

DOI: 10.11779/CJGE2016S2034

# 无限长土坡速度场或位移场函数分析研究

朱宝强<sup>1</sup>, 周成<sup>\*1, 2</sup>

(1. 四川大学水电学院岩土与地下工程系水力学与山区河流开发保护国家重点实验室, 四川 成都 610065;

2. 南京水利科学研究院水利部土石坝破坏机理与防控技术重点实验室, 江苏 南京 210024)

**摘要:** 利用速度场或位移场的近似函数解析土坡的渐进变形。首先提出了双折线和三折线的速度场函数, 并与现场实测的速度场分布图做了比较, 很好地拟合了剪切层和随动层的速度场分布, 进一步地考虑到坡土并不是严格意义上的刚性体而是变形体, 因此利用  $\Delta z$  厚土层的牛顿运动方程, 结合 Bingham 模型, 直接求解出速度场的时空分布函数  $v(z, t)$ , 并与现场土坡的实测资料对比。最后, 对上述两种分析方法进行了简单评述。

**关键词:** 土坡渐进变形; 流变; Bingham 模型; 非线性黏滞性; 速度场和位移场函数

中图分类号: TU432

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2016)S2-2010-06

**作者简介:** 朱宝强(1992-), 男, 河北保定人, 硕士研究生, 研究方向为环境岩土工程。E-mail: czhou@scu.edu.cn。

## Functions of velocity or displacement along infinite slope soil profiles

ZHU Bao-qiang<sup>1</sup>, ZHOU Cheng<sup>1, 2</sup>

(1. State Key Laboratory of Hydraulics and Mountain River Engineering, Dept. of Geotechnical and Underground Engineering, College of

Water Resource & Hydropower, Sichuan University, Chengdu 610065, China; 2. Key Lab of Failure Mechanism and Safety Control

Techniques of Earth Rock Dam of the Ministry of Water Resources, Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing, 210024, China)

**Abstract:** Functions of the velocity or displacement profiles of slope soil are suggested for describing the slow motion of natural slopes. Dual or triple piecewise empirical functions are suggested and compared with the field measured results respectively from the shear zone to the rigid zone. Owing to that the slope soil does not rigorously obey the assumption of rigid body, continuous rather piecewise functions of velocity and displacement for the whole soil slope are directly solved from the Newton's equation of motion formulated by Bingham model and compared with the measured results. In conclusion, the two methods for description of slow motion of soil slopes are discussed.

**Key words:** progressive deformation of soil slope; creep; Bingham model; nonlinear viscosity; function of velocity and displacement

## 0 引言

土坡在重力作用下由于土体的黏滞性作用一般会表现为渐进变形和缓慢蠕动, 例如很多土坡观测到的滑移速率从每年几毫米到每小时数百公里。有的土坡蠕动涉及到较厚的坡土层且时间漫长, 这类土坡的变形如果得不到及时的预测和预报, 极有可能造成突变式滑坡<sup>[1]</sup>。人们往往用刚塑性体假定和极限平衡理论来分析土坡的稳定性, 有的也用极限分析的方法来求解边坡的上下限解, 但却不能描述现场土坡有的算为失稳但还稳定或者算为稳定但测到滑移的现实情况。有限元、差分法、离散元等数值分析方法可以对边坡进行全面的计算, 但往往要涉及到复杂的建模和黏塑性本构模型的应用<sup>[2]</sup>。特别地, 对于坡土软化和剪切层问题导致的计算分叉等现象, 数值计算有时难以继

续进行或计算结果难以收敛。

许多人试图利用简化解析的方法来分析土坡的滑移<sup>[3]</sup>, 这就要用到诸如Bingham模型等黏塑性元件组合而成的经验性模型。特别地, 这些解析工作往往仅局限于有限的剪切层内, 而其上的坡土仍然被认为是刚体, 即坡土被分为沿着滑动面滑移的黏塑性滑移区及其上的刚性平移区或称随动区。在简化解析的过程中, 还需要把三维边坡问题简化成一维问题, 即土坡必须为无限长边坡; 为了形成剪切层, 还必须对坡土抗剪强度沿坡土厚度的分布做出合理的假定<sup>[4]</sup>。

基金项目: 国家自然科学基金项目(51579167); 水利部行业专项项目(201301022); 水利部土石坝破坏机理与防控技术重点实验室开放基金项目(YK913002)

收稿日期: 2016-05-19

\*通讯作者(E-mail: czhou@scu.edu.cn)

本文基于土坡速度场或位移场观测数据的分布特征, 先用双折线和三折线函数来拟合剪切层(变形体)和随动层(刚性体)的速度场分布, 并给出经验拟合系数的确定方法。鉴于坡土实际上是变形体, 进一步针对  $\Delta z$  厚的土层的牛顿运动方程, 结合 Bingham 模型, 利用运动方程求解出整个变形体坡土的速度场和位移场的时空分布连续函数  $v(z, t)$  和  $u(z, t)$ , 并利用几个边坡工程实测数据作了参数反演和预测对比分析。最后对土坡速度场和位移场分析方法作了简单评述。

## 1 分段函数拟合土坡的速度场分布

一般地, 土坡底部较硬土层因为  $\tau < \tau_f$  处于弹性状态而静止, 其上部的土层则会因为  $\tau > \tau_f$  而使土坡变形或滑移。对于无限长土坡, 把三维边坡问题简化成一维问题, 在硬土层及其上的土层之间的滑动面上建立横坐标轴, 垂直坡面向上的方向建立  $z$  坐标轴, 如图1所示。

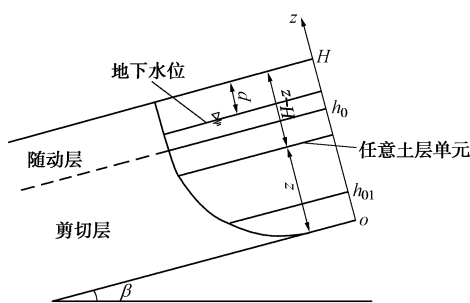


图1 土坡滑移变形模型

Fig. 1 Schematic of soil motion along slope

许多土坡在缓慢滑移过程中, 其实测速率都很小, 且变形主要集中在一个剪切层内 ( $0 < z \leq h_0$ ), 剪切层以上的坡土几乎随着剪切层的滑移而平移。针对这一观察, Angeli 等<sup>[3]</sup>对剪切层做了一个线性梯度速度场的假定, 据此进一步可积分出速度场函数  $v(z)$ :

$$v = \frac{v_0}{h_0} z \quad (0 < z \leq h_0), \quad (1a)$$

$$v = v_0 \quad (h_0 \leq z \leq H), \quad (1b)$$

式中,  $h_0$  为很薄的剪切层厚度,  $v_0$  表示  $z = h_0$  处坡土滑移速度。可以看出式(1)给出的速度场函数是  $v(z)$  而不是  $v(z, t)$ , 这就意味着对于每一时刻的观测速度分布曲线都必须进行拟合。但是当初 Angeli 等做出剪切层内线性梯度速度场的分布假定, 主要是为了简化求解牛顿运动方程, 但得到的速度场函数  $v(z, t) = \frac{z}{\eta}(\tau - \tau_f) - \frac{z}{\eta} \frac{\bar{\gamma} H}{g} \exp\left(\ln \frac{dv}{dt} - \frac{g}{\bar{\gamma} H} \frac{\eta}{z} t\right)$  明显是一个沿

坡土厚度非线性梯度分布的函数。其中,  $\tau_f = c' + [\bar{\gamma}(H - z) - \gamma_w(H - d - z)] \cos \beta \tan \varphi'$ ,  $\tau = \bar{\gamma}(H - z) \sin \beta$ ,  $H$  是坡土厚度,  $d$  是地下水位和坡面的距离,  $\bar{\gamma}$  是土体平均重度,  $c'$  和  $\varphi'$  是土体有效强度指标。另外, 如果考虑剪切层内黏滞性引起的非线性抗剪阻力  $\tau_\eta = (\eta v/z)^{1/m}$  而不是 Angeli 等假定的  $\tau_\eta = \eta v/z$ , 将导致更加非线性梯度的速度场。

再者, 如果剪切层厚度  $h_0$  很大, 式(1)的线性速度场函数  $v(z)$  将可能难以拟合实测的非线性速度场数据。可以进一步把较厚的剪切层  $h_0$  分为两部分 ( $0 < z \leq h_{01}$  和  $h_{01} < z \leq h_0$ ), 其上依然为随动层 ( $h_0 \leq z \leq H$ ), 如图1所示。对这两部分剪切层, 滑动面以上的一小段 ( $0 < z \leq h_{01}$ ) 仍然可以沿用 Angeli 等的线性梯度的速度分布假定, 第二部分较厚的剪切层 ( $h_{01} < z \leq h_0$ ) 则必须假定一个非线性的速度梯度分布函数  $\frac{dv}{dz} = m_1(z/h_{01})^{-m_2}$ , 以便拟合实测的速度场分布图, 进一步积分可以得到较厚剪切层的土坡的速度场分布函数为

$$v = \frac{v_{01}}{h_{01}} z = m_1 z \quad (0 < z \leq h_{01}), \quad (2a)$$

$$v = v_{01} + \frac{m_1 h_{01}}{1 - m_2} \left[ \left( \frac{z}{h_{01}} \right)^{1 - m_2} - 1 \right] \quad (h_{01} \leq z \leq h_0), \quad (2b)$$

$$v = v_0 \quad (h_0 \leq z \leq H), \quad (2c)$$

式中  $m_1$  和  $m_2$  是描述坡土速度梯度变化趋势的系数,  $v_{01}$  表示  $z = h_{01}$  处坡土滑移速度。可以看出, 上述两段或三段拟合速度场函数都必须首先测定剪切层的厚度, 需要对每个时刻  $t$  对应的每一条速度分布曲线给出拟合的系数, 另外, 所拟定的速度函数仅适用于剪切层而非整个土坡。实际上, 坡土并不是严格的刚体, 由于降雨导致的水位变化和土体强度变化以及土体的黏滞性作用, 整个土坡经常表现出渐进变形或蠕变的特征。因此下面介绍一种直接针对整个土坡厚度的速度场和位移场连续函数的分析方法。

## 2 连续函数分析土坡的速度场和位移场分布

在图1所示的坐标系中, 取一厚度为  $\Delta z$  的土层建立牛顿运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \tau - \left( \tau_f + \eta \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = - \frac{\bar{\gamma}}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (0 < z \leq H). \quad (3)$$

为了求解该运动方程, 需要建立如下的边界条件和初始条件:  $z = 0$ ,  $v(0, t) = 0$ ;  $z = H$ ,  $\frac{\partial v}{\partial z}(H, t) = 0$ ;  $t = 0$ ,  $v(z, 0) = 0$ 。

如果黏滞性参数  $\eta$  为常数, 即  $\eta = \eta_0$ , 则速度场和位移场函数的求解结果为

$$v(z,t) = \frac{16f\bar{\gamma}H^2}{\eta_0\pi^3} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \cdot \sin \frac{2m-1}{2H} \pi z \cdot \left[ 1 - \exp \left( -\frac{(2m-1)^2}{4H^2} \cdot \frac{\pi^2 g \eta_0 t}{\bar{\gamma}} \right) \right] \quad (0 < z \leq H), \quad (4a)$$

$$u(z,t) = \frac{16f\bar{\gamma}H^2}{\eta_0\pi^3} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \cdot \sin \frac{2m-1}{2H} \pi z \cdot \left\{ t - \frac{4\bar{\gamma}H^2}{(2m-1)^2 \pi^2 g \eta_0} \cdot \left[ 1 - \exp \left( -\frac{(2m-1)^2}{4H^2} \cdot \frac{\pi^2 g \eta_0 t}{\bar{\gamma}} \right) \right] \right\} \quad (0 < z \leq H), \quad (4b)$$

式中,  $f = \bar{\gamma}(\sin \beta - \cos \beta \tan \varphi') + \gamma_w \cos \beta \tan \varphi'$ 。

实际上, 坡土的黏滞性参数不可能为一个常数, Van Asch 等<sup>[5]</sup>从现场反分析得到的值要比实验室得到的值大 10 到 1000 倍。Montassar 等<sup>[6]</sup>收集到的数据范围也从 10 到  $10^7$  Pa·s 之间。这么大的取值范围使得不可能准确预测坡土的速度场和位移场。Jeong 等<sup>[7-8]</sup>针对饱和软土在不同剪切速率下测得的黏滞性参数具有强烈的非线性。观测发现, 越靠近坡面, 变形开始收敛而变小或速度梯度减小; 如果认为这是土层黏滞性影响的话, 则该参数值会越大。在此假定  $\eta = \eta_0 \left( \frac{z}{z_c} \right)^b$  来描述从坡底硬土层到坡面土层的非线性分布的黏滞性, 其中  $z_c$  仅为归一化常数,  $b$  为非线性黏滞性的拟合参数。由此得到新的速度场和位移场的函数为

$$v(z,t) = \frac{32(z_c)^b f H^{\frac{3-b}{2}}}{\eta_0} \sum_{m=1}^{\infty} J_{1-b} \left( \mu_m \sqrt{\frac{z}{H}} \right) \cdot \frac{z^{\frac{1-b}{2}} \cdot \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\eta_0 g \mu_m^2}{4\bar{\gamma} H (z_c)^b} t \right) \right]}{\left( \frac{\mu_m^2}{(1-b)^2} + 3 \right) \cdot \mu_m^3 \cdot J_{2-b}(\mu_m)} \quad (0 < z \leq H), \quad (5a)$$

$$u(z,t) = \frac{32(z_c)^b f H^{\frac{3-b}{2}}}{\eta_0} \sum_{m=1}^{\infty} J_{1-b} \left( \mu_m \sqrt{\frac{z}{H}} \right) \cdot \frac{z^{\frac{1-b}{2}} \cdot \left[ t + \frac{4\bar{\gamma} H (z_c)^b}{\eta_0 g \mu_m^2} \left( \exp \left( -\frac{\eta_0 g \mu_m^2}{4\bar{\gamma} H (z_c)^b} t \right) - 1 \right) \right]}{\left( \frac{\mu_m^2}{(1-b)^2} + 3 \right) \cdot \mu_m^3 \cdot J_{2-b}(\mu_m)} \quad (0 < z \leq H), \quad (5b)$$

式中,  $\mu_m$  可以由 Bessel 方程  $J_{-b}(x) = 0$  计算出, 进一步用于计算  $J_{2-b}(\mu_m)$  和  $J_{1-b} \left( \mu_m \sqrt{\frac{z}{H}} \right)$ 。

### 3 实例土坡的速度场和位移场计算与分析

选取了 3 个实例土坡<sup>[2, 4, 9-10]</sup>进行其速度场和位移场分布函数的计算, 并利用实测速度场或位移场分布曲线进行参数拟合、率定及对比分析。3 个实例土坡的相关计算的几何、物理和力学参数, 例如坡土厚度  $H$ 、坡角  $\beta$  以及观测到的剪切层厚度  $h_0$  等列于表 1, 其中坡土黏聚力都为 0; 分段函数的拟合系数列于表 2; 连续函数中所用的黏滞性参数  $\eta_0$  和参数  $b$  通过反演某一速度场分布曲线得到, 然后用于其它位移场分布曲线的预测和比较分析, 所反演的参数列于表 3。

表 1 土坡的几何、物理和力学参数

Table 1 Geometric, physical and mechanical parameters of slopes

土坡	$H/m$	$h_0/m$	$d/m$	$\beta/(^\circ)$	$\gamma/(kN \cdot m^{-3})$	$\varphi'/(^\circ)$
Caucasus	3.5	2.1	2.0	23	19.55	19
Springer Ranch	4.8	1.0	1.5	10	21.85	13
Villarbeney E1	17.0	5.0	2.0	14	21.85	22
Villarbeney E2	7.5	1.5	2.0	17	21.60	24

表 2 两段和三段函数的拟合系数

Table 2 Fitting coefficients of empirical functions

土坡	$\frac{v_0}{h_0}/(10^{-9} \cdot s^{-1})$	$m_1/(10^{-9} \cdot s^{-1})$	$m_2$
Caucasus	1.47	3.80	0.94
Springer Ranch	0.34	0.45	0.50
Villarbeney E1	0.26	0.41	0.43
Villarbeney E2	0.50	0.69	0.55

表 3 连续函数所用的非线性黏滞性参数

Table 3 Parameters for nonlinear viscosity

土坡	$\eta_0/(Pa \cdot s)$	$b$
Caucasus	$9.2 \times 10^{12}$	0.5
Springer Ranch	$3.0 \times 10^{13}$	0.6
Villarbeney E1	$3.1 \times 10^{13}$	0.7
Villarbeney E2	$4.4 \times 10^{13}$	0.7

计算和实测的 3 个实例土坡的速度场分布曲线示于图 2~4 中, 位移场分布曲线示于图 5 中, 相应的对比显示剪切层厚度的沿坡土厚度的剪应力和抗剪强度分布图示于图 6 中。

从图 2~6 可以看出, 当  $\tau > \tau_f$  时剪切层内坡土发生顺坡滑动或变形, 对于剪切层以上的大部分土体虽然  $\tau < \tau_f$ , 但实测与计算的速度和位移数值仍然逐渐增大且渐趋收敛于一常数值, 可以近似认为是刚性平移层或随动层。本文所建议的分段或连续函数都能很



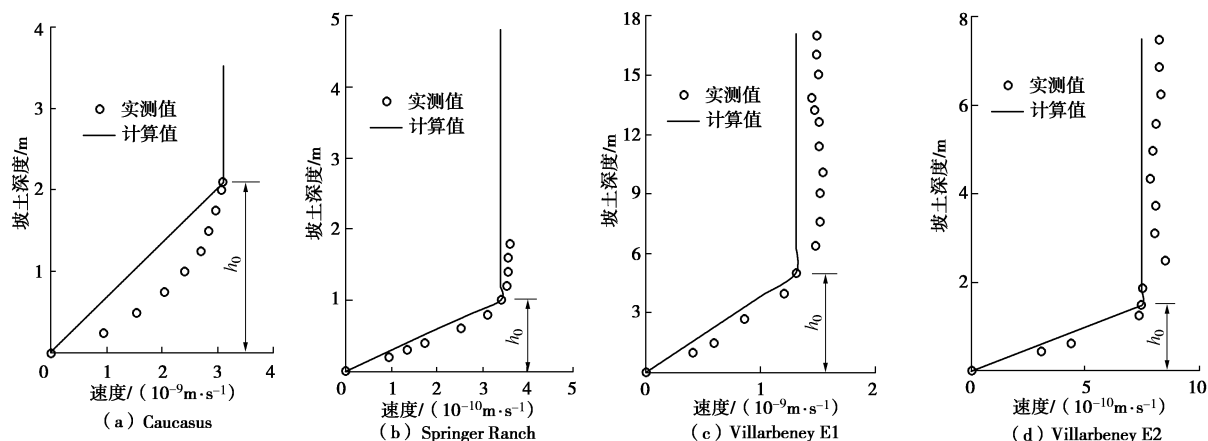


图 2 两段函数计算和实测的速度场分布曲线

Fig. 2 Calculated and measured velocity profiles using dual piecewise functions

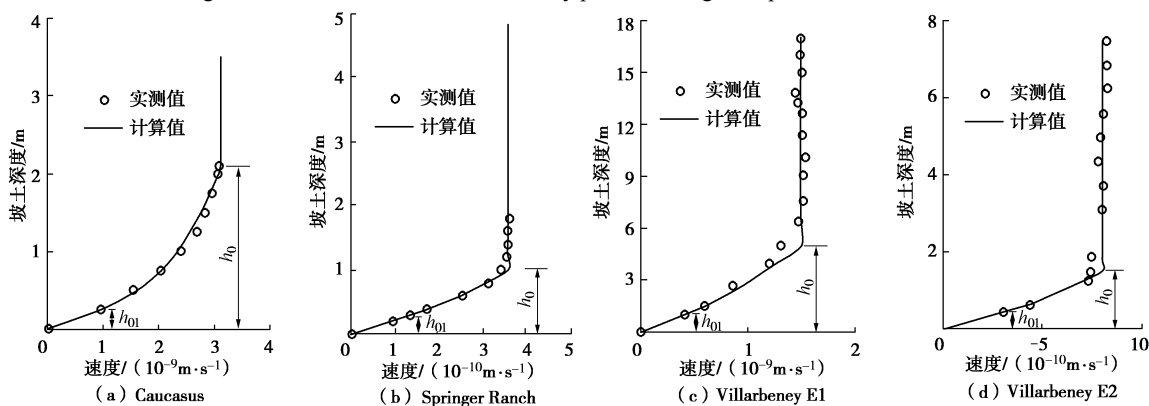


图 3 三段函数计算和实测的速度场分布曲线

Fig. 3 Calculated and measured velocity profiles using triple piecewise functions

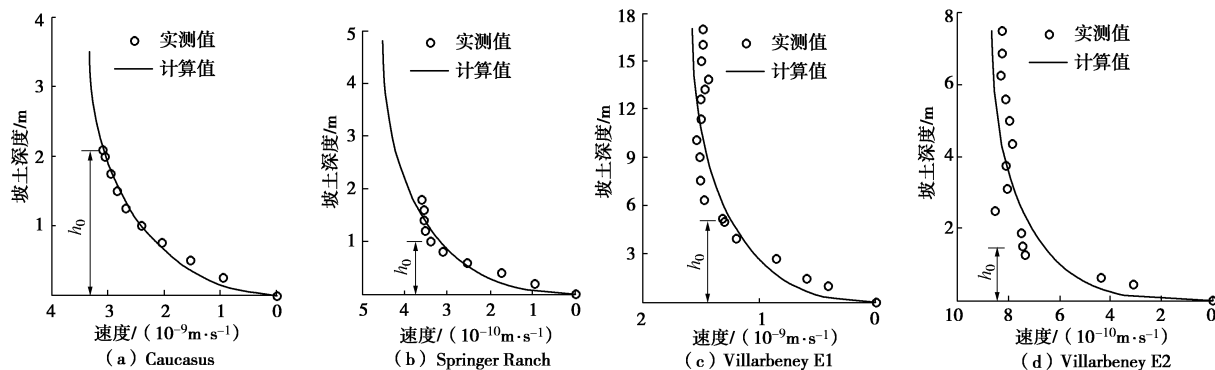


图 4 连续函数计算与实测的速度场分布曲线

Fig. 4 Calculated and measured velocity profiles using a continuous function

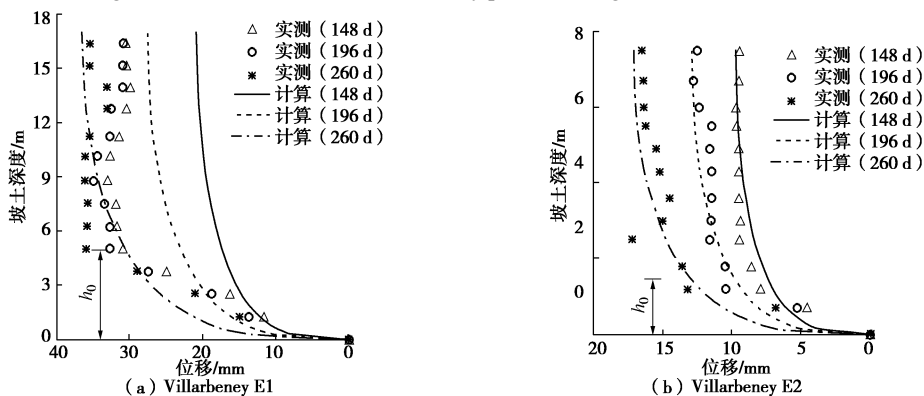


图 5 计算与实测的位移场分布曲线

Fig. 5 Calculated and measured displacement profiles using dual piecewise functions

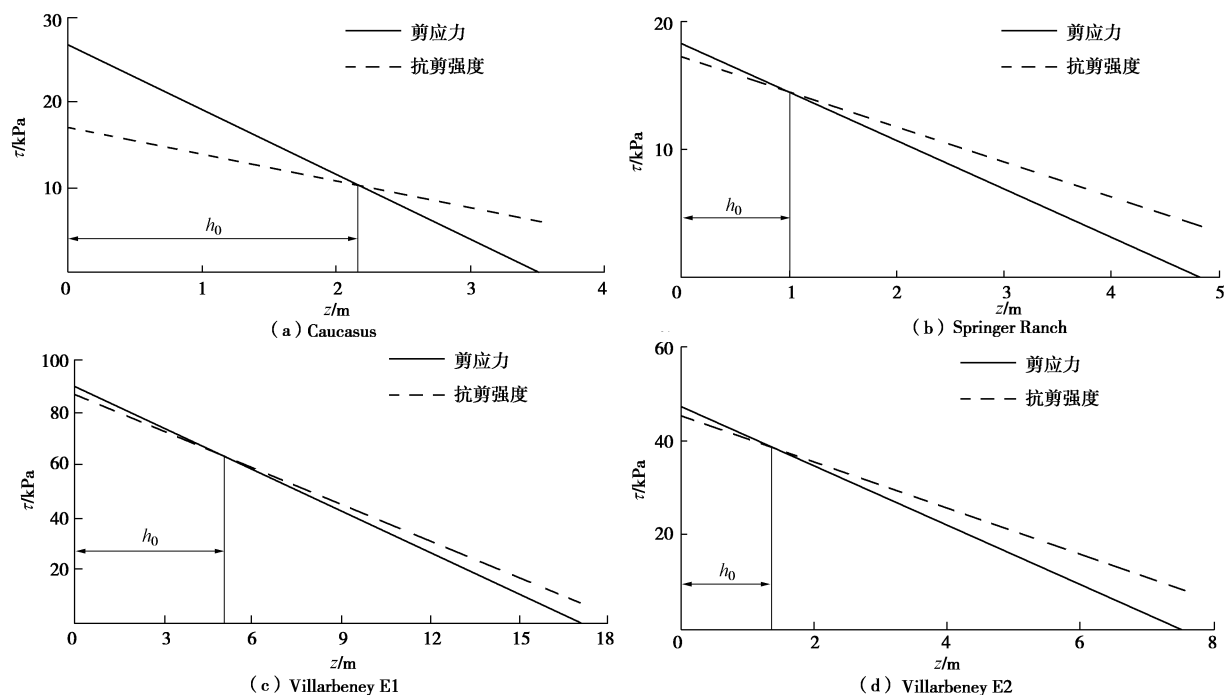


图6 剪应力与抗剪强度分布图

Fig. 6 Calculated shear strengths and stresses along depth of slope soils

好地拟合或模拟土坡沿厚度的速度场和位移场分布，且连续函数更为合理，虽然后者需要借助某一实测曲线来反演黏滞性参数。

## 4 结 论

本文介绍了两种描述土坡沿厚度分布的速度场和位移场函数的分析方法，并分别与3个实例土坡数据作了拟合和比较。

(1) 在第一种方法中，分段函数只能描述某一时刻的速度场分布，还必须假定土体是刚性体，因而是经验模型，具有随意性。在第二种方法中，坡土被视为变形体而非刚体，函数解直接从牛顿运动方程求得，并考虑了坡土的Bingham模型黏滞性参数的非线性分布特征。

(2) 在第一种方法中，剪切层、随动层必须通过人为预定来拟合。在第二种方法中，连续函数给出的速度场和位移场分布函数直接给出了关于速度场和位移场曲线的剪切层分布和近似线性的随动层分布。

(3) 两种方法的系数或参数都可以很容易地确定。在第一种方法中，各系数能直接从实测速度场分布图拟合而得，但系数 $m_2$ 的物理力学意义不是非常明确。在第二种方法中，模型参数的物理力学意义都非常明确，且大多可以从试验中直接获得，但由于坡土黏滞性参数的变异性很大，一般需从一条现场实测曲线中反演获得，然后把所得率定参数用于其他时刻速度场和位移场的比较分析中。

(4) 本文研究针对可以简化成一维问题的无限长土坡，所以提出的速度场和位移场函数主要适用于无限长土质边坡。在工程应用中，可以用来分析天然土坡的渐进滑移和缓慢蠕动。对于复杂边坡能否适用还有待进一步分析研究。

## 参考文献:

- [1] CASCINI L, CALVELLO M, GRIMALDI G M. Displacement trends of slow-moving landslides: classification and forecasting[J]. Journal of Mountain Science, 2014, **11**(3): 592 - 606.
- [2] DESAI C S, SAMTANI N C, VULLIET L. Constitutive modeling and analysis of creeping slopes[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1995, **121**(1): 43 - 56.
- [3] ANGELI M G, GASPARETTO P, MENOTTI R M, et al. A visco-plastic model for slope analysis applied to a mudslide in Cortina d'Ampezzo, Italy[J]. Quarterly Journal of Engineering Geology, 1996, **29**(3): 233 - 240.
- [4] CRISTESCU N D, CAZACU O, CRISTESCU C. A model for slow motion of natural slopes[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, **39**(4): 924 - 937.
- [5] VAN ASCH T W J, VAN BEEK L P H, BOGAARD T A. Problems in predicting the mobility of slow-moving landslides[J]. Engineering Geology, 2007, **91**(1): 46 - 55.
- [6] MONTASSAR S, DE BUHAN P. Numerical prediction of liquefied ground characteristics from back-analysis of lateral

- spreading centrifuge experiments[J]. Computers and Geotechnics, 2013, **52**(32): 7 – 15.
- [7] JEONG S W. Determining the viscosity and yield surface of marine sediments using modified Bingham models[J]. Geosciences Journal, 2013, **17**(3): 241 – 247.
- [8] JEONG S W, LEROUEIL S, AND LOCAT J. Applicability of power law for describing the rheology of soils of different origins and characteristics[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2009, **46**(9): 1011 – 1023.
- [9] SAVAGE W Z, CHLEBORAD A F. A model for creeping flow in landslides[J]. Bulletin of the Association of Engineering Geologists, 1982, **19**(4): 333 – 338.
- [10] SATMANI N C, DESAI C S, VULLIET L. An interface model to describe viscoplastic behavior[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1996, **20**(4): 231 – 252.

(责任编辑 孙振远)