

DOI: 10.11779/CJGE201612016

# 弧形地连墙侧位移计算的新方法

耿大新<sup>1</sup>, 余小强<sup>1, 2</sup>, 童立红<sup>1</sup>, 王海龙<sup>2</sup>

(1. 华东交通大学土木建筑学院, 江西 南昌 330013; 2. 南昌市政公用集团, 江西 南昌 330000)

**摘要:** 地下连续墙具有施工振动小、墙体刚度大、整体性好及施工速度快等优点, 因而被广泛应用于深基坑开挖围护结构工程中。弧形地连墙属于空间板架结构, 从经典薄壳理论着手, 推导出静力平衡微分方程, 提出了弧形地连墙侧位移计算的新方法。以南昌市红谷隧道东岸深基坑弧形地连墙为例, 利用此新方法计算其侧位移, 并与监测数据对比, 探讨该方法的可行性和计算精度问题。结果表明: 使用该方法来计算弧形地连墙的结果与监测结果在趋势上是一致的, 且数值上相差不大, 说明用这种方法来计算是可行的, 并且计算跨中位置的侧位移比端部位置的更吻合实测值。  
**关键词:** 弧形地连墙; 薄壳理论; 侧位移; 监测

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2016)12-2272-06

**作者简介:** 耿大新(1977-), 男, 博士, 副教授, 主要从事地基基础方面的教学和科研工作。E-mail: gengdaxin@ecjtu.jx.cn。

## New method for calculating lateral displacement of curved ground wall

GENG Da-xin<sup>1</sup>, YU Xiao-qiang<sup>1, 2</sup>, TONG Li-hong<sup>1</sup>, WANG Hai-long<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Nanchang Municipal Public Group, Nanchang 330000, China)

**Abstract:** Diaphragm wall has the advantages of small vibration, high stiffness, good integrity and fast construction speed, so it has been widely used in excavation retaining structures of deep foundation pit. Arc diaphragm wall belongs to space frame structures. Based on the classical shell theory, the differential equation of static equilibrium is deduced, and the new method for calculating the displacement of arc diaphragm wall is proposed. For the arc diaphragm wall of deep foundation pit at the east side of Nanchang Honggu tunnel, this new method is used to calculate its lateral displacement, and it is compared with the monitoring data. The feasibility and precision of the new method are investigated. The results show that the calculated values of the arc wall by this method has the same trend as the monitoring data, and the difference is just small. The proposed method is feasible, and the calculated results of the lateral displacement at the cross position is more consistent with the measured value.

**Key words:** curved ground wall; shell theory; lateral displacement; monitoring

## 0 引言

基坑工程的安全除了与正确地计算作用在支护结构上的荷载外, 还与基坑的平面形状有着极为密切的关系。类圆形平面结构基坑承载能力远优于矩形平面结构基坑, 矩形平面结构基坑长宽比越大, 其承载能力越差<sup>[1]</sup>。因此现很大部分基坑采用类圆形平面结构, 随之基坑的围护结构地连墙也采用弧形来代替矩形。但目前对弧形地连墙的侧位移计算还没有非常好的方法, 都是通过数值模拟及现场监测来得到。例如李妍蒙等<sup>[2]</sup>通过有限元软件模拟南京长江四桥南锚碇基础“∞”形超深地下连续墙模拟在施工各工况下的变形和受力情况, 初步得出该支护结构的受力变形特征, 并和实际监测结果进行对比分析, 得出该支护体系的受力和变形特征的一般规律。胡琦等<sup>[3]</sup>运用有限元软件对日本东京新丰洲变电所深基坑工程实测结果的反

分析, 确定了温度场对环形深基坑围护结构地下连续墙受力变形影响的分析方法, 获得了温度场变化引起的围护结构受力变形模式, 并将研究成果应用于上海世博变深基坑围护结构受力变形分析。罗耀武等<sup>[4]</sup>结合上海世博 500 kV 变电站超深基坑实际工程, 采用平面应变及轴对称弹性地基有限元分析模型对基坑围护结构的效应进行简化, 分析了环形基坑空间效应、内衬墙以及水土压力模式对围护结构受力变形特性的影响, 并与实测结果进行比较。

目前, 对圆柱壳结构进行的理论研究也主要是集中在基于薄壳理论(厚径比小于 1/20), 特别是管道力学特性的分析<sup>[5-9]</sup>。王鑫等<sup>[10]</sup>以土介质中的地铁隧道为

**基金项目:** 江西省科技落地计划项目(KJLD4036); 江西省重点实验室项目(2016BCD40010); 南昌市政公用集团科技基金项目  
**收稿日期:** 2016-02-02

研究背景, 利用考虑横向剪切变形的中厚圆柱壳理论建立了隧道结构的振动方程, 就隧道半径、壁厚、长度以及隧道埋深对隧道结构振动特性的影响进行了分析。朱合华等<sup>[11]</sup>从经典弹性力学基本原理出发, 利用壳体理论和温克尔假设建立曲线顶管与土体相互作用的三维力学模型, 以模拟曲线顶管在软土地层中的施工力学性能, 给出了曲线顶管纵向和法向位移的理论解, 并进而给出了结构的内力和地层抗力<sup>[11]</sup>。

本文从经典薄壳理论着手, 来分析弧形地连墙, 推导出静力平衡微分方程, 提出了弧形地连墙侧位移计算的新方法。并以坐落于南昌市在建的大型工程红谷隧道东岸临江深基坑弧形地连墙为例, 运用此方法计算地连墙侧位移。并且与现场监测数据对比分析, 从而对此方法准确性进行评价。同时供其他类似基坑工程参考。

## 1 理论推导

### 1.1 坐标系规定

对于弧形地连墙, 简化为圆柱壳。采用曲线坐标系,  $\alpha$  轴沿柱壳的母线方向,  $\beta$  轴沿柱壳的周向,  $\gamma$  轴沿柱壳的径向。如下图 1 所示。

### 1.2 静力平衡微分方程

根据经典壳体理论, 可以给出圆柱壳体中面应变与位移间的关系:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} = u', \\ \varepsilon_{\beta} &= \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} = v' + \frac{w}{R}, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \\ \chi_{\alpha} &= -\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}, \\ \chi_{\beta} &= -\frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2}, \\ \chi_{\alpha\beta} &= -\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $\delta$  为柱壳的厚度;  $R$  为中面主曲率半径;  $u, v, \omega$  分别为  $\alpha, \beta, \gamma$  方向的挠度;  $q_1, q_2, q_3$  分别为  $\alpha, \beta, \gamma$  方向的外力;  $E$  为弹性模量,  $\mu$  为泊松比;  $D=E\delta^3/[12(1-\mu^2)]$  为薄壳的弯曲刚度, 主曲率  $k_{\alpha}=1/R_{\alpha}$ 、 $k_{\beta}=1/R_{\beta}$ 。  $\chi_{\alpha}$  及  $\chi_{\beta}$  为中面内各点的主曲率  $k_{\alpha}$  及  $k_{\beta}$  的改变,  $\chi_{\alpha\beta}$  为中面内各点沿  $\alpha$  及  $\beta$  方向的扭率的改变。

应用弹性力学中胡克定律得到壳体任意一点应力与位移的关系表达式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \frac{E}{1-\mu^2} [(\varepsilon_{\alpha} + \mu\varepsilon_{\beta}) + (\chi_{\alpha} + \mu\chi_{\beta})\gamma], \\ \sigma_{\beta} &= \frac{E}{1-\mu^2} [(\varepsilon_{\beta} + \mu\varepsilon_{\alpha}) + (\chi_{\beta} + \mu\chi_{\alpha})\gamma], \\ \tau_{\beta\alpha} &= \tau_{\alpha\beta} = \frac{E}{2(1+\mu)} (\varepsilon_{\alpha\beta} + 2\chi_{\alpha\beta}\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

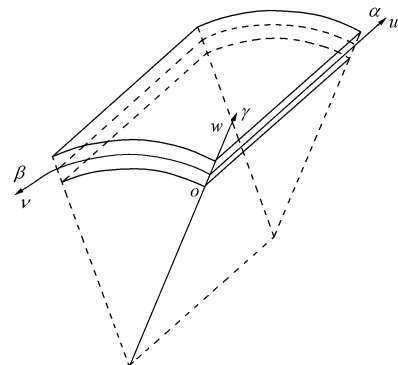


图 1 坐标系定义

Fig. 1 Definition of coordinate system

沿壳体径向进行积分, 壳体中面内力:

$$\left. \begin{aligned} F_{T\alpha} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) d\gamma, \\ F_{T\beta} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{\beta} d\gamma, \\ F_{T\alpha\beta} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) d\gamma, \\ F_{T\beta\alpha} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{\beta\alpha} d\gamma, \\ M_{\alpha} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) \gamma d\gamma, \\ M_{\alpha\beta} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) \gamma d\gamma, \\ M_{\beta\alpha} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{\beta\alpha} \gamma d\gamma, \\ M_{\beta} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{\beta} \gamma d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, 薄壳  $\frac{\gamma}{R} \ll 1$ , 所以  $1 + \frac{\gamma}{R} \approx 1$ 。

将式 (1)、(2) 代入式 (3) 中, 得到

$$\left. \begin{aligned} F_{T\alpha} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left(u' + \mu v' + \mu \frac{\omega}{R}\right), \\ F_{T\beta} &= \frac{E\delta}{1-\mu^2} \left(v' + \frac{\omega}{R} + \mu u'\right), \\ F_{T\alpha\beta} &= F_{T\beta\alpha} = \frac{E\delta}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right), \\ M_{\alpha} &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2}\right), \\ M_{\beta} &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}\right), \\ M_{\alpha\beta} &= M_{\beta\alpha} = -(1-\mu)D \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

建立壳体的内力与壳体所受荷载之间的关系,也就是导出壳体的平衡方程。为此,取壳体的任意一微元如图2所示。在图中,为简明起见,只画出这个微分体的中面,把薄膜内力和横向剪力画在一个图上(图2(a)),而把弯矩和扭矩(用双箭头的矩矢表示)画在另一个图上(图2(b))。图中的 $q_1, q_2, q_3$ 为每单位中面面积范围内的荷载,包括体力和面力在内。

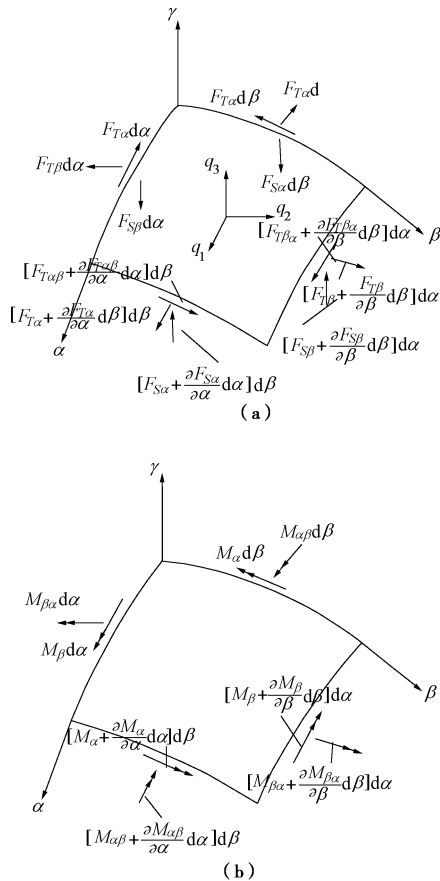


图2 壳体微元

Fig. 2 Infinitesimal element of shell

柱壳的平衡微分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{T\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + q_1 &= 0, \\ \frac{\partial F_{T\beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial F_{T\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{F_{S\beta}}{R} + q_2 &= 0, \\ -\frac{F_{T\beta}}{R} + \frac{\partial F_{S\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_{S\beta}}{\partial \beta} + q_3 &= 0, \\ \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\beta}}{\partial \beta} - F_{S\beta} &= 0, \\ \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial M_{\alpha}}{\partial \alpha} - F_{S\alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(5)第二式中的 $F_{S\beta}/R$ 一项,表示横向剪力 $F_{S\beta}$ 对环向平衡的影响。在柱壳中,这个影响通常是很小的,可以忽略不计。这样,柱壳的平衡微分方程可以

改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{T\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + q_1 &= 0, \\ \frac{\partial F_{T\beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial F_{T\alpha\beta}}{\partial \alpha} + q_2 &= 0, \\ -\frac{F_{T\beta}}{R} + \frac{\partial F_{S\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_{S\beta}}{\partial \beta} + q_3 &= 0, \\ F_{S\beta} &= \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\beta}}{\partial \beta}, \\ F_{S\alpha} &= \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial M_{\alpha}}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将式(4)中后三式代入式(6)中后二式,得到

$$\left. \begin{aligned} F_{S\beta} &= -D \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^2 \omega, \\ F_{S\alpha} &= -D \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 \omega. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$ 。最后,将式(4)、(7)代入

式(6)中的前三式,并注意 $D=E\delta^3/[12(1-\mu^2)]$ ,即得

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} &= -\frac{1-\mu^2}{E\delta} q_1, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) v + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} &= -\frac{1-\mu^2}{E\delta} q_2, \\ \frac{\omega}{R^2} + \frac{\delta^2}{12} \nabla^4 \omega + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= \frac{1-\mu^2}{E\delta} q_3. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(8)即为用中面位移表示的柱壳平衡微分方程。

当柱壳仅受法向荷载时,式(8)中 $q_1=q_2=0$ ,

即得这种问题的基本微分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} &= 0, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) v + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{\omega}{R^2} + \frac{\delta^2}{12} \nabla^4 \omega + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= \frac{1-\mu^2}{E\delta} q_3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

引用位移函数 $F=F(\alpha, \beta)$ ,把中面位移表示成为

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) F, \\ v &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (2+\mu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] F, \\ \omega &= R \nabla^4 F. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

则式(9)前两个方程总能满足,而第3个方程要

求

$$\nabla^8 F + \frac{E\delta}{R^2 D} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} = \frac{q_3}{RD} \quad (11)$$

再将式 (10) 代入式 (4)、(7), 即可将内力用位移函数  $F$  表示如下:

$$\left. \begin{aligned} F_{T\alpha} &= E\delta \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}, \quad F_{T\beta} = E\delta \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4}, \\ F_{T\alpha\beta} &= -E\delta \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^3 \partial \beta}, \\ M_\alpha &= -RD \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^4 F, \\ M_\beta &= -RD \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \nabla^4 F, \\ M_{\alpha\beta} &= -(1-\mu)RD \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \nabla^4 F, \\ F_{S\alpha} &= -RD \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^6 F, \quad F_{S\beta} = -RD \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^6 F. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

于是边界条件总可以用  $F$  表示。在边界条件下由微分方程 (11) 解出  $F$ , 即可用式 (10) 求得中面位移, 用式 (12) 求出内力。

## 2 工程运用

### 2.1 工程概况

南昌市在建工程红谷隧道为国内最大的沉管隧道, 其东岸临江深基坑体现出大、深等特点。围护结构采用钻孔桩与地下连续墙结合方式。其中 N1K2+710.000—N1K2+750.000 段地连墙为弧形地连墙, 基坑采用一道混凝土支撑。弧形地连墙空间位置示意图如图 3 所示, 弧形地连墙示意图如图 4 所示。

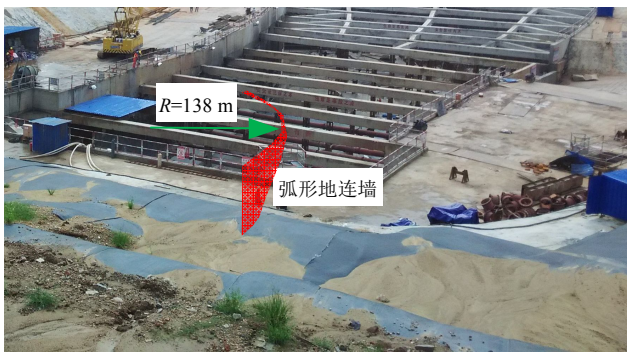


图 3 弧形地连墙空间位置示意图

Fig. 3 Spatial location of arc ground wall

基坑开挖深度为 16.6 m, 基坑开挖及计算分析所涉及的主要土层有 4 层, 自上而下具体分布情况如下:

- ①吹填砂, 3 m,  $\varphi=32^\circ$ ;
- ②粗砂, 3 m,  $\varphi=32^\circ$ ;
- ③中风化泥质粉砂岩, 14 m,  $c=100$  kPa,  $\varphi=35^\circ$ ;
- ④钙质泥岩, 30 m,  $c=100$  kPa,  $\varphi=35^\circ$  [12]。

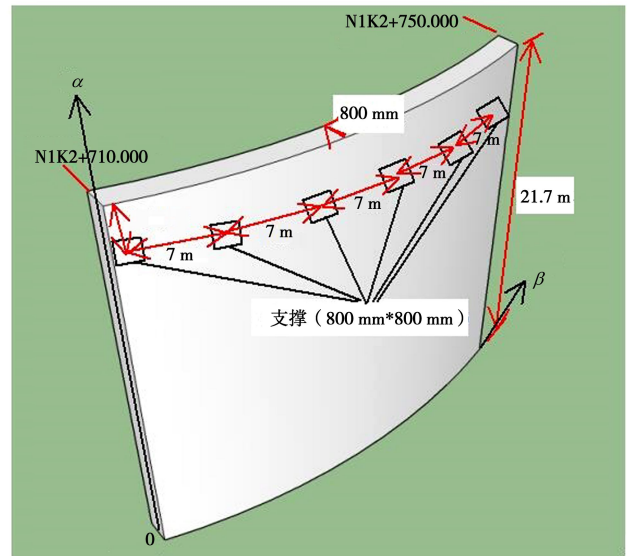


图 4 弧形地连墙示意图

Fig. 4 Arc ground wall

### 2.2 弧形地连墙侧位移计算

弧形地连墙只受径向荷载, 分别为土压力、支撑力。设弧形地连墙左右边界分别为  $\beta=0$ ,  $\beta=b$ , 上下边界分别为  $\alpha=f$ ,  $\alpha=0$ 。地连墙在  $\beta=0$  及  $\beta=b$  的边界上为简支, 在  $\alpha=f$  的边界上自由, 在  $\alpha=0$  的边界上固支。则边界条件如下:

$$\left. \begin{aligned} \left( u, v, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} &= 0, \\ \left( F_{T\alpha}, F_{T\alpha\beta} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R}, M_\alpha, F_{S\alpha} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right)_{\alpha=f} &= 0, \\ (F_{T\beta}, u, \omega, M_\beta)_{\beta=0} &= 0, \\ (F_{T\beta}, u, \omega, M_\beta)_{\beta=b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

把位移函数取为单三角级数如下

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(\alpha) \sin \frac{m\pi\beta}{b} \quad (14)$$

这样, 总可以满足地连墙两端的边界条件:

$$\begin{aligned} (F_{T\beta}, u, \omega, M_\beta)_{\beta=0} &= 0, \\ (F_{T\beta}, u, \omega, M_\beta)_{\beta=b} &= 0. \end{aligned}$$

法向荷载  $q_3$  包括侧土压力  $q_{31}$  和支撑力  $q_{32}$ , 其中根据静止土压力计算公式得  $q_{31} = k_0 \gamma (f - \alpha)$ , 其中  $k_0 = 1 - \sin 32^\circ = 0.47$ 。支撑力简化为线分布, 则  $q_{32} = P_0 \times \text{DiracDelta}(\alpha - f_0)$ ,  $P_0$  为等效后的线支撑力,  $f_0$  为支撑所在位置, DiracDelta 为狄拉克函数。

则式 (11) 可化为

$$\nabla^8 F + \frac{E\delta}{R^2 D} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} = \frac{q_{31}}{RD} \quad (15)$$

$$\nabla^8 F + \frac{E\delta}{R^2 D} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} = \frac{q_{32}}{RD} \quad (16)$$

将  $q_{31}$  和  $q_{32}$  展开为与式 (14) 右边相同的三角级



表 1 各参数的值

Table 1 Values of various parameters

高度 $f/m$	长度 $b/m$	标高 $f_0/m$	泊松比 $\mu$	半径 $R/m$	弹性模量 $E$ $/(N \cdot m^{-2})$	厚度 $\delta /m$	加权重度 $\gamma$ $/(N \cdot m^{-3})$	线荷载 $P_0$ $/(N \cdot m^{-1})$	支撑轴力 $F_N/N$
21.7	40	19.2	0.28	138	$30 \times 10^9$	0.8	$2 \times 10^4$	$1.15 \times 10^6$	$4.6 \times 10^7$

$$q_{31} = \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \int_0^b k_0 \gamma (f - \alpha) \sin \frac{m\pi\beta}{b} d\beta \right] \sin \frac{m\pi\beta}{b}, \quad (17)$$

$$q_{32} = \frac{2}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \int_0^b P_0 \times \text{DiracDelta}(\alpha - f_0) \cdot \sin \frac{m\pi\beta}{b} d\beta \right] \sin \frac{m\pi\beta}{b}.$$

$$\left. \begin{aligned} & m^2(29.5 - 3.07\alpha + 0.08\alpha^2) + m^3(-7.41 + 1.16\alpha - 0.06\alpha^2) \right\} \cdot \\ & \cos(m\pi) \text{HeavisideTheta}(-19.2 + \alpha) \Big\}.$$

将式 (17)、(18)、(14) 一并代入微分方程 (15)、(16)，比较方程两边的系数，即得下列两个  $\psi_m(\alpha)$  的八阶常微分方程：

$$\left[ \left( \frac{d^2}{d\alpha^2} - \lambda_m^2 \right)^4 + \frac{E\delta}{R^2 D} \lambda_m^4 \right] \psi_m(\alpha)$$

$$= \frac{2}{R D b} \int_0^b k_0 \gamma (f - \alpha) \sin \lambda_m \beta d\beta, \quad (19)$$

$$\left[ \left( \frac{d^2}{d\alpha^2} - \lambda_m^2 \right)^4 + \frac{E\delta}{R^2 D} \lambda_m^4 \right] \psi_m(\alpha)$$

$$= \frac{2}{R D b} \int_0^b P_0 \text{DiracDelta}(\alpha - f_0) \sin \lambda_m \beta d\beta. \quad (20)$$

式中， $\lambda_m = m\pi/b$ 。

2.3 方程求解

根据工程的实际情况，表达式中各参数的值如表 1 所示。表中  $\gamma$  为土层的重度加权平均值， $P_0 = F_N/b$ ， $F_N$  为总支撑轴力，将上表各参数值代入各表达式，利用 Mathematica 软件求式 (17)、(18) 的特解与通解。得到  $\psi_m(\alpha)$  的通解为  $C_1 \cdot e^{\frac{m\pi\alpha}{b}} + C_2 \cdot \alpha \cdot e^{\frac{m\pi\alpha}{b}} + C_3 \cdot \alpha^2 \cdot e^{\frac{m\pi\alpha}{b}} + C_4 \cdot \alpha^3 \cdot e^{\frac{m\pi\alpha}{b}} + C_5 \cdot e^{\frac{m\pi\alpha}{b}} + C_6 \cdot \alpha \cdot e^{\frac{m\pi\alpha}{b}} + C_7 \cdot \alpha^2 \cdot e^{\frac{m\pi\alpha}{b}} + C_8 \cdot \alpha^3 \cdot e^{\frac{m\pi\alpha}{b}}$ 。

通解中  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$  可通过边界条件求得。 $\psi_m(\alpha)$  的特解为

$$\frac{1}{m^9} e^{m(-1.51-0.08\alpha)} \left\{ e^{m(1.51+0.08\alpha)} [995.64 - 23.85m^5 - 21.56\alpha + \right.$$

$$(-995.64 + 21.56\alpha) \cos(m\pi)] + m \{ e^{m(3.02+0.04\alpha)} [-32.43 +$$

$$m(48.91 - 2.55\alpha) + m^2(-29.5 + 3.07\alpha - 0.08\alpha^2) +$$

$$m^3(7.41 - 1.16\alpha + 0.06\alpha^2) \} + e^{\frac{3m\pi\alpha}{40}} [32.43 + m(48.91 -$$

$$2.55\alpha) + m^2(29.5 - 3.07\alpha + 0.08\alpha^2) + m^3(7.41 - 1.16\alpha +$$

$$0.06\alpha^2) \} + \left\{ e^{\frac{3m\pi\alpha}{40}} [-32.43 + m(-48.91 + 2.55\alpha) +$$

$$m^2(-29.5 + 3.07\alpha - 0.08\alpha^2) + m^3(-7.41 + 1.16\alpha -$$

$$0.06\alpha^2) \} + e^{m(3.02+0.04\alpha)} [32.43 + m(-48.91 + 2.55\alpha) +$$

则将得到的  $\psi_m(\alpha)$  代入式 (14) 求得  $F(\alpha, \beta)$ 。

2.4 侧位移计算结果比较

将计算出来的  $F(\alpha, \beta)$  代入 (10) 得到侧位移  $w(\alpha, \beta)$ 。施工中对弧形地下连续墙进行监测，图 5 为监测点分布图。

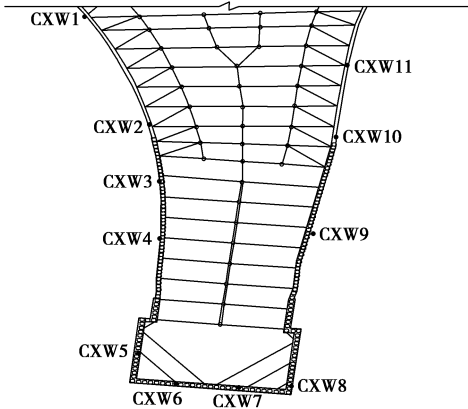
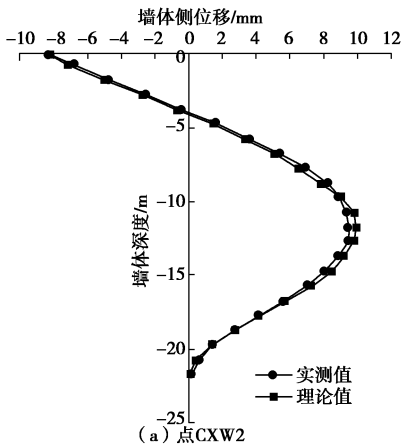


图 5 监测点分布图

Fig. 5 Distribution of monitoring points

取  $\beta=0, \beta=20$  的点，即对应于监测点 CXW3、CXW2。对比通过理论计算所求的值与监测的数据结果，如图 6 所示。

由上图 6 可知：①使用薄壳理论来计算弧形地连墙变形，其计算结果与监测值在趋势上是一致的。②计算结果上，跨中位置相差较小，理论值与实测值基本吻合，两者误差在 5% 以内，但支座处相差较大，这主要是由于边界效应引起的。



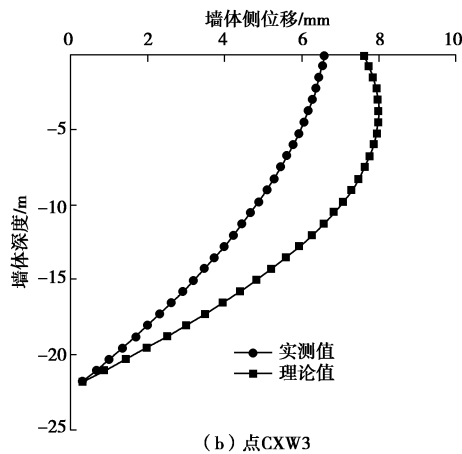


图 6 各点侧位移对比图

Fig. 6 Lateral displacement of each point comparison chart

### 3 结 论

以经典的薄壳理论为基础, 在曲线坐标系下推导出静力平衡方程, 引用傅里叶级数和狄利克雷函数化简方程, 最后使用 Mathematica 软件对方程求解, 得到以下 3 点结论。

(1) 使用经典薄壳理论来计算弧形地连墙的结果与监测结果在趋势上是一样的, 说明用这种方法来计算是可行的。

(2) 薄壳理论计算所得出的值与实测值在跨中位置相差较小, 理论值与实测值基本吻合, 两者误差在 5% 以内, 但端部相差较大, 所以使用这种方法计算端部位移时还需优化。

(3) 本文计算结果直观, 变形分析克服了有限元等数值法的烦琐, 可以作为基坑中的地下连续墙设计校核的理论依据。事实上, 本文所做工作是对数值分析的一个重要补充。然而这些理论上的探讨还是初步的, 有待进一步深入研究。

#### 参考文献:

- [1] 姜晨光, 贺 勇, 朱烨昕. 基坑形状与基坑稳定性关系的实测与分析[J]. 岩土工程技术, 2007(5): 246 - 249. (JIANG Chen-guang, HE Yong, ZHU Ye-xin. Relationship between the plane shape of foundation pit and its stability[J]. Geotechnical Engineering Technique, 2007(5): 246 - 249. (in Chinese))
- [2] 李妍蒙, 吕凤梧, 何超然, 等. “∞”型基坑地连墙支护结构受力特征分析与应用[J]. 结构工程师, 2010(6): 94 - 98. (LI Yan-meng, LU Feng-wu, HE Chao-ran, et al. Force feature analysis and application of a retaining structure of “∞” shape foundation pit[J]. Structural Engineers, 2010(6): 94 - 98. (in Chinese))
- [3] 胡 琦, 凌道盛, 程泽海, 等. 温度应力对环形地连墙围护结构受力变形的影响分析[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(11): 2139 - 2143. (HU Qi, LING Dao-sheng, CHENG Ze-hai, et al. Effects of temperature stress on diaphragm wall of circular deep foundation pit[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(11): 2139 - 2143. (in Chinese))
- [4] 罗耀武, 凌道盛, 陈云敏, 等. 环形超深基坑围护结构受力变形特性分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(2): 617 - 622. (LUO Yao-wu, LING Dao-sheng, CHEN Yun-min, et al. Mechanical and deformation characteristics of enclosure structure for annular extra-deep excavation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(2): 617 - 622. (in Chinese))
- [5] 张崇文, 陈 荣, 张社荣, 等. 沟埋式大型钢筋混凝土管与土相互作用动力性能的研究[J]. 岩土工程学报, 1991, 13(4): 24 - 32. (ZHANG Chong-wen, CHEN Rong, ZHANG She-rong, et al. Study on dynamic characteristics of the interaction between the soil and large reinforced concrete ditch conduit[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1991, 13(4): 24 - 32. (in Chinese))
- [6] FORREST J A, HUNT H E M. A three-dimensional tunnel model for calculation of train induced ground vibration[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 294: 678 - 705.
- [7] 刘敬喜. 黏弹性介质中充液圆柱壳的动态特性研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2005. (LIU Jing-xi. Dynamic characteristic analysis of fluid-filled cylindrical shells in viscoelastic medium[D]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology, 2005. (in Chinese))
- [8] ZHANG X M, LIU G R, LAM K Y. Coupled vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells using the wave propagation approach[J]. Applied Acoustics, 2001, 62(3): 229 - 243.
- [9] DATTA S K, SHAH A H, EI-AKILY N. Dynamic behavior of buried pipe in a seismic environment[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1982, 49: 141 - 148.
- [10] 王 鑫, 刘增荣. 基于中厚圆柱壳理论的地铁隧道结构振动特性分析[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(5): 762 - 768. (WANG Xin, LIU Zeng-rong. Vibration characteristics of metro tunnel structures based on theory of moderately thick cylindrical shells[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(5): 762 - 768. (in Chinese))
- [11] 朱合华, 吴江斌, 潘同燕. 曲线顶管的三维力学模型理论分析与应用[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(4): 492 - 495. (ZHU He-hua, WU Jiang-bin, PAN Tong-yan. Theoretical analysis of three-dimensional mechanical model of curved pipe jacking and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(4): 492 - 495. (in Chinese))
- [12] 江西省勘察设计研究院. 工程地质详细勘察报告[R]. 南昌: 江西省勘察设计研究院, 2013. (Survey and Design Institute of Jiangxi Province. Detailed engineering geological investigation report[R]. Nanchang: Survey and Design Institute of Jiangxi Province, 2013. (in Chinese))