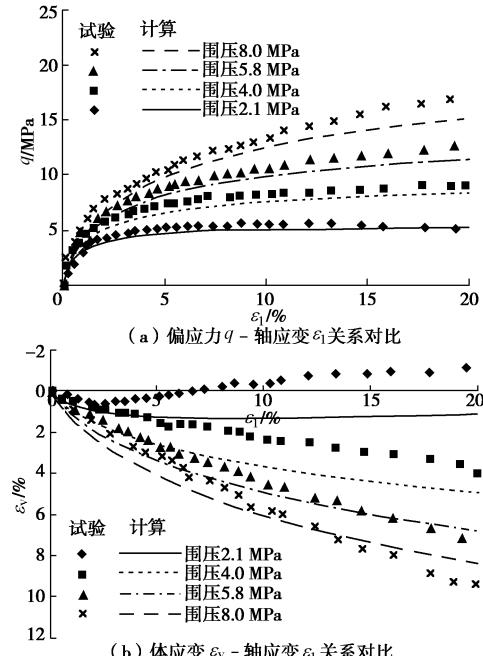


图 20 三轴排水压缩试验结果与模型预测

Fig. 20 Predicted and experimental results for triaxial drained compression tests

## 5 结 论

(1) 通过分析砂土在一维压缩中的力学特性, 得到了砂土的破碎应力  $p_c$  和结构应力  $p_s$ , 并利用结构应力  $p_s$  完成了对砂土一维压缩的描述。

(2) 通过分析砂土的剪切特性, 利用砂土的破碎应力  $p_c$  构造了相关参数  $\chi$  来描述砂土随着破碎的发生, CSL 下移的现象。

(3) 基于 UH 模型, 引入结构应力  $p_s$  和参数  $\chi$  建立可以考虑颗粒破碎的砂土本构模型, 该模型不仅能够反映砂土的剪胀、剪缩、软化和硬化等应力、应变特性, 而且能够正确描述由颗粒破碎引起临界状态特性的变化规律。当结构应力  $p_s$  和参数  $\chi$  均为 0 时, 该模型退回到 UH 模型。

### 参 考 文 献:

- [1] TERZAGHI K, PECK R B. Soil mechanics in engineering practice[M]. 1st ed. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1948.
- [2] DE SOUZA J M. Compressibility of ground sand at high pressure[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1958.
- [3] YAMAMURO J A, LADE P V. Drained sand behavior in axisymmetric tests at high pressures[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1996, **122**(2): 109 – 119.
- [4] YAMAMURO J A, LADE P V. Undrained sand behavior in axisymmetric tests at high pressures[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1996, **122**(2): 120 – 129.
- [5] DAOUADJI A, HICHER P Y, RAHMA A. An elastoplastic model for granular materials taking into account grain breakage[J]. European Journal of Mechanics – A/Solids, 2001, **20**(1): 113 – 137.
- [6] MUIR W D, MAEDA K. Changing grading of soil: Effect on critical states[J]. Acta Geotechnica, 2008, **3**(1): 3 – 14.
- [7] THEVANAYAGAM S, SHENTHAN T, MOHAN S, et al. Undrained fragility of clean sands, silty sands and sandy silts[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2002, **128**(10): 849 – 859.
- [8] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, **50**(4): 449 – 460.
- [9] YAO Y P, YAMAMOTO H, WANG N D. Constitutive model considering sand crushing[J]. Soils and Foundations, 2008, **48**(4): 603 – 608.
- [10] 胡伟, 尹振宇, DANO C, 等. 易破碎粒状材料本构研究[J]. 岩土力学, 2011, **32**(增刊 2): 159 – 165. (HU Wei, YAN Zhen-yu, DANO C, et al. Constitutive study of crushable granular materials[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(S2): 159 – 165. (in Chinese))
- [11] SHENG D C, YAO Y P, CARTER J P. A volume-stress model for sands under isotropic and critical stress states[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, **48**: 1639 – 1645.
- [12] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: three-dimensional unified hardening model for over-consolidated clays[J]. Géotechnique, 2009, **59**(5): 451 – 469.
- [13] HARDIN B O. Crushing of soil particles[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, **111**(10): 1177 – 1192.
- [14] PESTANA J M, WHITTLE A J. Compression model for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 1995, **45**(4): 611 – 631.
- [15] 姚仰平, 余亚妮. 基于统一硬化参数的砂土临界状态本构模型[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(12): 1827 – 1832. (YAO Yang-ping, YU Ya-ni. Extended critical state constitutive model for sand based on unified hardening parameter[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(12): 1827 – 1832. (in Chinese))
- [16] YAO Y P, SUN D A, LUO T. A critical state model for sands dependent on stress and density[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2004, **28**(4): 323 – 337.