

DOI: 10.11779/CJGE2016S2033

岩土抗剪强度参数的最优概率分布函数推断方法

宫凤强, 黄天朗, 李夕兵

(中南大学资源与安全工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 抗剪强度参数最优概率分布形式的推断是保证岩土工程可靠度计算结果精确的基础和前提。现有研究认为大多数抗剪强度参数服从正态或对数正态分布, 但是由于岩土参数实际分布区间有限, 导致上述分布在使用过程中均存在和实际参数分布区间不匹配的问题。考虑到绝大多数岩土参数存在偏度这一事实, 提出以“ 3σ ”原理为基础, 并考虑偏度进行调整的分布区间确定方法。并基于正态信息扩散原理, 提出推断岩土抗剪强度参数概率分布的正态信息扩散法。以水利水电工程中的3组岩基内摩擦角样本作为实例, 利用正态信息扩散法推断对应的概率密度函数, 并以K-S法进行检验。同时为了考察样本容量对正态信息扩散法以及经典分布拟合法在拟合精度方面的影响, 利用蒙特卡洛模拟方法生成已知分布的8组随机样本, 样本容量分别为15, 20, 30, 50, 100, 200, 500和1000。研究结果表明: 不论对实测样本还是模拟样本, 与传统的经典分布拟合法得到的最优分布——对数正态分布相比, 正态信息扩散法的检验值均低于对数正态分布, 并随着样本容量的增加逐渐趋于收敛, 而对数正态分布检验值的收敛趋势相对弱一些。另外, 在文中确定的分布区间内, 正态信息扩散分布累积概率值的误差约在 10^{-4} 量级, 并且几乎不受样本容量变化的影响; 对数正态分布累积概率值的误差在 10^{-3} 量级, 但是受样本容量变化的影响很大, 并呈现不规则变化趋势。

关键词: 抗剪强度参数; 概率分布; 可靠度; 正态信息扩散; 样本个数; 拟合精度

中图分类号: TU432 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2016)S2-0204-06

作者简介: 宫凤强(1979-), 男, 博士(后), 副教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程可靠度和岩石动力学方面的教学与研究工作。E-mail: fengqiangg@126.com。

Inference method for optimal probability distribution function of shear strength parameters in geotechnical engineering

GONG Feng-qiang, HUANG Tian-lang, LI Xi-bing

(School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: The inference of optimal probability distribution of shear strength parameters is the basis and premise to ensure the accuracy of reliability calculation in geotechnical engineering. The existing studies suggest that most of the shear strength parameters obey the normal or logarithmic normal distribution. However, because the actual distribution range of geotechnical parameters is very limited, the problem that range mismatches between the defined interval of normal distribution or logarithmic normal distribution and the actual distribution interval of geotechnical parameters is inevitable. Considering the fact that there is a certain degree of skewness for the distribution of most geotechnical parameters, based on the “ 3σ ” principle, a distributed interval determination method adjusted with the skewness is proposed. Three groups of samples of the internal friction angle of batholiths from water conservancy and hydropower projects are treated as examples, and the normal information diffusion method (NID method) is used to infer their respective probability distribution function. The K-S test method is also introduced to test the fitting degree. At the same time, in order to investigate the influence of sample sizes on the fitting accuracy of the normal information diffusion method and the typical distribution fitting method, eight groups of samples are produced using the Monte-Carlo method, and the sample size is 15, 20, 30, 50, 100, 200, 500 and 1000. The results show that, regardless of the actual or simulated samples, compared with the logarithmic normal distribution (obtained by the typical distribution fitting method), all the test values of the normal information diffusion distribution are lower than those of lognormal distribution, and tend to converge with the increase of the sample sizes.

Key words: shear strength parameter; probability distribution; reliability; normal information diffusion; sample size; fitting precision

基金项目: 国家自然科学基金项目(41102170); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2011QNZT090)

收稿日期: 2016-05-19

0 引言

在进行水利水电工程可靠度分析时, 力学及物理参数概率分布类型的不同将影响可靠度指标的计算结果, 有效地建立输入参数的最佳概率模型, 是获得精确可靠度计算结果的前提^[1-4]。例如严春风等发现, 岩土抗剪强度参数 c , φ 值服从不同分布类型时, 可靠度的计算结果有巨大的差异, 最大相差 10 倍以上^[5-6]。 c , φ 值作为实际工程中的最基本参数, 很多专家和学者为了得到其最佳概率分布类型进行了大量的研究工作。例如陈立宏等^[2]通过收集多座水库土坝试验资料, 认为一般情况下土的 c 和 φ 值接受对数正态分布; 罗冲等^[7]、张红琼等^[8]通过对数个滑坡滑带土抗剪强度参数 c , φ 的统计分析, 认为 c 值服从对数正态分布, 而 φ 值服从正态分布; 陈炜韬等^[9]对第四系坡积残黏性土的 500 组抗剪强度参数试验数据为基础进行统计分析, 推荐 c 和 φ 值的最优分布模型分别为正态分布、对数正态分布; 苏卫卫等^[10]对上海淤泥质黏土进行试验, 统计分析后认为抗剪强度参数服从正态分布和对数正态分布。

在上述研究中, 均假设抗剪强度参数服从若干种经典分布, 并通过检验的方法得到其中的最优分布类型为正态分布或对数正态分布, 相当于在经典分布的有限范围内寻找最优分布。但是在使用正态分布进行可靠度分析时, 存在很大问题。陈祖煜指出^[11], 抗剪强度参数用正态分布来表示时, 意味着参数可以取负值, 这一点和参数的物理意义不符。崔洁等^[12]从理论上分析了岩石抗剪强度参数不再严格服从正态分布, 一般呈现正偏态或负偏态分布, 认为有时可以优先选用对数正态分布; 陈立宏等^[2]、苏卫卫等^[10]也认为优先使用对数正态分布可能更为合理。即使如此, 将对数正态分布用于表征土体参数概率分布特征的合理性还有待进一步验证。实际上, 利用对数正态分布表示抗剪强度参数概率分布存在的问题在本质上和正态分布的问题一样, 其实质是经典分布的定义区间和实际岩土参数分布区间不匹配的问题。使用对数正态分布虽然可以避免出现负值的情况, 相当于解决了岩土参数左端区间不匹配的问题, 但是对区间右端也需要进行考虑, 因为任何岩土参数分布区间右端不可能趋向无穷大。

为此, 本文在分析工程参数非负的基础上, 提出以 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 估计, 同时考虑偏度调整的区间确定方法。并在此基础上, 借鉴 Huang^[13]提出的正态信息扩散原理, 对抗剪强度参数的概率分布进行推断, 并通过 K-S 检验法, 与对数正态分布的结果进行比较,

验证该方法的适用性。另外, 为了考察样本量对本文方法、对数正态分布拟合法拟合精度的影响, 利用蒙特卡洛模拟方法生成容量分别为 15, 20, 30, 50, 100, 200, 500, 1000 的 8 组样本, 同时进行检验和分析比较, 结果表明正态信息扩散分布更加接近实际数据的分布, 可以考虑在实际可靠度分析问题中进行推广应用。

1 正态信息扩散原理

正态信息扩散原理如下^[13]: 设随机变量 O 的概率密度函数为 $f(x)$, 定义 $\mu(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一个波雷尔可测函数, $\Delta_n > 0$ 为常数, 则称

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{n\Delta_n} \sum_{i=1}^n \mu\left(\frac{x-x_i}{\Delta_n}\right) \quad (1)$$

为总体密度 $f(x)$ 的一个扩散估计, 称 μ 为扩散函数, Δ_n 为窗宽。根据信息扩散过程, μ 由下式确定:

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1), 则随机变量 O 的概率密度函数 $f(x)$ 的正态信息扩散估计为

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nh}} \sum_{i=1}^n \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2h^2}\right] \right\} \quad (3)$$

式中 h 为标准正态扩散 $\mu(x)$ 时的窗宽; n 为随机变量的样本个数; x_i 为样本观测值, 并且最大值为 x_{\max} , 最小值为 x_{\min} 。根据正态信息扩散的择近原则, 可求解 $h = \gamma(x_{\max} - x_{\min})/(n-1)$, γ 的具体数值可参考文献 [14]。该方法实际上是以每一个观测值 x_i 为均值, h 为方差的 n 个正态分布的线性组合, 所以该方法也被称为正态信息扩散法。

对于具体的抗剪强度参数, 根据其所得到的试验样本, 直接计算正态信息扩散函数中的各项参数, 然后把所有样本数据代入, 即可得到所需要的概率分布。

2 岩土抗剪强度参数概率分布比较

2.1 概率分布取值区间的确定

可靠度分析和计算中, 针对每一项参数都首先要确定其分布区间长度。但是, 目前并没有相对准确和统一的计算方法。一般情况下, 基于累积概率值 0.9973 的特点, 经常用 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 原则确定样本的区间长度。该方法的前提是参数服从正态分布, 即分布区间关于均值对称, 但是实际工程中的任何岩土参数都存在一定的偏斜, 因此确定区间时应该考虑偏度存在这一事实。为此, 在考虑偏度属性(c_3)和工程参数非负值的基础上, 本文给出一种样本区间确定方法:

(1) 当 $c_3 < 0$ 时,

$$\left. \begin{array}{l} x_{\min} = \mu - (3 - c_3)\sigma, \\ x_{\max} = \mu + 3\sigma. \end{array} \right\} \quad (4)$$

(2) 当 $c_3 > 0$ 时,

$$\left. \begin{array}{l} x_{\min} = \mu - 3\sigma, \\ x_{\max} = \mu + (3 + c_3)\sigma. \end{array} \right\} \quad (5)$$

(3) 当 $x_{\min} \leq 0$ 时,

$$\text{interval} = (0, x_{\max}). \quad (6)$$

式中 μ 和 σ 分别是样本的均值和方差, 偏度 $c_3 = \mu_3 / \sigma^3$, x_{\min} 为区间左端点, x_{\max} 为区间右端点。

2.2 两种方法拟合结果比较

正态信息扩散法在 2006 年被引入到岩土工程参数概率分布函数的推断中^[15], 并且近年来在该领域有了持续的研究与应用^[16-17]。为了进一步考察正态信息扩散法推断岩土抗剪参数概率分布的适用性和优劣性, 选取某水利水电工程^[18]和小浪底水力发电站^[19]不拒绝对数正态分布的岩基内摩擦角(°)作为验证样本进行推断, 不同试样编号的岩基内摩擦角序号分别为 1, 2 和 3 (样本数据如表 1 所示)。对数正态分布表达式为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{-\frac{[\ln(x) - \mu]^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (7)$$

以序号 3 的内摩擦角样本说明计算过程。首先以 2.1 节所述方法确定样本的数据分布区间(计算结果见表 2, 对数正态分布和正态信息扩散分布分别用 LN 和 NID 表示), 然后使用正态信息扩散方法和对数正

态分布拟合法推断其概率分布。

根据所得到的概率分布函数, 利用 K-S 方法进行检验(为了和下节考察样本问题保持一致, 本文中统一采用了 K-S 检验法)。表 3 列出了样本在各区间内的 K-S 检验结果, 给定样本容量 63, 显著性水平 $\alpha=0.05$, 有临界值 $D_{63,0.05}=0.1713$ 。

使用正态信息扩散法得到的检验值为 0.0109, 显然远远小于临界值, 说明该方法得到的概率分布能够反映样本的分布规律。而对数正态分布得到的检验值为 0.0715, 比正态信息扩散法得到的检验值要大很多, 是前者的 6.56 倍。按照上述计算方法, 分别对序号 1 和 2 的样本进行相同的计算, 两组样本临界值分别为 $D_{25,0.05}=0.2640$ 和 $D_{42,0.05}=0.2099$, 正态信息扩散法得到的检验值分别为 0.0034 和 0.0172。而对数正态分布的检验值为 0.0710 和 0.0233, 远大于正态信息扩散法的结果。这说明与传统方法相比, 正态信息扩散法得到的概率分布比传统方法精度要高, 更能反映样本的实际分布情况。

表 2 中还给出了两种方法在所给定区间上的累积概率值, 正态信息扩散分布的累积概率值分别为 1.0000, 1.0000, 0.9999, 而对数正态分布所得的累积概率值为 0.9906, 0.9904, 0.9977, 显然与前者所得结果相差很大。从中也可以说明, 在本文所给出的区间范围内, 针对 10^4 量级以上的低概率可靠度问题, 所得结果完全可以满足累积概率值等于 1 的要求, 而传统经典分布拟合法则要提高一个量级。

表 1 内摩擦角样本数据表

Table 1 Sample data of geotechnical parameters

样本	容量	样本数据/(°)	来源
1	25	11.86, 14.04, 13.50, 10.20, 11.31, 12.95, 12.41, 13.50, 12.95, 15.64, 16.17, 17.22, 20.81, 20.81, 25.64, 22.29, 24.70, 26.10, 22.78, 19.80, 17.74, 20.81, 20.30, 20.30, 27.47	文献 [18]
2	42	48.74, 49.96, 46.67, 60.95, 55.95, 55.95, 57.17, 43.23, 34.22, 37.95, 55.22, 52.43, 37.23, 45.0041, 35.30, 11.41, 02, 48.24, 30.54, 27.02, 32.21, 38.66, 41.02, 45.29, 38.66, 36.13, 34.99, 46.67, 38.66, 38.31, 33.82, 47.73, 30.96, 45.57, 33.02, 27.47, 40.36, 20.81, 39.01, 20.81, 30.96, 32.21	文献 [18]
3	63	20.78, 25.45, 22.22, 23.30, 24.78, 20.06, 18.77, 24.76, 18.49, 22.95, 24.75, 23.66, 17.02, 23.1, 20.07, 16.63, 21.03, 23.62, 22.70, 20.43, 21.41, 22.81, 22.14, 22.28, 22.13, 22.87, 24.18, 20.70, 22.33, 21.37, 21.3, 22.75, 19.92, 19.20, 22.68, 21.56, 26.14, 23.44, 22.05, 22.47, 20.58, 22.50, 20.65, 27.34, 21.14, 23.63, 22.83, 20.28, 21.19, 23.09, 22.56, 23.7, 27.03, 25.60, 23.74, 21.44, 27.31, 26.81, 26.18, 23.29, 22.62, 30.32, 27.20	文献 [19]

表 2 计算结果

Table 2 Calculated results

样 本	对数正态分布参数		偏度值	区间取值情况			检验值比较		累积概率值比较		
	μ	σ		实际取值区间	左端点	右端点	临界值	LN	NID	LN	NID
1	2.8533	0.2914	0.1943	$[\mu - 3\sigma, \mu + (3 + c_3)\sigma]$	2.6990	34.3994	0.2640	0.0710	0.0034	0.9906	1.0000
2	3.6664	0.2519	0.1282	$[\mu - 3\sigma, \mu + (3 + c_3)\sigma]$	11.2918	70.5322	0.2099	0.0233	0.0172	0.9904	1.0000
3	3.1141	0.1138	0.3029	$[\mu - 3\sigma, \mu + (3 + c_3)\sigma]$	14.9345	31.1580	0.1713	0.0715	0.0109	0.9977	0.9999

表 3 3 号样本的 K-S 检验结果

Table 3 K-S test results of sample No. 3

样本区间	频数	样本频率 $F_n(x)$	$ F_n(x) - F_0(x) $	
			LN	NID
(14.9359,16.7380]	1	0.0159	0.0114	0.0029
(16.7380,18.5401]	2	0.0476	0.0038	0.0019
(18.5401,20.3422]	7	0.1587	0.0275	0.0001
(20.3422,22.1443]	15	0.3968	0.0454	0.0029
(22.1443,23.9465]	24	0.7778	0.0715	0.0109
(23.9465,25.7486]	6	0.8730	0.0080	0.0048
(25.7486,27.5507]	7	0.9841	0.0222	0.0105
(27.5507,29.3528]	0	0.9841	0.0059	0.0000
(29.3528,31.1549]	1	1.0000	0.0023	0.0001
Dn	—	—	0.0715	0.0109

图 1 分别给出了 3 组内摩擦角的概率密度函数曲线图。从图中可以看出, 随着样本量的增大(25 到 63), 数据的直方图依然存在一定的波动性, 而对数正态分布函数都是单峰型函数, 峰值前递增, 峰值后递减, 无法准确反映样本的这种特性。与此不同的是, 正态信息扩散法得到的概率分布会随着样本实际分布的波动呈现多峰值状态, 显然在描述样本的分布方面更有优势。图 2 分别给出了编号为[#]1~[#]3 样本的内摩擦角的累积概率函数比较图。可以观察到, 无论样本量大小, 对数正态分布得到的累积概率分布曲线逼近程度都要低于正态信息扩散分布的结果, 进一步说明了正态信息扩散法描述抗剪强度参数概率分布的优势。

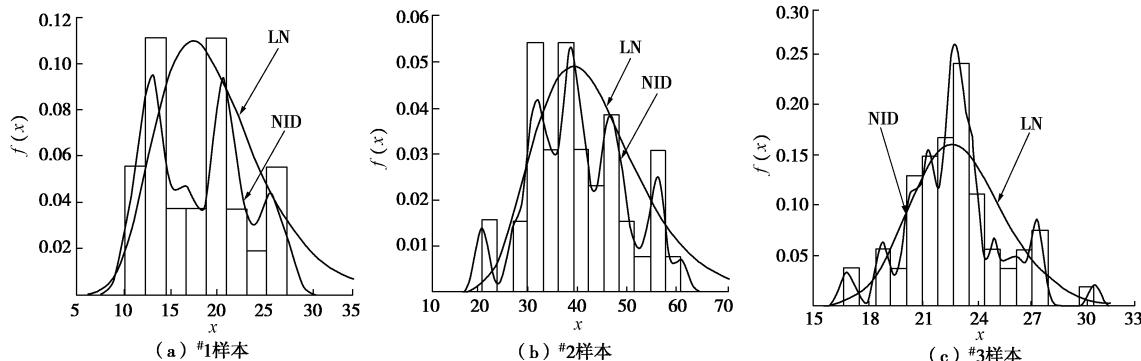


图 1 两种方法的概率密度函数曲线比较

Fig. 1 Comparison of probability density function curves of samples with two methods

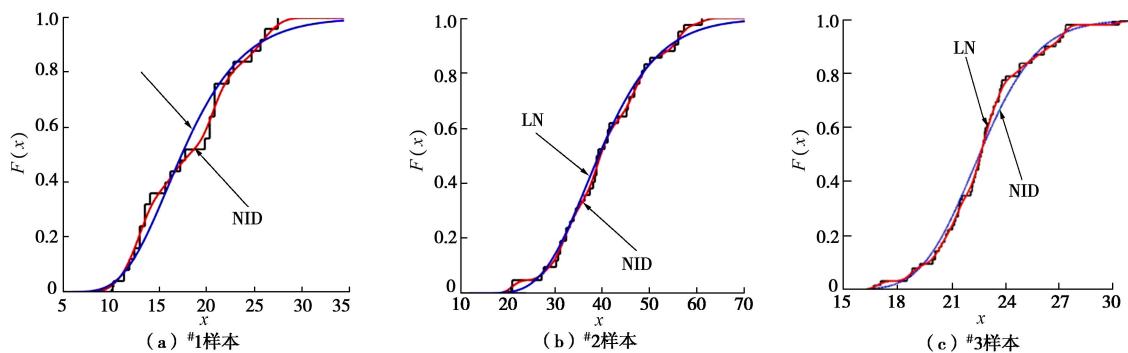


图 2 两种方法的累积概率函数曲线比较

Fig. 2 Comparison of probability cumulative function curves of samples by two methods

3 样本量对拟合精度的影响

在实际工程中, 所获得样本基本都是小样本, 很难针对同一参数考察不同样本容量对上述两种方法在拟合精度上的影响。为此, 本文中利用 Monte-Carlo 方法抽取不用容量的样本, 分别利用上述两种方法进行拟合, 考察样本容量对拟合精度的影响。

3.1 基于 Monte-Carlo 方法的模拟样本

以 2.2 节 3 组样本所得到的对数正态分布 $LN(2.8533, 0.2914)$ 、 $LN(3.6664, 0.2519)$ 和 $LN(3.1141, 0.1138)$ 作为已知分布, 利用 Monte-Carlo 模拟方法分别生成容量为 15, 20, 30, 50, 100, 200, 500 和 1000 八组样本, 然后分别进行拟合和检验, 所得结果如下。

3.2 拟合精度分析

概率分布推断及计算检验过程参考 2.2 节。图 3 分别给出了 3 种对数正态分布进行抽样后所得数据的检验结果。以图 3 (a) 为例, 可以看出不论是对数正态分布还是正态信息扩散分布所得到的检验值均小于临界值, 因此两种方法所得概率分布完全通过检验。但是从图中也可以看出, 当样本容量一定时, 利用正态信息扩散分布得到的检验值很明显要比对数正态分布所得检验值低很多; 而且会随着样本量的增加呈现逐步减少的趋势非常明显, 具体检验值从样本容量为 15 时的 0.0644 减少到容量为 1000 时的 0.0009, 并逐

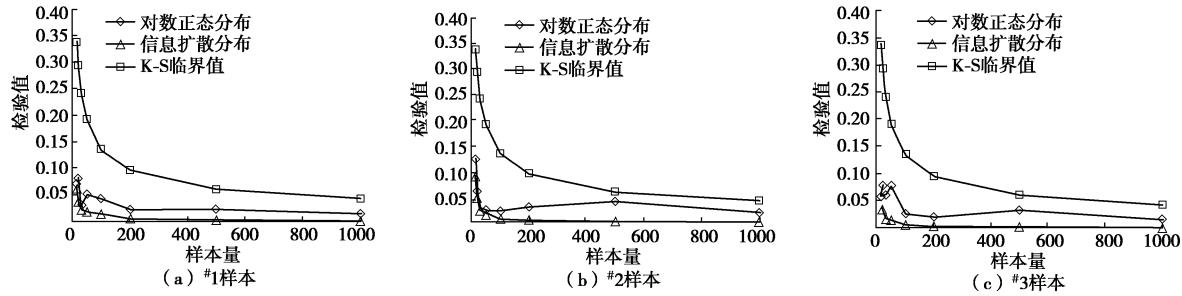


图 3 检验值随样本容量增加变化趋势图

Fig. 3 Variation trend of test values with sample sizes

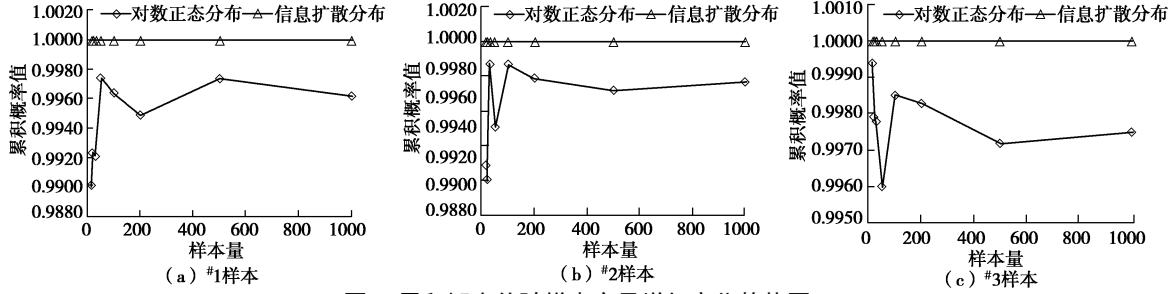


图 4 累积概率值随样本容量增加变化趋势图

Fig. 4 Variation trend of cumulative probabilities with sample sizes

渐趋于收敛；而利用对数正态分布来检验时，检验值从整体上也呈现随着样本量增多而减少，但是不同于正态信息扩散分布的结果，对数正态分布的检验值随着样本量增加无法趋于收敛，而是有所波动。例如^{#1}样本的抽样结果显示，当样本容量从 15 增加到 100 时，检验值分别是 0.0717, 0.0820, 0.0307, 0.0513 和 0.0437。

图 4 分别给出了 3 种对数正态分布进行抽样后所得数据的累积概率值结果。很明显，随着样本量的增大，正态信息扩散分布的累积概率值始终为 1.0000 左右，不受样本容量大小的影响。而对于对数正态分布，累积检验值始终达不到 1.0000，而且呈现不规则变化，即随着样本容量的增加，累积概率值波动性较大，误差量级在 10^{-3} 水平甚至更高。

4 结论与建议

(1) 针对岩土工程参数的实际情况，提出以 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 估计，同时考虑偏度进行调整的概率分布积分区间方法。

(2) 利用正态信息扩散法推断 3 组抗剪强度参数概率分布，并和对应的对数正态分布进行比较。结果表明，正态信息扩散分布的检验值明显小于对数正态分布的检验值；正态信息扩散分布的累积概率值基本接近于 1，所得误差的量级比后者误差量级小一级。

(3) 随着样本量的增大，相对于对数正态分布而言，正态信息扩散分布具有更小的检验值，并且逐渐趋于收敛，累积概率满足等于 1 的要求；对于对数正态分布，随着样本量的增加，检验值和累积概率都呈不规则变化。

(4) 结合实测样本和模拟样本的分析，正态信息扩散法在推断抗剪强度参数概率分布方面更具有优势，并且概率密度函数为 n 个正态分布的线性组合，在工程可靠度计算中可以充分发挥正态分布的优势。

参考文献：

- [1] ZHAO Y, ANG A. Three-parameter gamma distribution and its significance in structural reliability[J]. Computational Structural Engineering, 2002, 2(1): 1 - 10.
- [2] 陈立宏, 陈祖煜, 刘金梅. 土体抗剪强度指标的概率分布类型研究[J]. 岩土力学, 2005, 26(1): 37 - 40. (CHEN Li-hong, CHEN Zu-yu, LIU Jin-mei. Probability distribution of soil strength[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(1): 37 - 40. (in Chinese))
- [3] 宫凤强, 李夕兵, 邓 建. 岩土力学参数概率分布的切比雪夫多项式推断[J]. 计算力学学报, 2006, 23(6): 722 - 727. (GONG Feng-qiang, LI Xi-bing, DENG Jian. Assessment of probability distribution of mechanical parameters of rock & soil by using Chebyshev orthogonal polynomials[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(6): 722 - 727. (in Chinese))
- [4] LI X B, GONG F Q. A method for fitting probability distributions to engineering properties of rock masses using Legendre orthogonal polynomials[J]. Structural Safety, 2009, 31(4): 335 - 343.
- [5] 严春风, 刘东燕, 张建辉, 等. 岩土工程可靠度关于强度参数分布函数模型的敏感性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(1): 36 - 39. (YAN Chun-feng, LIU Dong-yan,

- ZHANG Jian-hui, et al. The susceptibility analysis of reliability for the probability distribution types of parameters in strength criterion[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, **18**(1): 36 - 39. (in Chinese))
- [6] 姜 彤, 马 莎, 李永新. 抗剪强度 c , φ 值概率分布对边坡可靠性分析的影响[J]. 华北水利水电学院学报, 2004, **25**(3): 46 - 49. (JIANG Tong, MA Sha, LI Yong-xin. The study of effect on the reliability of rock slope by different probability distribution of shear strength c , φ [J]. Journal of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 2004, **25**(3): 46 - 49. (in Chinese))
- [7] 罗 冲, 殷坤龙, 陈丽霞, 等. 万州区滑坡滑带土抗剪强度参数概率分布拟合及其优化[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, **24**(9): 1588 - 1593. (LUO Chong, YIN Kun-long, CHEN Li-xia, et al. Probability distribution fitting and optimization of shear strength parameters in sliding zone along horizontal-stratum landslides in Wanzhou city[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, **24**(9): 1588 - 1593. (in Chinese))
- [8] 张红琼. 重庆地区滑带土抗剪强度参数概率统计分析[J]. 灾害与防治工程, 2007(1): 62 - 67. (ZHANG Hong-qiong. Probability distribution statistics analysis of shear strength parameters in sliding zone along horizontal-stratum landslides in Chongqing city[J]. Disaster and Control Engineering, 2007(1): 62 - 67. (in Chinese))
- [9] 陈炜韬, 王玉锁, 王明年, 等. 黏土质隧道围岩抗剪强度参数的概率分布及优化实例[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, **25**(增刊 2): 3782 - 3787. (CHEN Wei-tao, WANG Yu-suo, WANG Ming-nian, et al. Probability distribution and optimizing example of shear strength parameters of surrounding rock in cohesive soil tunnel[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, **25**(S2): 3782 - 3787. (in Chinese))
- [10] 苏卫卫, 黄宏伟, 张 洁. 上海软粘土抗剪强度指标概率分布类型研究[J]. 地下空间与工程学报, 2012, **8**(增刊 2): 1695 - 1699. (SU Wei-wei, HUANG Hong-wei, ZHANG Jie. Risk analysis of the underground passage through rail transit construction scheme[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2012, **8**(S2): 1695 - 1699. (in Chinese))
- [11] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003. (CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003. (in Chinese))
- [12] 崔 洁, 江 权, 冯夏庭, 等. 岩石抗剪强度参数的理论概率分布形态研究[J]. 岩土力学, 2015, **36**(5): 1261 - 1274. (CUI Jie, JIANG Quan, FENG Xia-ting, et al. Theoretical probability distribution of shear strength parameters for rock[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(5): 1261 - 1274. (in Chinese))
- [13] HUANG C F. Principle of information diffusion[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, **91**: 69 - 90.
- [14] 王新洲. 基于信息扩散原理的估计理论、方法及其抗差性[J]. 武汉测绘科技大学学报, 1999, **24**(3): 240 - 244. (WANG Xin-zhou. The theory, method and robustness of the parameter estimation based on the principle of information spread[J]. Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1999, **24**(3): 240 - 244. (in Chinese))
- [15] 宫凤强, 李夕兵, 邓 建. 小样本岩土参数概率分布的正态信息扩散法推断[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, **25**(12): 2559 - 2564. (GONG Feng-qiang, LI Xi-bing, DENG Jian. Probability distribution of small samples of geotechnical parameters using normal information spread method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, **25**(12): 2559 - 2564. (in Chinese))
- [16] 宫凤强, 侯尚骞, 岩小明. 基于正态信息扩散原理的 Mohr-Coulomb 强度准则参数概率模型推断方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, **32**(11): 2225 - 2234. (GONG Feng-qiang, HOU Shang-qian, YAN Xiao-ming. Probability model deduction method of Mohr-Coulomb criteria parameters based on normal information diffusion principle[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, **32**(11): 2225 - 2234. (in Chinese))
- [17] GONG F Q, HUANG T L. Sample size effect on the probability distribution fitting accuracy of random variable by using normal diffusion estimation method-compared with normal distribution[C]// Proceedings of the 6th Asian-Pacific Symposium on Structural Reliability and its Applications. Shanghai: Tongji University Press, 2016: 199 - 204.
- [18] 李典庆, 唐小松, 周创兵. 基于 Copula 理论的岩土体参数不确定性表征与可靠度分析[M]. 北京: 科学出版社, 2014. (LI Dian-qing, TANG Xiao-song, ZHOU Chuang-bing. Uncertainty representation and reliability analysis of rock and soil parameters based on Copula theory[M]. Beijing: Science Press, 2014. (in Chinese))
- [19] 张 蕾, 唐小松, 李典庆基于 Copula 函数的土体抗剪强度参数二维分布模型[J]. 土木工程与管理学报, 2013, **30**(2): 11 - 17. (ZHANG Lei, TANG Xiao-song, LI Dian-qing. Bivariate distribution model of soil shear strength parameter using copula[J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2013, **30**(2): 11 - 17. (in Chinese))