

DOI: 10.11779/CJGE201703020

# 基于热力学理论的超固结黏土边界模型

陈艳妮, 杨仲轩\*

(浙江大学建筑工程学院, 浙江 杭州 310058)

**摘要:** 基于热力学理论和临界状态土力学的框架, 建立了耗散应力空间内的 $\alpha$ - $\beta$ 屈服面。定义耗散势和背应力为应力的函数来实现在真实应力空间非相关联流动。基于边界模型框架, 准确模拟了超固结黏土在初始屈服面内的弹塑性响应。采用临界状态线与边界交点在静水压力轴上的投影为映射中心, 并定义剪胀函数, 保证了“干侧”发生剪胀, 而“湿侧”发生剪缩。与 Boston Blue Clay, Lower Cromer Till 和 London Clay 3 种土在不排水条件下的三轴试验数据进行对比, 验证了模型的合理性和有效性。

**关键词:** 热力学理论;  $\alpha$ - $\beta$ 屈服面; 超固结黏土; 临界状态; 边界模型框架

**中图分类号:** TU43      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2017)03-0547-07

**作者简介:** 陈艳妮(1991-), 女, 硕士研究生, 主要从事土体本构方面的研究。E-mail: ceynchen@zju.edu.cn。

## Thermodynamics-based bounding surface model for overconsolidated clay

CHEN Yan-ni, YANG Zhong-xuan

(College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

**Abstract:** Based on the framework of thermodynamics and critical state soil mechanics, a new  $\alpha$ - $\beta$  yield surface is formulated in the triaxial space. Based on the non-associated flow rule and bounding surface framework, the proposed model can simulate the correct elastoplastic responses within its initial yield surface for overconsolidated clay. By defining the dissipative function and back stress being functions of stress, the non-associated flow is naturally followed in the true stress space. The mapping center in the  $p$ - $q$  space is selected as the projection on the hydrostatic axis of the intersection of critical state line and bounding surface, such that the contractive response on the ‘wet side’ and dilative response on the ‘dry side’ can be guaranteed if an appropriated dilatancy function is defined. Comparisons are made between the experimental data of three typical clays under undrained condition, and a full agreement indicates the simulative capability of the proposed model.

**Key words:** thermodynamics theory;  $\alpha$ - $\beta$  yield function; overconsolidated clay; critical state; bounding surface framework

## 0 引言

近年来, 随着高速公路、铁路、机场、堤防等基础设施建设, 土的超固结现象普遍存在。在准确掌握超固结黏土力学特性的基础上, 建立恰当的超固结土本构模型有利于工程问题的精细化分析。

1958 年, Roscoe 提出临界状态理论, 认为土在剪应力作用下会趋近于临界状态, 体应变恒定, 剪应变不断发展, 应力比达到临界状态应力比  $M$ , 其中  $M$  为材料参数, 由材料的摩擦特性决定。1968 年, Roscoe 等<sup>[1]</sup>以临界状态土力学为基础提出了修正剑桥模型 (MCC), 然而该模型模拟超固结土的本构特性存在如下缺陷: ①初始屈服面内仅有弹性响应; ②模拟结果高估了材料的峰值强度。

为模拟初始屈服面内部的弹塑性变形, 学者们相继提出多种解决方案, 主要分为两类: ①引入边界的概念, 通过映射中心和映射法则将当前应力点与边

界面上的像应力点联系起来实现屈服面内部的弹塑性响应<sup>[2-4]</sup>; ②引入多屈服面框架实现弹性到塑性的平稳过渡<sup>[5-7]</sup>。依据边界理论, Whittle 等<sup>[8]</sup>提出了循环加载作用下的 MIT-E3 模型, 考虑各向异性和滞回效应的影响, 通过非相关联流动法则和附加失效面来预测  $K_0$  固结黏性土在三轴试验下的工作特性, 模型有 15 个输入参数, 复杂的参数校正过程阻碍了模型的工程推广; Ling 等<sup>[9]</sup>、魏星等<sup>[10]</sup>、黄茂松等<sup>[11]</sup>引入形状参数来调节边界的形状, 定义了等向硬化、旋转硬化和扭转硬化三类硬化法则, 假定映射中心沿  $K_0$  线移动而不再固定于坐标原点, 较好地模拟了各向异性超固结黏土的应力应变响应; 姚仰平等<sup>[12-14]</sup>、罗汀<sup>[15]</sup>对修

**基金项目:** 国家自然科学基金项目 (51322809, 51578499); 浙江省教育厅项目 (N20110091)

**收稿日期:** 2015-12-21

**\*通讯作者** (E-mail: zxyang@zju.edu.cn)

正剑桥模型的硬化参数进行调整, 建立了统一硬化模型, 指出材料的潜在强度与超固结程度有关, 考虑材料的渐近状态特性对伏斯列夫曲线进行修正, 提出了适用于超固结黏土的渐近状态统一硬化模型; 然而 Ling 和姚仰平的模型预测等向固结土时, 临界状态线与屈服面的交点始终位于屈服面的中点, 与试验结果不一致; Collins 等<sup>[16]</sup>开创性地提出基于热力学理论的本构模型研究方法, 通过定义恰当的耗散势函数来确定屈服法则、流动法则和硬化法则。Gao 等<sup>[17]</sup>在 Collins  $\alpha$ - $\gamma$  屈服面的基础上, 通过定义剪胀公式和引入界面框架来实现对超固结黏土的模拟。

本文以热力学为基础, 通过定义适当的耗散机制, 提出了具有广泛适用性的屈服面, 并基于界面理论, 建立了超固结黏土本构模型。对不排水条件下的 3 种典型黏土: Boston Blue Clay<sup>[18]</sup>, Lower Cromer Till<sup>[19]</sup> 和 London Clay<sup>[20]</sup> 进行模拟, 结果与试验吻合良好, 验证了该模型的有效性和适用性。

## 1 热力学理论基础

李相崧<sup>[21-22]</sup>对热力学理论框架进行了系统阐述, 现简述如下。热力学第一定律即能量守恒定律指出外力对系统作功与进入系统热量的和等于系统能量的变化, 在封闭的代表单元体内部, 热力学第一定律为

$$du = \sigma : d\epsilon + \delta Q \quad , \quad (1)$$

式中,  $u$  为单元体内能,  $\sigma$  为有效应力张量,  $\epsilon$  为应变张量,  $Q$  为进入系统的热量。

热力学第二定律指出对于任何一个孤立系统而言, 其混乱度即熵都是非负的, 即

$$T\gamma = Td\eta - \delta Q \geq 0 \quad , \quad (2)$$

式中,  $T$  为绝对温度,  $\gamma$  为单位温度自发产生的熵增量,  $\eta$  为系统的熵。将式(2)代入式(1)中, 得到

$$du = \sigma : d\epsilon - T\gamma + Td\eta \quad . \quad (3)$$

材料的亥姆霍兹自由能  $\psi$  是内变量  $u$ ,  $T$  和  $\eta$  的函数, 形式如下:

$$\psi = u - T\eta \quad , \quad (4)$$

其增量为

$$d\psi = du - Td\eta - \eta dT \quad , \quad (5)$$

把式(5)代入式(3)得

$$\sigma : d\epsilon - \varpi = d\psi + \eta dT \quad , \quad (6)$$

式中,  $\varpi$  为耗散势能。等温条件下  $dT=0$ , 上式简化为

$$\sigma : d\epsilon - \varpi = d\psi \quad . \quad (7)$$

这里假定材料弹塑性应变是非耦合的, 即应变可以分解成弹性和塑性两部分:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad , \quad (8)$$

式中, 上标  $e$  和  $p$  分别表示弹性和塑性。

系统的亥姆霍兹自由能增量由弹性应变引起的弹性势能和塑性应变引起的锁定自由能两部分组成, 因此式(7)可写成如下形式:

$$d\psi = \underbrace{\sigma : d\epsilon^e}_{\substack{\text{弹性势能} \\ \text{系统存储的能量}}} + \underbrace{\alpha : d\epsilon^p}_{\substack{\text{锁定自由能} \\ 0}} + \underbrace{(\sigma - \alpha) : d\epsilon^p}_{\substack{\text{宏观变形导致的耗散} \\ 0}} - \underbrace{\varpi}_{\substack{\text{微观变形导致的耗散} \\ 0}} \quad , \quad (9)$$

$$\varpi = \underbrace{(\sigma - \alpha) : d\epsilon^p}_{\chi} = \chi : d\epsilon^p \quad , \quad (10)$$

式中,  $\alpha$  为背应力张量,  $\chi$  为耗散应力张量。耗散势  $\varpi$  是应力张量  $\sigma$ , 塑性应变增量  $d\epsilon^p$  和内变量  $\chi$  的函数:

$$\varpi = \varpi(\sigma, H, d\epsilon^p) \quad , \quad (11)$$

由式(10)和式(11)得耗散应力空间的屈服函数为

$$f_\chi(\chi, H, d\epsilon^p) = \chi : d\epsilon^p - \varpi(\sigma, H, d\epsilon^p) = 0 \quad , \quad (12)$$

由耗散应力、背应力和真实应力三者之间的关系, 得到真实应力空间的屈服面为

$$f = f(\sigma, H) = f_\chi(\sigma - \alpha, H, d\epsilon^p) = 0 \quad , \quad (13)$$

根据 Ziegler 正交假设<sup>[23]</sup>和屈服函数的一致性条件即可确定材料的本构关系<sup>[24]</sup>。

## 2 $\alpha$ - $\beta$ 模型屈服面的确立

为表示方便, 下文中出现的  $p$ ,  $q$  均表示材料的平均有效正应力和有效剪应力而非平均总正应力和总剪应力。上述理论指出基于热力学理论建立本构模型的关键是选取恰当的耗散函数。

MCC 模型的耗散函数为

$$\varpi = \varpi \left( \underbrace{d\epsilon_v^p, d\epsilon_q^p}_{d\epsilon^p}, \underbrace{p_0}_{H} \right) = \frac{p_0}{2} \sqrt{(d\epsilon_v^p)^2 + (M d\epsilon_q^p)^2} \quad , \quad (14)$$

式中,  $d\epsilon_v^p$  为塑性体应变,  $d\epsilon_q^p$  为塑性剪应变,  $p_0$  为屈服面的大小,  $M$  为材料常数。由于耗散函数与当前应力状态  $\sigma$  无关, 所以在真实应力空间, 修正剑桥模型采用相关联流动法则。然而土体是压力敏感材料, 试验数据显示土的非相关联流动性主要体现在塑性体应变和塑性剪应变的关系即剪胀性上, 同时耗散函数  $\varpi$  和背应力函数  $\alpha$  只对应力  $\sigma$  的平均正应力  $p$  敏感, 所以有如下函数关系:

$$\left. \begin{aligned} \varpi &= \varpi(p, H, d\epsilon^p) \\ \alpha &= \alpha(p, H) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Collins 等<sup>[25]</sup>、孔亮等<sup>[26]</sup>将材料常数  $M$  替换成  $p$  的函数  $\hat{M}$ , 提出  $\alpha$  非关联流动模型, 耗散函数为

$$\varpi = \varpi \left( \underbrace{p, d\epsilon_v^p, d\epsilon_q^p}_{\sigma}, \underbrace{p_0}_{H} \right) = \frac{p_0}{2} \sqrt{(d\epsilon_v^p)^2 + (\hat{M} d\epsilon_q^p)^2} \quad , \quad (16a)$$

$$\hat{M} = \hat{M}(p, p_0) = M \left[ \alpha + \frac{2(1-\alpha)p}{p_0} \right] , \quad (16b)$$

通过勒让德变换得到耗散应力空间的屈服面为

$$f_\chi = \left[ \hat{M}(p, p_0) \right]^2 \left( p_\chi^2 - \frac{p_0^2}{4} \right) + q_\chi^2 = 0 , \quad (17)$$

式中,  $p_\chi$  和  $q_\chi$  为耗散平均有效正应力和耗散有效剪应力。背平均正应力  $p_a$  和背剪应力  $q_a$  为

$$\left. \begin{array}{l} p_a = p_0/2 , \\ q_a = 0 . \end{array} \right\} \quad (18)$$

所以耗散应力与真实应力存在如下转换关系

$$\left. \begin{array}{l} p_\chi = p - p_0/2 , \\ q_\chi = q . \end{array} \right\} \quad (19)$$

将式 (19) 代入 (17) 中, 得真实应力空间屈服函数:

$$f = \left[ \hat{M}(p, p_0) \right]^2 p(p - p_0) + q^2 = 0 , \quad (20)$$

式中,  $\alpha$  为一新的模型常数, 取值范围为 0~1。图 1 显示不同  $\alpha$  取值下的屈服面形式, 当  $\alpha=1$  时退化为修正剑桥模型。

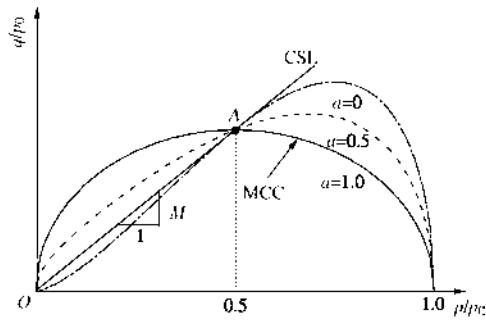


图 1 不同  $\alpha$  取值的  $\alpha$  模型屈服面

Fig 1 Yield surfaces of  $\alpha$  model with various values of  $\alpha$

如图 1 所示, 不论  $\alpha$  取值如何, 临界状态线永远经过临界状态屈服面的中点, 然而试验数据表明, 正常固结黏土在不排水三轴试验中, 临界状态平均正应力  $p_c$  可能小于初始屈服面大小  $p_0$  的一半, 即  $p_c < p_0/2$ 。在加载过程中屈服面不断向外扩张, 临界状态屈服面大小  $p_{0c}$  始终大于初始状态屈服面大小  $p_0$ , 存在关系  $p_c < p_0/2 < p_{0c}/2$ , 临界状态线与屈服面的交点不再经过临界状态屈服面的中点, 而是在中点的左侧, 而模拟结果依然存在关系  $p_c = p_{0c}/2$ , 因此模型高估了材料的临界状态强度。为更准确地预测材料的临界状态强度, 需对屈服面形状进行调节。这里通过对  $\hat{M}$  进行修正, 将式 (16b) 中的 2 用参数  $\beta$  替换, 来改变临界状态线与屈服面交点的位置:

$$\hat{M} = \hat{M}(p, p_0) = M \left[ \alpha + \frac{\beta(1-\alpha)p}{p_0} \right] , \quad (21)$$

其中,  $\beta$  为屈服面的形状参数, 取值范围在 0~2 之间。图 2 为  $\alpha=0.5$  时不同  $\beta$  取值下的屈服面形状, 当

$\beta=2$  时模型退化为  $\alpha$  模型。

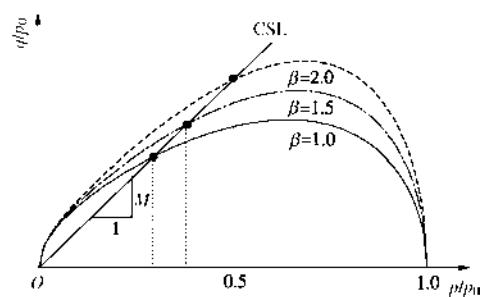


图 2  $\alpha=0.5$  时不同  $\beta$  取值的  $\alpha-\beta$  模型屈服面

Fig. 2 Yield surfaces of  $\alpha-\beta$  model with various values of  $\beta$  when  $\alpha=0.5$

### 3 边界面模型

#### 3.1 边界面的形式

大量试验表明, 超固结黏土不存在纯弹性响应阶段, 塑性变形在加载初期就已出现, 而经典弹塑性理论要求在初始屈服面内部仅发生弹性响应, 只有当应力状态位于屈服面上时才会发生弹塑性响应, 因此无法模拟超固结土在加载初期的弹塑性响应。这里引入边界面模型来实现对超固结黏土加载初期弹塑性响应的模拟。本文把与边界面有关的量均上标横杠用以区分屈服面。将材料受到的历史最大预固结压力  $p_0$  对应的屈服面定义为材料的边界面, 耗散应力空间的边界面函数为

$$\bar{f}_\chi = \left[ \hat{M}(\bar{p}, p_0) \right]^2 \left( \bar{p}_\chi^2 - \frac{p_0^2}{4} \right) + \bar{q}_\chi^2 = 0 , \quad (22a)$$

$$\hat{M} = \hat{M}(\bar{p}, p_0) = M \left[ \alpha + \frac{\beta(1-\alpha)\bar{p}}{p_0} \right] , \quad (22b)$$

真实应力空间的边界面函数为

$$\bar{f} = \left[ \hat{M}(\bar{p}, p_0) \right]^2 \bar{p}(\bar{p} - p_0) + \bar{q}^2 = 0 , \quad (23)$$

偏导数如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}} &= M^2 \left[ \frac{(-3\beta(\alpha-1)[(2+\beta)\alpha-\beta])\bar{p}^2}{p_0} - \alpha^2 p_0 + \right. \\ &\quad \left. 2\alpha[(2\beta+1)\alpha-2\beta]\bar{p} + \frac{4\beta^2(1-\alpha)^2\bar{p}^3}{p_0^2} \right] , \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} = 2\bar{q} , \quad (24b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial p_0} &= -\alpha^2 M^2 \bar{p} - \frac{2M^2 \bar{p}^4}{p_0^3} \beta^2 (1-\alpha)^2 - \\ &\quad \frac{M^2 \bar{p}^3 \beta}{p_0^2} [2\alpha(\beta+1) - \beta - \alpha^2(\beta+2)] . \end{aligned} \quad (24c)$$

#### 3.2 映射中心和映射法则

这里将临界状态线与边界面的交点在静水压力轴上的投影定义为映射中心  $p_m$ , 存在如下关系:

$$\left[ \alpha + \beta(1-\alpha) \frac{p_m}{p_0} \right]^2 \left( \frac{p_m}{p_0} - 1 \right) + \frac{p_m}{p_0} = 0 \quad (25)$$

由式(25)可知,对于同一种材料  $p_m$  与  $p_0$  的比值是恒定的,但是在加载过程中,  $p_0$  不断演化,所以  $p_m$  也会随着  $p_0$  的演化而演化,临界状态时映射中心  $p_m$  与平均有效正应力  $p_c$  相等。

### 3.3 流动法则

根据热力学理论可知,在耗散应力空间材料遵循相关联流动法则,由此可求得剪胀  $D$  为

$$D = \frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_q^p} = \frac{\partial \bar{f}_\chi / \partial \bar{p}_\chi}{\partial \bar{f}_\chi / \partial \bar{q}_\chi} = \left[ \hat{M}(\bar{p}, p_0) \right]^2 \frac{\bar{p}_\chi}{\bar{q}_\chi} \quad (26)$$

将式(19)代入(26)中,得

$$D = \frac{\left[ \hat{M}(\bar{p}, p_0) \right]^2}{\bar{q}} \left( \bar{p} - \frac{1}{2} p_0 \right) = \frac{\left[ \hat{M}(\bar{p}, p_0) \right]^2 - \bar{\eta}^2}{2\bar{\eta}} \quad (27)$$

式中,  $\bar{\eta}$  为像应力比。临界状态时,当前应力点落在边界面上,像应力点与当前应力点重合,需满足关系  $\bar{\eta} = \eta = M$ ,  $d\epsilon_v^p = 0$ ,  $D = 0$ 。然而此时  $\hat{M}$  通常不等于  $M$ ,所以式(27)所求得的剪胀  $D$  不为 0,不满足临界状态理论要求,需对剪胀公式进行修正:

$$D = \frac{M^2 - \bar{\eta}^2}{2\bar{\eta}} \quad (28)$$

虽然引入修正公式会影响耗散应力空间的流动,但显著改善了模型的模拟效果,使模型满足临界状态要求。如图3,当应力点位于垂线  $p = p_m$  的右侧  $A$  点时,像应力点  $A'$  位于临界状态线的下方,此时剪胀  $D > 0$ ,发生剪缩;当应力点位于垂线  $p = p_m$  的左侧  $B$  点时,像应力点  $B'$  位于临界状态线的上方,此时剪胀  $D < 0$ ,发生剪胀。本文参考的试验数据表明强超固结土在加载初期就已经发生剪胀,上述剪胀关系恰好可以模拟加载初期的剪胀行为。如遇到加载初期先剪缩再剪胀的情况,只需调整映射中心的位置,如移到坐标原点即可。根据流动法则,可知材料的塑性应变增量关系为

$$\left\{ \begin{array}{l} d\epsilon_v^p \\ d\epsilon_q^p \end{array} \right\} = \langle L \rangle \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} \left\{ \begin{array}{l} D \\ 1 \end{array} \right\} \quad (29)$$

其中,  $\langle * \rangle$  为 Macauley 函数,当  $L > 0$  时,  $\langle L \rangle = L$ ;当  $L \leq 0$  时,  $\langle L \rangle = 0$ 。 $L$  为加载因子,详细求解过程可参照后文。

### 3.4 硬化法则和塑性模量

采用与修正剑桥模型一致的硬化法则:

$$dp_0 = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} p_0 d\epsilon_v^p \quad (30)$$

式中,  $N$  和  $\lambda$  分别为正常固结线在  $e - \ln p$  平面内的截距和斜率,  $e_0$  为初始孔隙比,  $\kappa$  为卸载回弹曲线斜率。

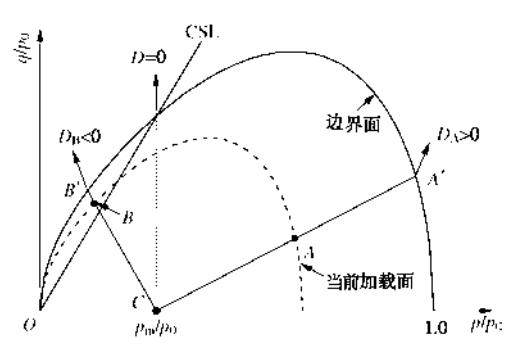


图 3 映射中心和映射法则

Fig. 3 Mapping center and mapping rule

由边界面的一致性条件得到关系:

$$\begin{aligned} d\bar{f} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}} d\bar{p} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} d\bar{q} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial p_0} dp_0 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}} d\bar{p} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} d\bar{q} - \langle L \rangle \bar{K}_p \\ &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}} dp + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} d\bar{q} - \langle L \rangle K_p = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

式中,  $\bar{K}_p$  和  $K_p$  为像应力点的塑性模量和当前应力点的塑性模量。由式(31)可知像应力点的塑性模量为  $\bar{K}_p = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial p_0} \langle L \rangle = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial p_0} \frac{dp_0}{d\epsilon_v^p} \langle L \rangle = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial p_0} \frac{d\epsilon_v^p}{d\bar{q}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} D$ , (32)

当真实应力落在边界面上时,存在关系  $K_p = \bar{K}_p$ ;临界状态即  $\eta = M$  时,存在关系  $K_p = 0$ 。满足上述两个要求,对  $\bar{K}_p$  进行插值来得到  $K_p$ <sup>[27-28]</sup>,这里采用如下的插值公式计算塑性模量  $K_p$ :

$$K_p = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial p_0} \frac{dp_0}{d\epsilon_v^p} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} \frac{M_k^2 - \bar{\eta}^2}{2\bar{\eta}} \text{ 其中 } M_k = M(\bar{p}/\rho)^n, \quad (33)$$

其中,  $\bar{p}$  为  $p - q$  空间映射中心( $p_m$ , 0)到像应力点的距离,  $\rho$  为  $p - q$  空间映射中心( $p_m$ , 0)到当前应力点的距离,  $n$  为非负的材料参数。 $\bar{p}/\rho$  类似于超固结比 OCR 的定义,可以反映材料超固结度的演化规律:

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \sqrt{(p - p_m)^2 + q^2} \\ \bar{p} = \sqrt{(\bar{p} - p_m)^2 + \bar{q}^2} \end{array} \right\} \quad (34)$$

### 3.5 应力应变关系

材料弹性应力应变响应为

$$\left\{ \begin{array}{l} dp \\ dq \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} K d\epsilon_v^e \\ 3G d\epsilon_q^e \end{array} \right\}, \text{ 其中 } \left\{ \begin{array}{l} K = \frac{dp}{d\epsilon_v^e} = \frac{1+e_0}{\kappa} p \\ G = K \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \end{array} \right. \quad (35)$$

式中,  $K$  和  $G$  为材料的弹性模量,  $\nu$  为泊松比。由式(8)、(29)、(31)和(33)推导出加载因子  $L$  为

$$L = \frac{K d\epsilon_v^e \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}} + 3G d\epsilon_q^e \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}}}{KD \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} + 3G \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}} + K_p} \quad (36)$$

由式(31)、(35)和(36)即可推出三轴应力空间的应力应变关系如下:

$$\begin{Bmatrix} dp \\ dq \end{Bmatrix} = A_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} d\epsilon_v \\ d\epsilon_q \end{Bmatrix}, \quad (37)$$

其中,  $A_{2 \times 2}$  为一个  $2 \times 2$  的弹塑性刚度矩阵:

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 3G \end{bmatrix} - \frac{h(L)}{L_1} \begin{bmatrix} K^2 D \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} & 3KGD \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \\ 3KG \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} & 9G^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \end{bmatrix},$$

$$L_1 = KD \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} + 3G \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q} + K_p. \quad (38)$$

其中,  $h(*)$  为 Heaviside 函数,  $L > 0$  时,  $h(L) = 1$ , 发生弹塑性变形; 否则  $h(L) = 0$ , 仅发生弹性变形。

## 4 模型的验证

### 4.1 模型参数的确定

本文提出的  $\alpha - \beta$  非相关联边界界面模型有 8 个参数, 其中  $M$ ,  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $\nu$  和  $N$  与修正剑桥模型参数一致, 可根据等向压缩-回弹曲线和三轴排水剪切试验得到。

参数  $\alpha$ ,  $\beta$  用于修正边界面的形状使其更好地适用于超固结黏土的模拟, 前者使边界面发生扭曲, 后者改变临界状态线和边界面的交点。正常固结土的当前状态面与边界面重合, 当前应力点即像应力点, 此时参数  $n$  对模拟结果没有影响。参数  $\alpha$ ,  $\beta$  可通过对正常固结三轴压缩的试验数据拟合来确定。参数  $\alpha$  建议取值范围为 0.6~0.8, 参数  $\beta$  建议取 1.0。

参数  $n$  为正的材料参数, 通过改变塑性模量  $K_p$  的大小来改变塑性变形的程度,  $n$  越大,  $K_p$  越大, 模型的弹性响应越强烈, 可通过拟合试验数据确定, 取值范围为 1.0~8.0。

为验证模型的有效性, 本文对 BBC (Boston Blue Clay)、LCT (Lower Cromer Till) 和 LC (London Clay) 3 种土在不排水条件下的三轴压缩试验进行模拟, 验证模型的有效性和适用性, 参数如表 1。

表 1 土体的模型参数

Table 1 Model parameters of soils

类型	$M$	$\lambda$	$\kappa$	$\nu$	$N$	$\alpha$	$\beta$	$n$
BBC	1.353	0.184	0.036	0.1	2.059	0.6	1.0	4.0
LCT	1.2	0.063	0.018	0.2	0.747	0.7	1.0	2.2
LC	0.827	0.168	0.064	0.25	1.843	0.8	1.0	4.0

### 4.2 等向超固结土的三轴压缩试验

图 4~6 对比了不同土在不排水条件下的试验和预测结果, 二者具有较好的吻合度。对于超固结度为 6 的 LC 黏土, 预测结果与试验数据偏差较大, 试验数据的合理性有待研究。

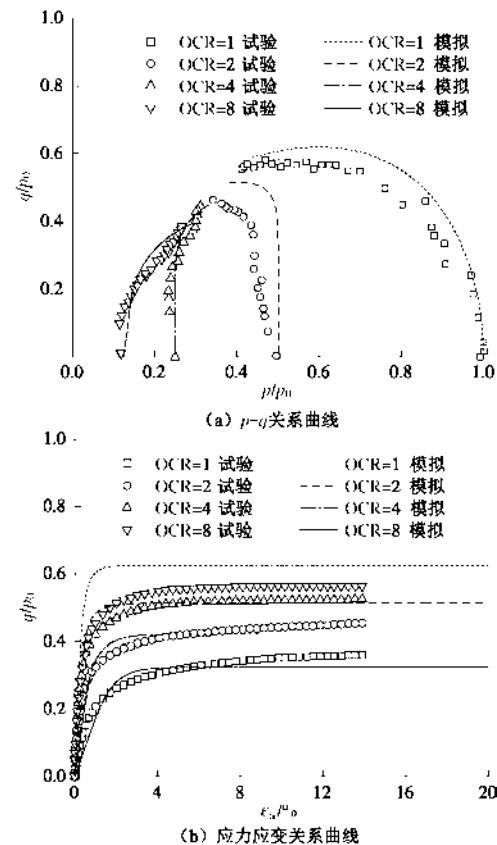


图 4 BBC 三轴不排水试验和预测结果的比较

Fig. 4 Comparison between undrained triaxial test results and model simulations for BBC

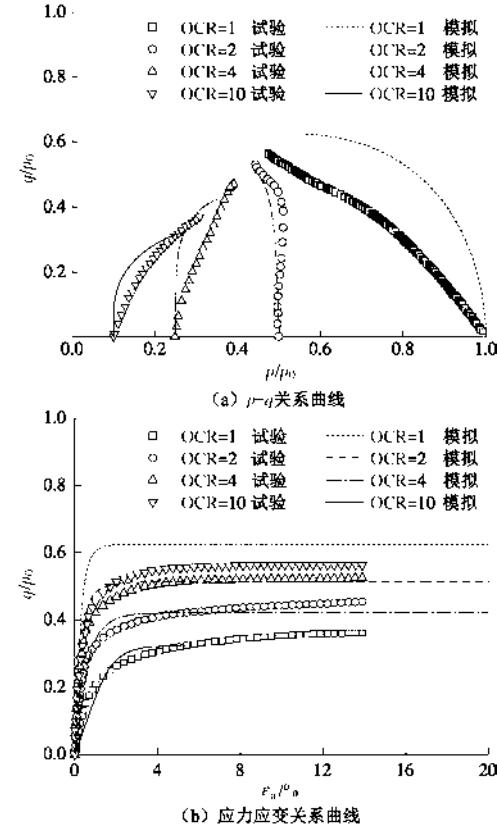


图 5 LCT 三轴不排水试验和预测结果的比较

Fig. 5 Comparison between undrained triaxial test results and model simulations for LCT

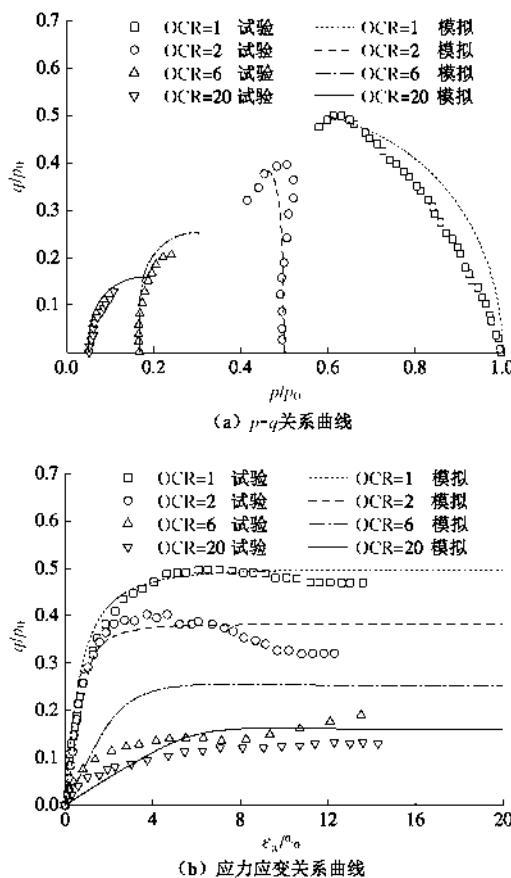


图 6 LC 三轴不排水试验和预测结果的比较

Fig. 6 Comparison between undrained triaxial test results and model simulations for LC

## 5 结论和建议

(1) 本文从热力学理论出发, 指出合理耗散势函数的定义是本构模型建立的关键。

(2) 对 Collins & Kelly  $\alpha$  模型的屈服面进行修正, 引入参数  $\beta$  来控制临界状态线与屈服面交点的位置, 所提出的屈服面具有广泛适用性。

(3) 采用边界面理论模拟初始屈服面内部的弹塑性响应, 更好地反映了超固结土的本构特性。

(4) 采用临界状态线与边界面交点在静水压力轴的投影为映射中心, 并定义剪胀函数, 保证了“干侧”发生剪胀, 而“湿侧”出现剪缩。

通过对 3 种不同土在不排水条件下的三轴试验进行模拟, 表明  $\alpha$  -  $\beta$  边界面模型能较好地预测超固结土在剪应力作用下的主要变形特性, 验证了模型的有效性和适用性。对于各向异性固结或  $K_0$  固结黏土, 需引入运动硬化机制, 本模型尚未考虑, 有待进一步研究。

## 参考文献:

[1] ROSCOE K H, BURLAND J B. On the generalized

- stress-strain behaviour of ‘wet’ clay[M]// Engineering Plasticity, HEYMAN J, LECKIE F A, eds, 1968: 535 - 609.
- [2] DAFALIAS Y, HERRMANN L R. Bounding surface formulation of soil plasticity[M]// Soil Mechanics, Cyclic & Transient Loads, PANDE G N, ZIENKIEWICZ O C, eds, 1982: 253 - 282.
- [3] DAFALIAS Y. Bounding surface plasticity. I: mathematical foundation and hypoplasticity[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1986, **112**: 966 - 987.
- [4] DAFALIAS Y. Bounding surface plasticity. II: application to isotropic cohesive soils[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1986, **112**: 1263 - 1291.
- [5] PREVOST J H. Plasticity theory for soil stress-strain behavior[J]. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division, 1978, **104**(5): 1177 - 1194.
- [6] AL-TABBAA A, WOOD D M. An experimentally based ‘bubble’ model for clay[C]// Proceedings of International Conference of Numerical models in Geomechanics NUMOG 3. Niagara Falls, Canada, 1989: 91 - 99.
- [7] EINAV I, PUZRIN A M, HOULSBY G T. Continuous hyperplastic models for overconsolidated clays[J]. Proceedings of Symposium on Mathematical Models in Geomechanics, 2000, **37**(5/6): 515 - 523.
- [8] WHITTLE A J, KAVVADAS M J. Formulation of MIT-E3 constitutive model for overconsolidation clays[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1994, **120**: 173 - 198.
- [9] LING H I, YUE D Y, KALIAKIN V N, et al. Anisotropic elastoplastic bounding surface model for cohesive soils[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, **128**: 748 - 758.
- [10] 魏 星, 黄茂松. 黏土的各向异性边界面模型[J]. 水力学报, 2006, **37**(7): 831 - 837. (WEI Xing, HUANG Mao-song. Anisotropic bounding surface model for clay[J]. Chinese Journal of Hydraulic Engineering, 2006, **37**(7): 831 - 837. (in Chinese))
- [11] 黄茂松, 刘 明, 柳艳华. 循环荷载下软黏土的各向异性边界面模型[J]. 水力学报, 2009, **40**(2): 188 - 200. (HUANG Mao-song, LIU Ming, LIU Yan-hua. Anisotropic bounding surface model for soft clay under cyclic loading[J]. Chinese Journal of Hydraulic Engineering, 2009, **40**(2): 188 - 200. (in Chinese))
- [12] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays[J]. Géotechnique, 2009, **59**(5): 451 - 469.
- [13] 姚仰平. UH 模型系列研究[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(2):

- 193 – 217. (YAO Yang-ping. Advanced UH models for soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(2): 193 – 217. (in Chinese))
- [14] 姚仰平, 侯伟, 罗汀. 土的统一硬化模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(10): 2135 – 2151. (YAO Yang-ping, HOU Wei, LUO Ting. Unified hardening models for soils[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(10): 2135 – 2151. (in Chinese))
- [15] 罗汀. 土的本构关系[M]. 北京: 人民交通出版社, 2010. (LUO Ting. Soil constitutive models[M]. Beijing: China Communication Press, 2010. (in Chinese))
- [16] COLLINS I F, HILDER T. A theoretical framework for constructing elastic/plastic constitutive models of triaxial tests[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, 26: 1313 – 1347.
- [17] GAO Z W, ZHAO J D. Modeling the dilatancy of overconsolidated clay[C]// Constitutive Modeling of Geomaterials. Berlin, 2013: 541 – 545.
- [18] PESTANA J M, WHITTLE A J, GENS A. Evaluation of a constitutive model for clays and sands: Part II - clay behaviour[J]. International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics, 2002, 26: 1123 – 1146.
- [19] GENS A. Stress-strain and strength characteristics of a low plasticity clay[D]. London: University of London (Imperial College of Science and Technology), 1982.
- [20] GASPARRE A. Advanced laboratory characterisation of London Clay[D]. London: Imperial College London, 2005.
- [21] 李相崧. 饱和土弹塑性理论的数理基础-纪念黄文熙教授[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(1): 1 – 33. (LI Xiang-song. Physical and mathematical bases of elastoplastic theories on saturated soils-In memory of Professor HUANG Wen-xi[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(1): 1 – 33. (in Chinese))
- [22] LI X S. Thermodynamics-based constitutive framework for unsaturated soils. I: theory[J]. Géotechnique, 2007, 57(5): 411 – 422.
- [23] ZIEGLER H. An introduction to thermomechanics[M]. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland, 1983.
- [24] YAN W M, LI X S. A model for natural soil with bonds[J]. Géotechnique, 2010, 61(2): 95 – 106.
- [25] COLLINS I F, KELLY P A. A thermomechanical analysis of a family of soil models[J]. Géotechnique, 2002, 52(7): 507 – 518.
- [26] 孔亮, COLLINS I F. 模拟土体本构特性的热力学方法[J]. 岩土力学, 2008, 29(7): 1732 – 1740. (KONG Liang, COLLINS I F. Thermomechanical approach to modelling constitutive behaviors of geomaterials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 29(7): 1732 – 1740. (in Chinese))
- [27] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, 50(4): 449 – 460.
- [28] LI X S. A sand model with state-dependent dilatancy[J]. Géotechnique, 2002, 52(3): 173 – 186.