

DOI: 10.11779/CJGE201612012

# 应力波入射黏弹性节理的传播特性研究

饶宇<sup>1,2</sup>, 赵根<sup>1</sup>, 吴新霞<sup>1</sup>, 夏元友<sup>2</sup>, 刘美山<sup>1</sup>

(1. 长江科学院水利部岩土力学与工程重点实验室, 湖北 武汉 430010; 2. 武汉理工大学, 湖北 武汉 430070)

**摘要:** 应力波传播特性的研究是进行工程动态稳定性评价的基础。依托柱状节理玄武岩开挖爆破试验, 考虑节理岩体的蠕变和应力松弛特性, 提出了黏弹性节理的等效标准线性固体模型, 采用“位移不连续理论”, 获得了应力波入射黏弹性节理的传播方程, 并探讨了应力波入射黏弹性节理的传播规律。透射系数随入射波频率的增大而减小, 而反射系数整体上呈现出随频率的增大而增大的趋势。在临界入射角内, 随入射角度增大, 转换波 ( $T_{sp}$ ,  $T_{ps}$ ,  $R_{sp}$  和  $R_{ps}$ ) 均先增大后减小且转换波的透射系数 ( $T_{sp}$  和  $T_{ps}$ ) 最小, 反射同类型波 ( $R_{ss}$  或  $R_{pp}$ ) 先减小后增大, 透射同类型波 ( $T_{ss}$  或  $T_{pp}$ ) 则基本没有变化; 应力波在节理处发生了复杂的能量转移, 随入射角度增大, 反射同类型波和反射转换波之间能量此消彼长并在某一角度附近几乎同时达到极值, 同类型波的部分能量转移到转换波, 但其能量仍远高于转换波。  
**关键词:** 黏弹性节理; 应力波传播; 等效标准线性固体模型; 透射系数; 反射系数

中图分类号: TU459.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2016)12-2237-09

**作者简介:** 饶宇(1990-), 男, 硕士, 主要从事岩土动力学等方面的科研工作。E-mail: raoyuray@163.com。

## Propagation characteristics of stress waves across viscoelastic joints

RAO Yu<sup>1,2</sup>, ZHAO Gen<sup>1</sup>, WU Xin-xia<sup>1</sup>, XIA Yuan-you<sup>2</sup>, LIU Mei-shan<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Geotechnical Mechanics and Engineering of Ministry of Water Resources, Yangtze River Scientific Research Institute, Wuhan 430010, China; 2. Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

**Abstract:** The study on the propagation characteristics of stress waves is crucial to estimate the dynamic stability of project construction. Based on the excavation blasting tests on the basalt rock mass with columnar joints and considering the creep and stress relaxation characteristics of rock, an equivalent standard linear solid model for rock mass joints is proposed. By using the displacement discontinuity method, the propagation equation for obliquely incident stress waves across viscoelastic joints is carried out. Then the propagation characteristics are studied. The reflection coefficient increases with the increase of the frequency of incident waves, but the transmission coefficient decreases rapidly. As the incident angle increases within the critical angle, the transmission coefficient of converted waves ( $T_{sp}$  or  $T_{ps}$ ) has the smallest value and increases at first then decreases, while the reflection coefficient of converted waves ( $R_{sp}$  or  $R_{ps}$ ), and  $R_{ss}$ ( $R_{pp}$ ) decreases at first then increases, but  $T_{ss}$ ( $T_{pp}$ ) basically has no change. Complex energy transfer happens when the stress waves cross the viscoelastic joints. The energy between  $R_{ss}$ ( $R_{pp}$ ) and  $R_{sp}$ ( $R_{ps}$ ) transfers to each other, then reaches their extreme points almost together when the incident angle is close to a certain value. The energy of the same kind of waves is been transferred to that of converted waves as the incident angle increases. But the same kind of waves have much more energy than the converted waves all the way.

**Key words:** viscoelastic joint; stress wave propagation; equivalent standard linear solid model; transmission coefficient; reflection coefficient

## 0 引言

天然的岩体与完整的岩块在物理力学性质上有很大的区别。究其原因, 在于岩体中充斥着为数众多的微裂隙、节理、甚至是层面、断层带。爆炸荷载与地震作用下产生的应力波在穿透上述不连续体时的传播规律是目前研究的难点和热点。研究应力波在结构面处的传播规律对边坡的动力稳定性具有积极意义。

应力波在介质面上的传播规律较早地为国内外学

者所注意。Li 等<sup>[1-3]</sup>基于动量守恒原理和位移不连续法, 得出了不同类型应力波跨平行节理的传播方程; Cai 等<sup>[4]</sup>基于位移不连续方法, 建立了应力波通过多条平行节理时的传播方程和透、反射系数解析解;

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51374163); 国家自然科学基金青年科学基金项目 (51309026)

收稿日期: 2015-10-22

\*通讯作者 (E-mail: xiayy1965@126.com)

Pyrak-Nolte 等<sup>[5-6]</sup>研究了裂隙性能对地震响应的影响; Zhao 等<sup>[7-8]</sup>、Zhao 等<sup>[9]</sup>研究了 P 波通过线性或非线性平行节理时的动态响应和传播规律。近年来, Zhu 等<sup>[10]</sup>基于位移不连续、应力不连续的假定, 获得了应力波入射充填介质黏弹性节理的传播规律; 彭府华等<sup>[11]</sup>、刘婷婷等<sup>[12-13]</sup>采用试验和数值模拟等手段研究岩体内应力波传播与衰减规律。

以往国内外的研究多基于以下两种方法: 位移不连续法 (DDM) 和有效模量法 (EMM), 这两种方法侧重于将节理作为线弹性、非线性弹性材料进行单纯的弹性分析, 考虑节理的黏性和应力松弛特性的研究较少。然而, Pyrak-Nolte 等<sup>[14]</sup>的研究认为自然界中的节理接触兼具弹性和黏性性质。近年来, 节理的黏弹性特性受到了研究者的重视<sup>[1, 10]</sup>。Zhu 等<sup>[10]</sup>指出, 位移不连续法适用于充填介质密度相较于岩石密度可忽略的节理, 而充填较厚的软弱介质如饱和黏土、砂土等可采用位移不连续和应力不连续的假定。

Maxwell 模型能较好地描述应力松弛现象但不适用于复杂的蠕变, Kelvin-Voigt 适用于蠕变但不能反映应力松弛行为<sup>[15]</sup>。因此, 对于节理岩体, 不仅具有近似弹性材料的完整岩块特性, 更为重要的是具有节理的黏弹性特征。所以, 无论是弹性模型, 还是传统的 Maxwell 模型和 Kelvin-Voigt 模型均有其局限性。本文考虑节理黏弹性特征, 建立等效标准线性固体模型, 分析应力波以任意角度倾斜入射黏弹性节理的传播规律。对影响应力波传播的诸因素, 如入射波频率以及入射角度等进行分析, 获得应力波在黏弹性节理处的传播特性。对应力波在诸如岩体这类不连续介质中的传播有更进一步的认识, 这在岩质边坡的动力响应和动态稳定性方面有较强的工程应用背景。

## 1 黏弹性节理等效标准线性固体模型

爆炸应力波在天然岩体中的传播, 表现出幅值衰减和振动相位的滞后, 这与标准线性固体的特征类似。一般说, 软弱节理是岩体内完整岩块向软弱体变化的过渡性岩体单元, 其性质受完整岩块和软弱体共同影响, 可看作由完整岩块和软弱体组成。对于应力波垂直穿过软弱体厚度忽略不计的软弱节理, 在节理切向, 可近似黏弹性软弱体与岩块并联, 在节理法向, 可近似黏弹性软弱体与岩块串联。于是本文采用图 1 所示的黏弹性节理岩体单元模型, 切向单元采用 Maxwell 模型并联一个弹簧, 法向单元采用 Kelvin-Voigt 模型串联一个弹簧组成, 即将线弹性岩块采用弹簧代替, 黏弹性软弱体采用 Maxwell 或 Kelvin-Voigt 模型代替, 建立如图 2 所示的节理等效标准线性固体模型。

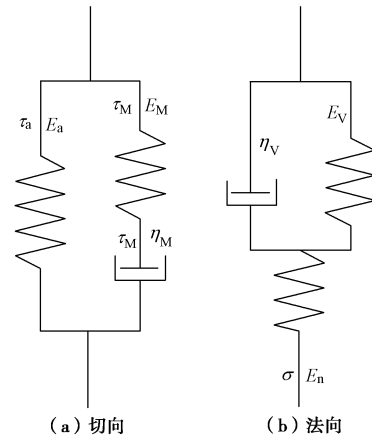


图 1 黏弹性节理岩体单元模型

Fig. 1 Viscoelastic unit model for jointed rock mass

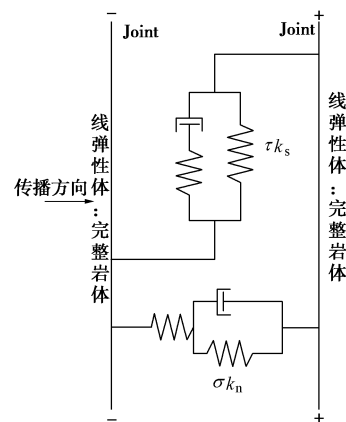


图 2 节理等效标准线性固体模型

Fig. 2 Equivalent standard linear solid model for joint

### 1.1 等效标准线性固体模型的本构方程

对于图 1 (a) 和图 1 (b), 应力 - 应变本构关系可分别为

$$E_M \tau + \eta_M \frac{\partial \tau}{\partial t} = E_M E_a \gamma + (E_M + E_a) \eta_M \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad (1)$$

$$(E_n + E_V) \sigma + \eta_V \frac{\partial \sigma}{\partial t} = E_n E_V \varepsilon + E_n \eta_V \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (2)$$

式中  $\tau$  为节理所受的切应力 ( $\tau = \tau_a + \tau_M$ ,  $\tau_a$  为完整岩块承担的切应力,  $\tau_M$  为软弱体承担的切应力);  $\gamma$  为切应变;  $\varepsilon$  为正应变;  $t$  为动荷载作用时间,  $E_a$  为岩块剪切模量;  $E_M$  为软弱体贡献的切向刚度系数;  $\eta_M$  为软弱体切向黏性系数。类似的, 在图 1 (b) 中,  $\sigma$  为节理 (岩块) 所受的正应力,  $E_n$  为岩块弹性模量,  $E_V$  为软弱体贡献的法向刚度系数,  $\eta_V$  为软弱体法向黏性系数。其中,  $E_M$ ,  $\eta_M$ ,  $E_V$ ,  $\eta_V$  主要与软弱夹层的物理力学特性、厚度等有关。  $k_n$ ,  $k_s$  为节理的综合法向刚度和切向刚度。

对于如图 1 所示的黏弹性材料模型, 其本构关系有微分型、积分型以及频域型等形式, 在大多数涉及到进行规律性振动的工程应用中, 采用频域下的本构

关系方程对黏弹性模型的动态力学特性进行研究更为方便。在频域内的应力、应变为时间  $t$  的正弦或余弦函数, 应力与应变之间存在一个  $\pi/2$  的相位差。图 1 所示的模型频域内的本构关系为

$$\sigma = E^* \varepsilon, \quad \tau = G^* \gamma, \quad (3)$$

$$E^* = E' + iE'' = (1 + i\beta_E)E', \quad (4)$$

$$G^* = G' + iG'' = (1 + i\beta_G)G'. \quad (5)$$

式中  $E^*$ ,  $G^*$  为黏弹性节理的复弹性模量和复剪切模量;  $E'$  ( $G'$ ) 为黏弹性模型的储能弹性 (剪切) 模量;  $E''$  ( $G''$ ) 为耗能弹性 (剪切) 模量;  $\beta_E$  ( $\beta_G$ ) 为耗损因子;  $i$  为虚数单位,  $\omega$  为动荷载角频率。其中,

$$E'(\omega) = \frac{(E_n + E_v)E_n E_v + E_n \eta_v^2 \omega^2}{(E_n + E_v)^2 + \eta_v^2 \omega^2}, \quad (6)$$

$$G'(\omega) = \frac{E_M^2 E_a + \eta_M^2 (E_M + E_a) \omega^2}{E_M^2 + \eta_M^2 \omega^2}, \quad (7)$$

$$E''(\omega) = \frac{E_n \eta_v \omega}{(E_n + E_v)^2 + \eta_v^2 \omega^2}, \quad (8)$$

$$G''(\omega) = \frac{E_M^2 \eta_M \omega}{E_M^2 + \eta_M^2 \omega^2}, \quad (9)$$

$$\beta_E(\omega) = \frac{E_n \eta_v \omega}{(E_n + E_v)E_n E_v + E_n \eta_v^2 \omega^2}, \quad (10)$$

$$\beta_G(\omega) = \frac{E_M^2 \eta_M \omega}{E_M^2 E_a + \eta_M^2 (E_M + E_a) \omega^2}. \quad (11)$$

## 1.2 等效标准线性固体模型的传播方程

### (1) 位移不连续法

对于无充填或充填介质薄而质轻的节理, 在节理面上位移不连续、应力连续的假定能获得较为符合工程实际的理论解析解。位移不连续法的应用可获得爆炸应力波 (P 波、S 波) 以任意角度入射线弹性岩体节理的透反射规律以及应力波的传播方程, 这在诸多的工程实例中得到了运用, 并且与现有的结论以及实测数据吻合良好。此外, 根据对应性原理, 通过对线弹性材料的弹性模量进行替换, 位移不连续法亦可以拓展到黏弹性材料<sup>[16]</sup>。其基本原理为“应力连续, 位移不连续”, 其方程形式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^+ &= \sigma^- = \sigma, \\ \tau^- &= \tau^+ = \tau, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} u_n^- - u_n^+ &= \frac{\sigma}{k_n}, \\ u_\tau^- - u_\tau^+ &= \frac{\tau}{k_s}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中  $u_n^-$ ,  $u_n^+$  和  $u_\tau^-$ ,  $u_\tau^+$  为节理“-”、“+”界面的法向位移和切向位移。 $k_n$ ,  $k_s$  在黏弹性材料中, 表示法向复刚度  $k_n^*$  和切向复刚度  $k_s^*$ , 其定义与复模量类似。复模量与复刚度之间存在如下关系:

$$\left. \begin{aligned} E^* &= q_{\text{ten}} \cdot k_n^*, \\ G^* &= q_{\text{tes}} \cdot k_s^*. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$q_{\text{ten}}$ ,  $q_{\text{tes}}$  为黏弹性节理法向和切向的形状因子, 整个节理相对于所取的黏弹性节理岩体单元体为无限大, 在整个节理界面可看做无数个黏弹性节理岩体单元体并联组成。因而对于某一个节理单元体, 其形状因子可近似为 1, 复模量与复刚度近似相等。

### (2) 等效标准线性固体模型的传播方程

由于本文所推导的黏弹性节理等效标准线性固体模型满足位移不连续法和波前动量守恒条件, 因此适用于文献[3]所提出的应力波传播迭代方程<sup>[3]</sup>:

$$\begin{bmatrix} v_{R_p(i)} \\ v_{R_s(i)} \end{bmatrix} = -B^{-1} \cdot A \cdot v_{I_p(i)} + B^{-1} \cdot C \cdot \begin{bmatrix} v_{T_p(i)} \\ v_{T_s(i)} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} v_{T_p(i+1)} \\ v_{T_s(i+1)} \end{bmatrix} = C^{-1} \cdot D \cdot v_{I_p(i)} + C^{-1} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} v_{R_p(i)} \\ v_{R_s(i)} \end{bmatrix} + C^{-1} \cdot (C + F) \cdot \begin{bmatrix} v_{T_p(i)} \\ v_{T_s(i)} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

对于本文的黏弹性节理等效标准线性固体模型, 式 (15)、(16) 中的各参数中的  $k_n = E^*$ ,  $k_s = G^*$ , 如下:

$$A = \begin{bmatrix} z_p \cos 2\beta \\ z_p \sin 2\beta \tan \beta c \tan \alpha \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$B = \begin{bmatrix} z_p \cos 2\beta & -z_s \sin 2\beta \\ -z_p \sin 2\beta \tan \beta c \tan \alpha & -z_s \cos 2\beta \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$C = \begin{bmatrix} z_p \cos 2\beta & z_s \sin 2\beta \\ z_p \sin 2\beta \tan \beta c \tan \alpha & -z_s \cos 2\beta \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$D = \begin{bmatrix} E^* \Delta t \cos \alpha \\ G^* \Delta t \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$E = \begin{bmatrix} -E^* \Delta t \cos \alpha & E^* \Delta t \sin \beta \\ G^* \Delta t \sin \alpha & G^* \Delta t \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$F = \begin{bmatrix} -E^* \Delta t \cos \alpha & -E^* \Delta t \sin \beta \\ -G^* \Delta t \sin \alpha & G^* \Delta t \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (22)$$

式 (15)、(16) 即为纵波穿越黏弹性节理等效标准线性固体模型的传播方程。对于剪切 S 波穿越黏弹性节理的等效标准线性固体模型传播方程只需要将式中的  $v_{I_p(i)}$  替换为  $v_{I_s(i)}$  即可, 其中, 系数  $A$ ,  $D$  变为

$$A = \begin{bmatrix} z_s \sin 2\beta \\ -z_s \cos 2\beta \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$D = \begin{bmatrix} E^* \Delta t \sin \beta \\ -G^* \Delta t \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (24)$$

式中  $\alpha$  为 P 波入射角 (反射角或折射角);  $\beta$  为反射 S 波入射角 (反射角或折射角);  $v_{I_p}$ ,  $v_{R_p}$ ,  $v_{T_p}$  为在节理界面 P 波的入射、反射、透射质点振动速度;

$v_{I_s}$ ,  $v_{R_s}$ ,  $v_{T_s}$  为节理面处入射 S 波、反射 S 波、透射 S 波质点振速; P 波和 S 波的波阻抗分别为  $z_p = \rho c_p$  和  $z_s = \rho c_s$ ,  $\rho$  为传播介质的密度,  $c_p$ ,  $c_s$  为相应介质中 S, P 波的传播速度;  $\Delta t$  为迭代时间步距;  $i$  为迭代步数。

## 2 透射系数与反射系数

### 2.1 能量法

对于透反射系数的计算, 常见的方法有速度法和能量法。其中能量法采用节理面处在单位周期内通过单位面积的透射波、反射波与入射波的能量比值来定义透射系数与反射系数。计算原理如下:

$$T_{kc} = \frac{E_{Tk}}{E_{Ic}}, \quad R_{kc} = \frac{E_{Rk}}{E_{Ic}}, \quad (25)$$

$$E_{Ic} = \int_{t_1}^{t_1+T} \sigma_{Ic} v_{Ic} dt = \rho c_c \int_{t_1}^{t_1+T} v_{Ic}^2 dt = \rho c_c \sum_0^{T/\Delta t} v_{Ic(i)}^2 \Delta t, \quad (26)$$

$$E_{Tk} = \int_{t_1}^{t_1+T} \sigma_{Tk} v_{Tk} dt = \rho c_k \sum_0^{T/\Delta t} v_{Tk(i)}^2 \Delta t, \quad (27)$$

$$E_{Rk} = \int_{t_1}^{t_1+T} \sigma_{Rk} v_{Rk} dt = \rho c_k \sum_0^{T/\Delta t} v_{Rk(i)}^2 \Delta t. \quad (28)$$

则透、反射系数可写为如下形式:

$$\left. \begin{aligned} T_{kc} &= \frac{c_k \sum_0^{T/\Delta t} v_{Tk(i)}^2 \Delta t}{c_c \sum_0^{T/\Delta t} v_{Ic(i)}^2 \Delta t}, \\ R_{kc} &= \frac{c_k \sum_0^{T/\Delta t} v_{Rk(i)}^2 \Delta t}{c_c \sum_0^{T/\Delta t} v_{Ic(i)}^2 \Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式中  $c=p, s$  为入射波类型,  $k=P, S$  为透、反射波类型;  $T_{kc}$ ,  $R_{kc}$  分别为透射系数和反射系数;  $\Delta t$  为迭代时间步长, 与式 (20) ~ (24), (24) 中的相同; 其余参数参见前文。

### 2.2 速度法

此外, 采用速度法来定义透、反射系数亦十分常见。由于存在信号的延时, 透、反射应力波达到峰值速度的时刻较入射波慢, 存在速度峰值的延时, 因而采用实时速度来定义透、反射系数时, 在 1/4 周期后的某一时刻将产生透、反射系数大于 1 的情况存在, 这是不容许的。所以, 速度法定义透、反射系数时, 采用一个周期内的速度峰值绝对值的比值来定义:

$$\left. \begin{aligned} T_{kc} &= \frac{\max |v_{Tk}|}{\max |v_{Ic}|}, \\ R_{kc} &= \frac{\max |v_{Rk}|}{\max |v_{Ic}|} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

### 2.3 误差分析

以上无论是能量法还是速度法, 其迭代精度均与

迭代时间步长  $\Delta t$  成负相关关系。在每次迭代计算中, 入射波速度均取为  $i\Delta t$  时刻的精确值, 透、反射波速度迭代由式 (15)、(16) 可知:

$$v_{Tk(i)} = \left[ T_{kc(i)} + \Phi_{Tk(i)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i) \right] v_{Ic(i)}, \quad (31)$$

$$v_{Rk(i)} = \left[ R_{kc(i)} + \Phi_{Rk(i)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i) \right] v_{Ic(i)}. \quad (32)$$

式中  $v_{Ic(i)}$ ,  $v_{Tk(i)}$ ,  $v_{Rk(i)}$  为  $i\Delta t$  时刻入射、透射、反射波速度, 其中,  $v_{Ic(i)}$  为精确值;  $T_{kc(i)}$ ,  $R_{kc(i)}$  为  $i\Delta t$  时刻透、反射系数真实值;  $\Phi_{Tk(i)}$ ,  $\Phi_{Rk(i)}$  为与  $\Delta t$  有关的透、反射波速度误差函数。

以正弦入射波为例, 对于速度法, 其误差为

$$\frac{\max |v_{Tk}|}{\max |v_{Ic}|} = \frac{|v_{Tk(j)}|}{A} = \left[ T_{kc(j)} + \Phi_{Tk(j)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^j) \right] \cdot \frac{A \cdot \sin(w \cdot j \cdot \Delta t)}{A} = T_{kc(j)} \cdot \sin(w \cdot j \cdot \Delta t) +$$

$$\Phi_{Tk(j)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^j) \cdot \sin(w \cdot j \cdot \Delta t), \quad (33)$$

$$T_{kc(\text{real})} = T_{kc(j)} \cdot \sin(w \cdot j \cdot \Delta t), \quad (34)$$

$$\Phi_{V_{Tkc}} = \Phi_{Tk(j)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^j) \cdot \sin(w \cdot j \cdot \Delta t). \quad (35)$$

式中  $v_{Tk(j)}$  对应着  $j \cdot \Delta t$  时刻透射波幅值达到峰值;  $A$  为入射波幅值;  $T_{kc(j)}$  为  $j \cdot \Delta t$  时刻真实的透射系数,  $T_{kc(\text{real})}$  为速度法定义的真实透射系数,  $\Phi_{V_{Tkc}}$  为速度法透射系数的误差。同理, 对反射系数进行分析, 亦可获得类似的结论, 如下:

$$R_{kc(\text{real})} = R_{kc(j)} \cdot \sin(w \cdot j \cdot \Delta t), \quad (36)$$

$$\Phi_{V_{Rkc}} = \Phi_{Rk(j)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^j) \cdot \sin(w \cdot j \cdot \Delta t), \quad (37)$$

式中, 各参数含义与上文类似,  $R_{kc(j)}$  为  $j \cdot \Delta t$  时刻真实的反射系数,  $R_{kc(\text{real})}$  表示速度法定义的真实透射系数,  $\Phi_{V_{Rkc}}$  为速度法反射系数的误差。

对于能量法, 其误差可表示为

$$\begin{aligned} \frac{E_{Tk}}{E_{Ic}} &= \frac{c_k \sum_0^{T/\Delta t} v_{Tk(i)}^2 \Delta t}{c_c \int_{t_1}^{t_1+T} v_{Ic}^2 dt} \\ &= \frac{c_k \Delta t \sum_0^{T/\Delta t} \left\{ \left[ T_{kc(i)} + \Phi_{Tk(i)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i) \right]^2 \right\}}{c_c A^2 / 2} \\ &= \frac{c_k \Delta t}{c_c / 2} \left[ \sum_0^{T/\Delta t} T_{kc(i)}^2 \sin^2(w \cdot i \cdot \Delta t) + \sum_0^{T/\Delta t} \Phi_{Tk(i)}^2(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i) \cdot \sin^2(w \cdot i \cdot \Delta t) + \sum_0^{T/\Delta t} 2 T_{kc(i)} \Phi_{Tk(i)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i) \cdot \sin^2(w \cdot i \cdot \Delta t) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

式中  $T_{kc(i)}$  为速度法定义的  $i\Delta t$  时刻的透射系数精确值。显然, 式 (38) 中,  $\Phi_{TK(i)}^2(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i)$

和  $T_{kc(i)}\Phi_{TK(i)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i)$  在  $\Delta t$  趋近于零时是比  $T_{kc(i)}^2$  高阶的无穷小。

$$ET_{kc(\text{real})} = \frac{c_k \Delta t}{c_c / 2} \cdot \sum_0^{T/\Delta t} \left[ T_{kc(i)}^2 \cdot \sin^2(w \cdot i \cdot \Delta t) \right], \quad (39)$$

$$\Phi_{ETkc} = \frac{c_k \Delta t}{c_c / 2} \left[ \sum_0^{T/\Delta t} \Phi_{TK(i)}^2(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i) \sin^2(wi\Delta t) + \sum_0^{T/\Delta t} 2T_{kc(i)}\Phi_{TK(i)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i) \sin^2(wi\Delta t) \right], \quad (40)$$

式中,  $ET_{kc(\text{real})}$  为能量法定义的真实透射系数,  $\Phi_{ETkc}$  为能量法定义透射系数的误差。当然, 对于反射系数亦有类似的结论。

$$ER_{kc(\text{real})} = \frac{c_k \Delta t}{c_c / 2} \cdot \sum_0^{T/\Delta t} \left[ R_{kc(i)}^2 \cdot \sin^2(w \cdot i \cdot \Delta t) \right], \quad (41)$$

$$\Phi_{ERkc} = \frac{c_k \Delta t}{c_c / 2} \left[ \sum_0^{T/\Delta t} \Phi_{Rk(i)}^2(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i) \sin^2(wi\Delta t) + \sum_0^{T/\Delta t} 2R_{kc(i)}\Phi_{Rk(i)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i) \sin^2(wi\Delta t) \right]. \quad (42)$$

以透射系数为例, 对速度法和能量法的误差进行比较, 式 (40) 的  $\sum [2T_{kc(i)}\Phi_{TK(i)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i) \sin^2(wi\Delta t)]$  一项中,  $\Phi_{TK(i)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i)$  是  $\Delta t$  的一阶无穷小,  $T_{kc(i)}$  和  $\sin^2(wi\Delta t)$  可视为常系数, 故在  $0 \sim T/\Delta t$  积分域内对  $2T_{kc(i)}\Phi_{TK(i)}(\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots, \Delta t^i) \sin^2(w \cdot i \cdot \Delta t)$  进行积分, 结果为常数项, 即  $\Phi_{ETkc}$  是  $\Delta t$  的一阶无穷小,  $\Phi_{VTKc}$  与  $\Phi_{ETkc}$  是同阶无穷小。

综上所述, 无论采用速度法还是能量法定义透反射系数, 数学原理上没有较为明显的优劣。即当迭代步长  $\Delta t$  趋于零时, 速度法和能量法采用数学迭代计算透、反射系数, 迭代精度均是足够的。但对于数值软件中采用迭代法,  $\Delta t$  往往设置较大, 此时能量法由于受  $\Delta t$  影响更大, 因而能量法迭代结果误差更大, 如图 4 (a)、4 (b) 所示。

### 3 实例分析与验证

#### 3.1 工程概况

白鹤滩水电站跨金沙江而建, 左岸坝肩槽位于四川省宁南县六城镇境内, 而右岸坝肩槽位于云南省巧家县大寨镇境内。白鹤滩水电站边坡开挖面广, 坡度陡, 高度大。左岸边坡岩体结构主要是在玄武岩岩流层中形成的层间、层内构造错动带以及断层构造裂隙。截至 2014 年底为止, 左岸涉及到柱状节理的已开挖梯段有第 17~24 梯段, 共 8 个梯段, 高程从 EL.680 m 到 EL.630 m, 高差 50 m。其中 EL.680 m~EL.670 m 为过渡性非柱状节理区域, EL.670~EL.660 m 为过渡性柱状节理区域, EL.660~EL.630 m 为柱状节理区域。

图 3 为白鹤滩水电站左岸典型的柱状节理玄武岩。



图 3 典型柱状节理玄武岩

Fig. 3 Typical basalt rock mass with columnar joints

研究柱状节理岩体坝肩槽边坡的爆破开挖, 节理对爆破应力波传播特性影响不容忽视。虽然柱状节理分布复杂, 研究应力波通过单一节理的传播规律是基础和必要的。根据现场前期地质调查, 玄武岩试验区岩体构造主要为柱状节理原生结构面以及由层间错动的构造改造作用形成的破碎带, 部分在地下水作用下形成较薄的软弱泥化夹层。通过对柱状节理现场取样进行室内试验, 确定黏弹性软弱夹层和岩块的物理力学特性参数取值如表 1、2 所示。爆破振动产生的应力波根据现场的振动测试, 其频率基本在 50 Hz 以内, 多处于 20 Hz 左右, 本文采用 50 Hz 作为应力波频率的基准值。软弱夹层试样相关参数见表 1。

表 1 软弱夹层物理力学参数

Table 1 Parameters of viscoelastic joints			
法向刚度	切向刚度	法向黏度 $\eta_v$	切向黏度 $\eta_M$
$E_v/\text{GPa}$	$E_M/\text{GPa}$	$/(\text{MPa} \cdot \text{s})$	$/(\text{MPa} \cdot \text{s})$
3.5	2.0	150	1.29

注: 以上黏度参数为旋转黏度计测定。

表 2 为玄武岩岩块试样的物理力学参数取值, 对于在弹性介质中传播的纵波和横波 (如图 2 所示), 完整岩块视为线弹性体, 相应的纵波和横波波速可由玄武岩物理力学参数求得, 如表 2 所示。

将岩块视为各向同性材料, 岩块泊松比与弹性模量  $E_n$  和剪切模量  $E_a$  之间存在如下关系:

$$\mu=\frac{E_n}{2\cdot E_a}-1 \quad (43)$$

根据式 (43) 可求得岩块的泊松比  $\mu=0.25$ , 此外, 各向同性材料可由下式求得

$$K=\frac{E_n}{3(1-2\mu)} \quad (44)$$

即得体积模量  $K=50.03\text{ GPa}$ 。考虑到试验条件与现场条件的差异, 室内试验岩体采用完整岩块, 而现场岩体多扩张裂隙及破碎带, 加之地下水对节理的侵蚀作用, 软弱夹层及岩体的强度参数均较室内试验获得强度参数低。结合现场声波测试数据, 对于前文提出的黏弹性节理等效标准线性固体模型, 其岩块和软弱夹层的强度参数按实验条件下所得的表 1, 2 的强度参数考虑 1/10 的折减系数进行折减, 而对于黏弹性节理两侧的线弹性岩块则无需折减。

表 2 岩块物理力学参数

Table 2 Parameters of rock mass				
密度	弹性模量	剪切模量	纵波波速	横波波速
$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$E_n/\text{GPa}$	$E_a/\text{GPa}$	速 $c_p/\text{m}$	速 $c_s/\text{m}$
2650	75.05	30.02	5830	3366

3.2 特例分析

(1) 临界角入射

根据弹性波动理论, 应力波在不连续界面处将发生波型分解, 并且满足 Snell 定律, 即在节理界面有

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}=\sqrt{\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}} \quad (45)$$

根据式 (45) 可知, P 波入射临界角为  $\alpha_c=90^\circ$ , 此时入射波的传播路径平行于节理, 将不会产生透射波和反射转换波。将岩块泊松比  $\mu=0.25$  代入式 (45) 可知: 对于 S 波入射, 临界角  $\beta_c=35.26^\circ$ , 根据文献 [17], 当  $\beta$  接近于  $\beta_c$  时, 除了同类型的透射波 ( $T_{ss}$ ), 同类型的反射波 ( $R_{ss}$ ) 的幅值迅速地衰减, 而反射转换波和透射转换波 ( $R_{sp}$  和  $R_{sp}$ ) 的幅值则迅速地增大, 转换为以体波 P 波速度且无延时地沿节理界面传播的首波, 首波的幅度较大, 不像面波 P 波, 首波只有水平方向的质点运动<sup>[10, 17-18]</sup>。

(2) 入射波频率为零

对于图 2 所示节理等效标准线性固体模型, 其切向和法向的模量为复模量, 如式 (4) ~ (11) 所示。因此, 黏弹性节理的刚度受入射波频率的影响, 当入射波频率为零时, 图 2 所示的节理等效标准线性固体模型中的黏壶相当于不存在而断开, 法向简化为弹簧  $E_n$  和  $E_v$  串联组成的弹性体, 切向简化为由弹簧元件  $E_a$  组成的弹性体。其法向和切向模量为

$$\left. \begin{aligned} E^* &= \frac{E_n E_v}{E_n + E_v} \\ G^* &= E_a \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

此时, 本文所提出来的黏弹性节理等效标准线性固体模型退化为传统的线弹性节理模型, 这在诸多文献中均有提及, 本文不再赘述。

(3) 入射波频率无穷大

入射波频率为无穷大时, 图 2 所示的节理等效标准线性固体模型中的黏壶不起作用, 法向简化为弹簧  $E_n$  组成的弹性体, 切向简化由弹簧元件  $E_a$ ,  $E_M$  并联组成的弹性体。其法向和切向模量为

$$\left. \begin{aligned} E^* &= E_n \\ G^* &= E_m + E_a \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

此时, 黏弹性节理等效标准线性固体模型亦退化为传统的线弹性节理模型。

(4) 岩块弹性 (剪切) 模量为零

本文提出的节理等效标准线性固体模型是由线弹性完整岩块与黏弹性软弱体组成的岩体单元, 考虑完整岩块的法向弹性模量  $E_n=0$ , 剪切模量  $E_a=0$ , 则黏弹性节理的法向和切向模量为

$$\left. \begin{aligned} E^* &= 0 \\ G^* &= \frac{\eta_M^2 E_M \omega^2}{E_M^2 + \eta_M^2 \omega^2} + \frac{\eta_M E_M^2 \omega}{E_M^2 + \eta_M^2 \omega^2} i \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

此时, 由于岩块弹性模量为零, 如同自由界面<sup>[3]</sup>, 应力波将不会传递到黏弹性节理而在岩块内部即发生全反射, 黏弹性节理等效标准线性固体模型在法向如同自由界面, 在切向退化为 Maxwell 模型。

(5) 岩块弹性 (剪切) 模量无穷大

当岩块与软弱体的弹性 (剪切) 模量相差很大时, 可视为岩块的弹性 (剪切) 模量无穷大, 黏弹性节理的法向和切向模量为

$$E^* = E_v + \eta_v \omega i \quad (G^* \rightarrow \infty) \quad (49)$$

此时, 黏弹性节理等效标准线性固体模型中岩块的存在对应力波的传播无影响, 黏弹性节理的切向等效为完整岩块, 法向则退化为 Kelvin-Voigt 模型。

3.3 应力波传播的影响因素分析

对于应力波在黏弹性节理处的传播, 受到黏弹性节理的性质及入射应力波特性等因素的影响。本文提出的黏弹性节理区别于传统的弹性节理的显著区别就是其刚度受到入射波角频率的影响, 此外, 亦受到岩块和软弱夹层的物理力学参数的影响。考虑到实际工程中的爆破开挖, 岩体和节理的参数相对稳定, 而爆破开挖产生的应力波频率成分复杂及入射节理角度的不确定性, 因此, 下文主要考虑单个稳定入射应力波的角频率以及入射角对应力波穿越黏弹性节理的传播

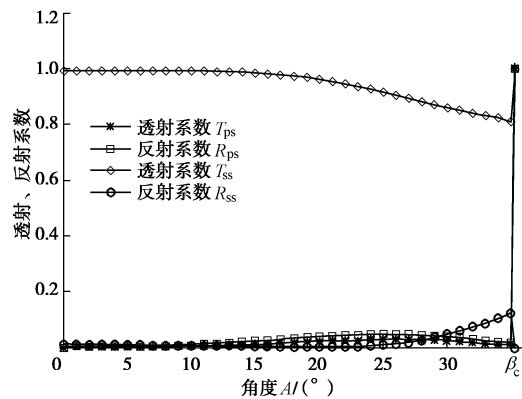


特性的影响。

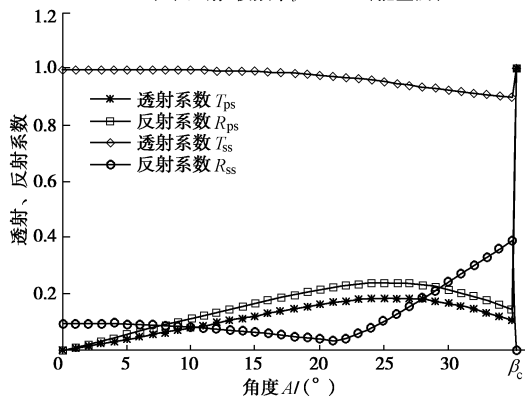
通过采用柱状节理玄武岩的工程实例进行分析, 并采用速度法和能量法进行对比, 获得一些较为有意义的研究成果。需要指出的是, 以下讨论的迭代法均以一个周期为例, 入射角度在临界角度以内, 即入射角  $\alpha \leq 90^\circ$ ,  $\beta \leq \beta_c$ , 其中,  $\alpha$  为 P 波入射角,  $\beta$  为 S 波入射角,  $\beta_c$  为 S 波入射临界角。

### (1) 入射角度的影响

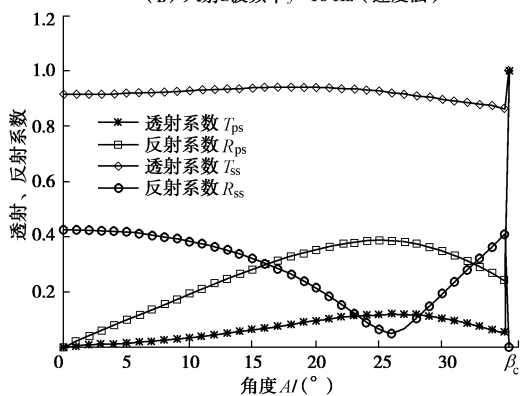
应力波入射角度对其在黏弹性节理处的传播有较大影响, 图 4 为 S 波和 P 波入射黏弹性节理的透射、反射系数与入射角的关系曲线。图 4 (a)、(b) 分别为入射 S 波频率为 10 Hz 时能量法和速度法定义的透反射系数与入射角度关系, 图 4 (c)、(d) 分别为入射波频率为 50 Hz 时, S 波和 P 波入射时速度法定义的透反射系数和入射角度的关系曲线。



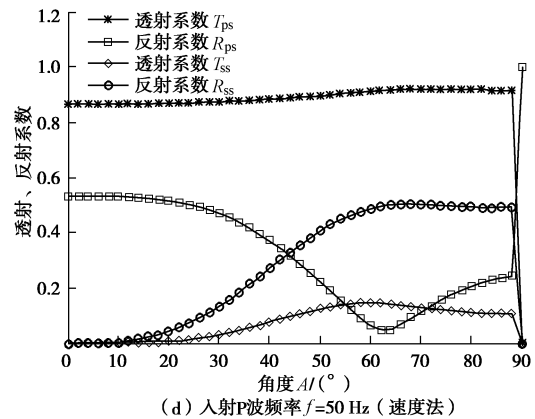
(a) 入射 S 波频率  $f=10$  Hz (能量法)



(b) 入射 S 波频率  $f=10$  Hz (速度法)



(c) 入射 S 波频率  $f=50$  Hz (速度法)



(d) 入射 P 波频率  $f=50$  Hz (速度法)

图 4 透、反射系数与入射角度关系

Fig. 4 Relationship among incident angle, transmission and reflection coefficients

由图 4 可知,  $T_{sp}$  和  $T_{ps}$  的值相较于其他透射、反射系数小得多, 并且随入射角度的增大先增大后减小 ( $T_{ps}$  在临界角处突变为首波); 反射系数  $R_{pp}$  和  $R_{ss}$  则随入射角度增大先减小后增大 ( $R_{ss}$  在临界角处消失), 而  $R_{sp}$  和  $R_{ps}$  随入射角度增大先增大后减小 ( $R_{ps}$  在临界角处突变为首波); 透射同类型波  $T_{pp}$  和  $T_{ss}$  在整个临界角度以内 ( $\alpha < 90^\circ$ ,  $\beta < \beta_c$ ) 基本没有变化, 直至临界角时才产生突变。

随入射角度的增大, 反射同类型波和反射转换波之间能量存在着“此消彼长”的趋势, 以入射 S 波为例, 随入射角度的增大,  $R_{ss}$  能量降低,  $R_{ps}$  能量增加, 在某一角度附近 ( $f=10$  Hz 时为  $21^\circ$ ,  $f=50$  Hz 时为  $26^\circ$ ), 二者几乎同时达到极值 ( $R_{ss}$  达到极小值,  $R_{ps}$  达到极大值), 之后,  $R_{ss}$  的能量增加,  $R_{ps}$  的能量则降低。随入射角度的变化, 透、反射波之间存在着复杂的能量转移, 同样的规律亦适用于 P 波。

在一定的角度范围内, 能量主要集中于同类型波上。以频率为 50 Hz 的入射 P 波为例, 在入射角  $\alpha \leq 20^\circ$  时, 能量主要集中于同类型的透射纵波和反射纵波上, 产生的转换横波能量很少, 直至  $\alpha=40^\circ$  左右反射横波幅值  $R_{sp}$  才超过反射纵波幅值  $R_{ps}$ 。随着入射角增大, 能量相应地转移到反射的横波和透射的横波上去。然而无论 P 波还是 S 波入射, 入射波能量主要集中在同类型波上, 产生的转换波强度的相对较小。

### (2) 入射波频率的影响

本文提出的黏弹性节理等效标准线性固体模型, 由于节理的应力与应变之间存在  $\pi/2$  的相位差, 所以引进了虚数单位  $i$ , 采用节理复模量参数, 因此节理的模量不光与岩石刚度、黏弹性体的黏度有关, 还受到入射波频率的影响, 同时, 频率也影响到入射波的特性, 所以入射波频率对透射、反射系数有较大影响。

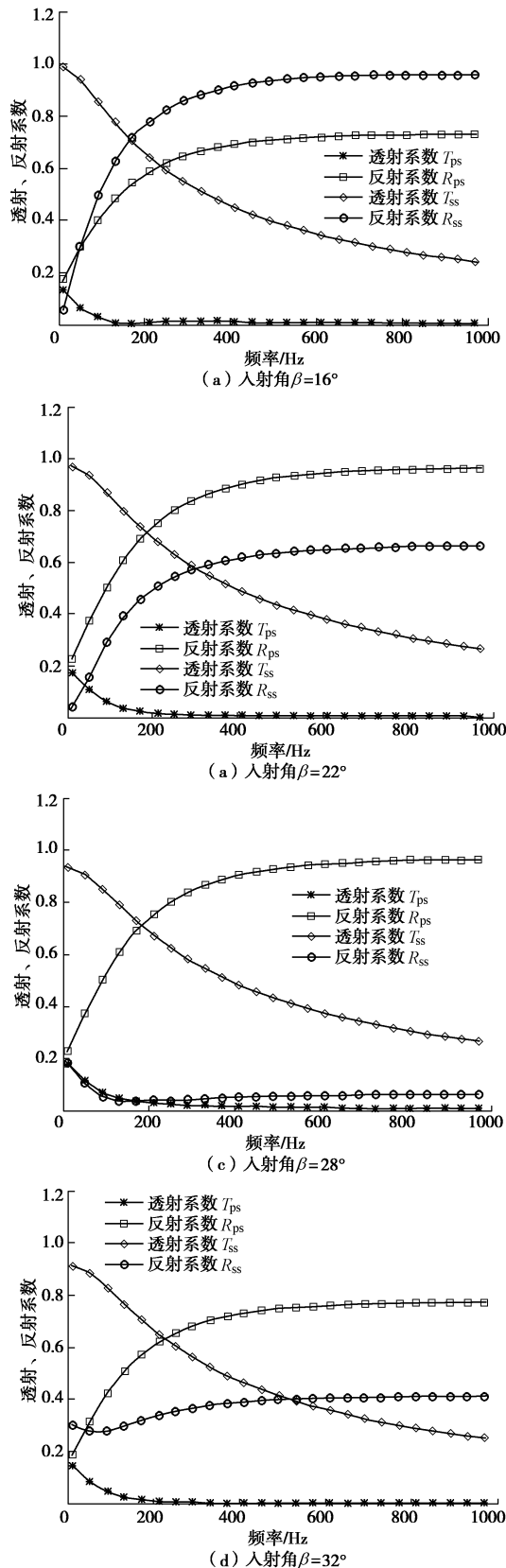


图5 S波入射透、反射系数与入射波频率关系(速度法)

Fig. 5 Relationship among frequency of incident S-wave, transmission and reflection coefficients

图5分别为S波入射角度分别为 $16^\circ$ ,  $22^\circ$ ,  $28^\circ$ ,  $32^\circ$ 时,速度法透射、反射系数与入射波频率的关系曲线。由图5可知,透射、反射系数随频率的

增大逐渐趋于稳定,反射波 $R_{ss}$ 和 $R_{ps}$ 整体上呈现出随频率的增大而增大,而透射波 $T_{ss}$ 和 $T_{ps}$ 则随频率的增大而减小。其中,在入射角较大时, $R_{ss}$ 在较小频率处出现极小值,即造成反射同类型波 $R_{ss}$ 呈先小幅度减小后增大的趋势,而透射转换波 $T_{ps}$ 则随入射波频率增大迅速减小,趋于零时有小幅震荡,高频波的透射系数接近于零。应力波穿越节理面时,高频应力波越容易被节理面反射,而低频应力波越容易被节理面透射,呈现出高频过滤效应。

## 4 结 论

本文基于黏弹性理论,建立频域内的节理等效标准线性固体模型;通过引入位移不连续理论,获得了不同类型应力波入射黏弹性节理时的传播方程和能量法与速度法定义的透反射系数在本文所得的迭代法中误差公式。针对本文所提出的应力波入射黏弹性节理的等效标准线性固体模型,以金沙江白鹤滩水电站柱状节理玄武岩为工程背景,探讨了应力波入射黏弹性节理的传播规律。

(1)透射转换波系数值相较于其他透射、反射系数小得多,并且随入射角度的增大先增大后减小;反射同类型波系数则随入射角度增大先减小后增大,而反射转换波系数随入射角度增大先增大后减小。透射同类型波系数基本没有变化,直至临界角时才产生突变。

(2)通过透反射系数的变化,能反映出透反射波中存在着复杂的能量转移。一方面随入射角度的增大,反射同类型波和反射转换波之间能量存在着“此消彼长”的趋势,随入射角度的增大,反射同类型波的能量先减小后增大,反射转换波的能量先增大后减小,在某一角度附近二者几乎同时达到极值;另一方面,在一定的角度范围内,能量主要集中于同类型波上,转换波能量很少,之后随着入射角增大,才有部分能量转移到转换波上去。但总体而言,无论是P波还是S波入射,在整个临界角以内入射波能量主要集中在同类型波上,转换波能量相对小得多。

(3)透、反射系数随频率的增大逐渐趋于稳定,反射波系数整体上呈现出随频率的增大而增大,透射波系数则随频率的增大而减小的趋势,其中,反射同类型波在较小频率处出现极小值,即造成反射同类型波呈先小幅度减小后增大的趋势,而透射转换波则随入射波频率增大迅速减小,以后,随着入射波频率增大有小幅震荡。入射应力波频率越高越容易被节理面反射,频率越低越容易被节理面透射,黏弹性节理呈现出高频滤波效应。

本文的研究主要从节理黏弹特性角度出发,采用



位移不连续理论研究应力波入射含“薄而质轻”的软弱夹层节理的传播特性, 其模型试验验证有待完善, 而应力波入射深厚夹层的理论研究值得进一步探索。

#### 参考文献:

- [1] LI J C, MA G W, ZHAO J. An equivalent viscoelastic model for rock mass with parallel joints[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* (1978–2012), 2010, **115**(B03305).
- [2] LI J C, MA G W, HUANG X. Analysis of wave propagation through a filled rock joint[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2010, **43**(6): 789 – 798.
- [3] LI J C, MA G W. Analysis of blast wave interaction with a rock joint[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2010, **43**(6): 777 – 787.
- [4] CAI J G, ZHAO J. Effects of multiple parallel fractures on apparent attenuation of stress waves in rock masses[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2000, **37**(4): 661 – 682.
- [5] PYRAK-NOLTE L J. Seismic response of fractures and the interrelations among fracture[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 1996, **33**(8): 787 – 802.
- [6] PYRAK-NOLTE L J, MORRIS J P. Single fractures under normal stress: The relation between fracture specific stiffness and fluid flow[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2000, **37**(1): 245 – 262.
- [7] ZHAO J, ZHAO X B, CAI J G. A further study of P-wave attenuation across parallel fractures with linear deformational behaviour[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2006, **43**(5): 776 – 788.
- [8] ZHAO J, CAI J G. Transmission of elastic P-waves across single fractures with a nonlinear normal deformational behavior[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2001, **34**(1): 3 – 22.
- [9] ZHAO X B, ZHAO J, CAI J G. P-wave transmission across fractures with nonlinear deformational behaviour[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2006, **30**: 1097 – 1112.
- [10] ZHU J B, PERINO A, ZHAO G F, et al. Seismic response of a single and a set of filled joints of viscoelastic deformational behaviour[J]. *Geophysical Journal International*, 2011, **186**(3): 1315 – 1330.
- [11] 彭府华, 李庶林, 程建勇, 等. 中尺度复杂岩体应力波传播特性的微震试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2014, **36**(2): 312 – 319. (PENG Fu-hua, LI Shu-lin, CHENG Jian-yong, et al. Experimental study on characteristics of stress wave propagation in mesoscale and complex rock mass by microseismic monitoring[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, **36**(2): 312 – 319. (in Chinese))
- [12] 刘婷婷, 李建春, 李海波, 等. 接触面积对波传播规律及节理力学特性影响[J]. *岩石力学与工程学报*, 2014, **33**(9): 1749 – 1755. (LIU Ting-ting, LI Jian-chun, LI Hai-bo, et al. Effects of contact area on stress wave propagation and joint mechanical properties[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, **33**(9): 1749 – 1755. (in Chinese))
- [13] 刘婷婷, 李建春, 李海波, 等. 非线性节理模型对应力波传播影响的数值分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2015, **34**(5): 953 – 959. (LIU Ting-ting, LI Jian-chun, LI Hai-bo, et al. Numerical analysis on effect of nonlinear joints on propagation of stress wave[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2015, **34**(5): 953 – 959. (in Chinese))
- [14] PYRAK-NOLTE L J, MYER L R, COOK N G W. Anisotropy in seismic velocities and amplitudes from multiple parallel fractures[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1990, **95**(B7): 11345 – 11358.
- [15] 王礼立. 应力波基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010: 148 – 165. (WANG Li-li. *Foundation of stress waves*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010: 148 – 165. (in Chinese))
- [16] 王 飞. 位移不连续法及其在岩体工程中的应用[D]. 上海: 上海交通大学, 2010. (WANG Fei. *Displacement discontinuity method and its application in rock engineering*[D]. Shanghai: Shanghai JiaoTong University, 2010. (in Chinese))
- [17] GU B, SUÁREZ-RIVERA R, NIHEI K T, et al. Incidence of plane waves upon a fracture[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1996, **101**(B11): 25337 – 25346.
- [18] GU B, NIHEI K T, MYER L R, et al. Fracture interface waves[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1996, **101**(B1): 827 – 835.