

DOI: 10.11779/CJGE201612010

三维横观各向同性层状地基任意点格林函数求解

韩泽军¹, 林 皋², 周小文¹

(1. 华南理工大学土木与交通学院, 广东 广州 510641; 2. 大连理工大学建设工程学部, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 提出了求解横观各向同性层状地基表面或内部任意点位移格林函数的混合数值算法。此算法利用 Fourier 变换将频率 - 空间域的波动方程转换到频率 - 波数域内的状态方程, 采用高精度的精细积分算法进行求解, 得到频率 - 波数域内的动力柔度矩阵, 最后利用 Fourier 逆变换得到频率 - 空间域内任意点的位移格林函数。提出的算法适用于任意横观各向同性层状地基, 对地基层数和单层的厚度均没有任何的限制。数值算例验证了算法的准确性, 并针对层状地基的各向异性特性进行了参数分析。

关键词: 横观各向同性; 层状地基; 格林函数; 精细积分; Fourier 变换

中图分类号: TU470

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2016)12 - 2218 - 08

作者简介: 韩泽军(1985 -), 师资博士后, 主要从事结构-复杂层状地基动力相互作用研究。E-mail: ctzjhan@scut.edu.cn。

Solution to Green's functions for arbitray points in 3D cross-anisotropic multi-layered soil

HAN Ze-jun¹, LIN Gao², ZHOU Xiao-wen¹

(1. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China; 2. Faculty of

Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A hybrid numerical method is proposed to evaluate the Green's functions for displacement of surface or internal arbitrary points in cross-anisotropic multi-layered soil. The wave motion equations in frequency-spatial domain are transformed into state equations in frequency-wavenumber domain using the Fourier transform. Then the dynamic flexibility matrix is obtained. Finally, the inverse Fourier transform is used to evaluate the Green's functions for displacement of arbitary points in frequency-spatial domain. The proposed algorithm is suitable for arbitrary cross-anisotropic multi-layered soil, and there are no limitations for the number and thickness of the layers. The accuracy of the proposed method is validated by numerical examples, and a parameter analysis for the anisotropy of multi-layered soil is presented.

Key words: cross-anisotropy; multi-layered soil; Green's function; precise integration method; Fourier transform

0 引 言

地基中格林函数的求解是分析结构-地基相互作用 (SSI) 问题的关键步骤, 是高层建筑、核电结构、桥梁以及大坝等抗震设计的重要内容。但对于层状地基, 由于计算比较复杂, 现在做法中主要假定地基为均质半无限空间或各向同性地基来寻求近似的地基动力响应的解, 而许多大型土木建筑及海洋工程建筑地基不仅沿深度呈现非均质特性, 而且存在水平与竖向的各向异性特性, 因此研究横观各向同性层状地基动力响应具有十分重要的意义, 而且是一个富有挑战性的问题。

Lamb^[1]较早研究了均质半无限地基在施加表面简谐荷载作用下的响应问题。随后, Mindlin^[2]、Apsel 等^[3]、Pak^[4]以及艾智勇等^[5]对于各向同性地基动力响应问题都给出了多种多样的分析方法。但大部分研究

都是针对各向同性均质半无限地基, 而实地测量和室内试验表明实际工程的地基本质属性都具有不同程度的各向异性, 尤其是水平向和竖直向之间的互异性, 例如横观各向同性属性, 其在静力和动力荷载情况下都会表现出与各向同性地基情况明显不同的响应。此外, 近代技术中各向异性材料的广泛应用, 研究其在各种荷载情况下的动力响应问题是有必要性的。Stoneley^[6]较早针对横观各向同性半无限地基进行了研究, 随后 Synge^[7]和 Buchwald^[8]得到了横观各向同性半无限地基在简谐荷载作用下的动力响应, 但是这些研究都是求解表面荷载作用下的响应, 对于地基内

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目 (51508203); 博士后科学基金项目 (2015M570713); 博士后科学基金特别项目 (2016T90783)

收稿日期: 2015 - 09 - 23

部的荷载不适用。Wang 等^[9]、Rajapakse 等^[10]得到了横观各向同性半无限地基在内部时间-简谐荷载作用下的格林函数,同时 Shodja 等^[11]得到了横观各向同性半无限地基在轴对称简谐荷载作用下 Substrate-coating 系统的动力响应,利用 Buchwald^[8]提出的 3 个势函数将横观各向同性半无限地基的运动方程解耦为一组对偶偏微分方程和一个独立的偏微分方程。Rahimian 等^[12]提出了一种新的高效的弹性动力方法求解横观各向同性半无限地基位移和应力场,应用这个方法,Khojasteh 等^[13]研究横观各向同性半无限地基在内部简谐荷载作用下的动力响应问题。

Seale 等^[14]求解得到了层状半无限空间在静力或者动力荷载作用下的响应问题,荷载可以在地基表面,也可以在地基内部,但此方法只能求解均质半无限空间、均质全空间或者均质单层地基情况。Yang 等^[15]研究了各向异性 BI 材料全空间的格林函数,指出时间-简谐荷载作用下的格林函数的求解非常复杂,并且只给出了稳态情况下移动荷载的解。Khojasteh 等^[16-17]最近给出了三维横观各向同性层状地基 BI 材料全空间和半空间的解,Barbosa 等^[18]提出了一种广义薄层法,用来求解层状横观各向同性半无限地基的格林函数。近年来,唐和生等^[19]从柱坐标系弹性力学基本方程出发,将位移场和应力场在径向进行 Hankel 变换,得出在轴对称荷载作用下横观各向同性半无限弹性空间的位移场,此后唐和生等^[20]利用薄层元素法得出横观各向同性层状地基在内、外部荷载作用下的位移格林函数,并在此基础上分析了各向同性及横观各向同性层状地基在不同荷载作用下沉降的差异。艾智勇等^[21-22]针对层状横观各向同性地基动力响应问题给出了非耦合解析层元法,其中刚度矩阵的元素采用负指数方法处理,避免了因正指数的存在而出现的计算溢出问题,提高了计算稳定性。

精细积分算法(PIM)是由 Zhong 等^[23]和 Gao 等^[24]提出的求解一阶线性常微分方程组的精确而高效的算法,在结构动力分析中获得了日益广泛的应用。此方法在求解动力方程的齐次方程时具有突出的优势,其精度可以认为是所使用计算机的求解精度,同时其数值计算有较强的稳定性,并具有较高的求解效率。之后 Gao 等^[25]利用精细积分算法求解各向异性层状地基内波的传播问题,取得了较高的精度,这为解决层状横观各向同性地基动力刚度问题的计算带来了新的希望。林皋等^[26]利用 PIM 求解刚度矩阵的元素,成功得到了各向同性层状地基的动力响应,并计算得到了明置基础的动力刚度矩阵。本文在此基础上将地基的各向同性特性进一步拓展为横观各向同性特性,求解

任意点的位移格林函数。针对横观各向同性层状地基水平和竖直向杨氏模量的不同比值进行求解,分析层状地基的各向异性对地基动力响应的影响,为工程实际提供必要的参考数据。

2 基本方程

2.1 计算域的转变

本文采用 Fourier 变换对波动方程进行空间域和波数域的变换,因此定义与位移和应力幅值相关的傅里叶变换对:

$$\Gamma(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Gamma}(x, y, z, \omega) e^{-i(\kappa_x x + \kappa_y y)} dx dy, \quad (1)$$
$$\tilde{\Gamma}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y)} d\kappa_x d\kappa_y. \quad (2)$$

式中 κ_x 和 κ_y 分别表示沿 x 轴和 y 轴的波数; ω 为频率。 $\tilde{\Gamma}(x, y, z, \omega)$ 和 $\Gamma(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega)$ 分别为频率-空间域和频率-波数域内的位移或应力幅值。

对于层状横观各向同性地基(如图 1 所示),假设其由 l 层具有不同材料属性的单层和底部半无限空间或刚性基岩组成。层状地基内任意点的位移、应力和应变向量分别表示为

$$\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_x \quad \tilde{u}_y \quad \tilde{u}_z]^T, \quad (3)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [\tilde{\sigma}_x \quad \tilde{\sigma}_y \quad \tilde{\sigma}_z \quad \tilde{\tau}_{xy} \quad \tilde{\tau}_{xz} \quad \tilde{\tau}_{yz}]^T, \quad (4)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\tilde{\varepsilon}_x \quad \tilde{\varepsilon}_y \quad \tilde{\varepsilon}_z \quad \tilde{\gamma}_{xy} \quad \tilde{\gamma}_{xz} \quad \tilde{\gamma}_{yz}]^T. \quad (5)$$

每一层的应力-应变关系为

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{其中 } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

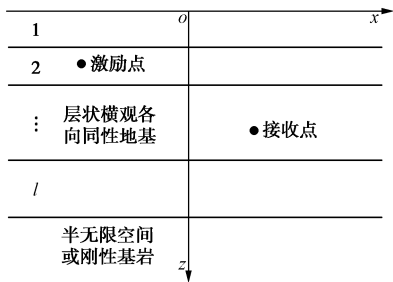


图 1 层状横观各向同性地基
Fig. 1 Cross-anisotropic multi-layered soil

弹性矩阵 \mathbf{D} 的元素可以由水平各向同性面的杨氏模量 E_H 、泊松比 ν_{HH} 和竖直向杨氏模量 E_V 、泊松

比 ν_{HV} 以及竖向压缩模量 G_{HV} 共 5 个材料参数求得, 计算关系为

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= D_{22} = \frac{E_H(E_V - E_H\nu_{HV}^2)}{(1 + \nu_{HH})(E_V(1 - \nu_{HV}) - 2E_H\nu_{HV}^2)}, \\ D_{12} &= D_{21} = \frac{E_H(E_V\nu_{HH} + E_H\nu_{HV}^2)}{(1 + \nu_{HH})(E_V(1 - \nu_{HV}) - 2E_H\nu_{HV}^2)}, \\ D_{13} &= D_{23} = D_{31} = D_{32} = \frac{E_H E_V \nu_{HV}}{E_V(1 - \nu_{HV}) - 2E_H\nu_{HV}^2}, \\ D_{33} &= \frac{E_V^2(1 - \nu_{HH})}{E_V(1 - \nu_{HV}) - 2E_H\nu_{HV}^2}, \\ D_{55} &= D_{66} = G_{HV}, \\ D_{44} &= (D_{11} - D_{12})/2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

对于地基位移 - 应变关系为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_x &= \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x}, \quad \tilde{\varepsilon}_y = \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y}, \quad \tilde{\varepsilon}_z = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z}, \\ \tilde{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial y}, \quad \tilde{\gamma}_{xz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial z}, \quad \tilde{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

三维线弹性波动方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

利用傅里叶变换(式(1))可以将横观各向同性地基控制方程(9)转化为频率 - 波数域内的位移控制方程:

$$\begin{aligned} D_{zz}u'' + i[\kappa_x(D_{xz} + D_{zx}) + \kappa_y(D_{yz} + D_{zy})]u' - \\ [\kappa_x^2 D_{xx} + \kappa_x \kappa_y (D_{xy} + D_{yx}) + \kappa_y^2 D_{yy}]u + \rho \omega^2 u = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

式中, u'' 和 u' 的上标点号分别为对竖向坐标 z 的二阶偏微分和一阶偏微分, ρ 为层状地基的材料密度。相应的系数矩阵 D_{ij} ($i, j = x, y, z$) 定义如下:

$$\left. \begin{aligned} D_{xx} &= \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix}, \quad D_{yy} = \begin{bmatrix} D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \\ D_{zz} &= \begin{bmatrix} D_{55} & 0 & 0 \\ 0 & D_{66} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}, \quad D_{xy} = D_{yx}^T = \begin{bmatrix} 0 & D_{12} & 0 \\ D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ D_{xz} &= D_{zx}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_{44} \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yz} = D_{zy}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \\ 0 & D_{32} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

为简便起见, 式(10)可以简写成如下形式:

$$K_{22}u'' + (K_{21} - K_{12})u' - (K_{11} - \rho \omega^2 I)u = 0, \quad (12)$$

式中, $K_{22} = D_{zz}$, $K_{21} = -K_{12}^T = i\kappa_x D_{xz} + i\kappa_y D_{yz}$, $K_{11} = \kappa_x^2 D_{xx} + \kappa_y^2 D_{yy} + \kappa_x \kappa_y (D_{xy} + D_{yx})$ 。

式(12)是二阶常微分方程, 不易直接求解, 此处引入位移 - 应力向量的关系式:

$$p = -(K_{22}u' + K_{21}u), \quad (13)$$

式中, u 是与应力向量 p 相对应分析问题的位移向量。

利用对偶变量 u 和 p 可以将基本方程(12)转换为状态方程的形式:

$$V' = HV, \quad (14)$$

式中, $V = [u \quad p]^T$, 并且

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \quad H_{11} = -K_{22}^{-1}K_{21}, \quad H_{12} = -K_{22}^{-1}, \quad H_{21} = -K_{11} + K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} + \rho \omega^2 I, \quad H_{22} = K_{12}K_{22}^{-1} \quad (15)$$

2.2 边界条件

层状地基表面的自由边界条件为

$$p_0(z=0) = 0. \quad (16)$$

对于多层地基, 相邻层的交界面处需满足位移和应力的连续条件, 即

$$u_k^+ = u_k^-, \quad p_k^+ = p_k^-, \quad (k=1, 2, \dots, l-1, l). \quad (17)$$

对于层状地基地部(第 $l+1$ 层)为刚性基岩的情况, 需要满足 l 层底部位移为 0 的边界条件:

$$u_l = 0. \quad (18)$$

而对于层状地基下卧半无限空间的情况, 需要考虑无限远处的辐射边界条件。首先求解均质半无限地基特征矩阵 H 的特征值问题

$$H\Phi = \Phi\Lambda, \quad (19)$$

式中, Λ 为特征值矩阵, Φ 为特征向量矩阵。二者写成分块矩阵的形式为

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_l & \\ & -\lambda_l \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

其中, λ_l 包含 3 个实部为正值的特征值。

引入下述变量

$$b = \Phi^{-1}V. \quad (21)$$

此时方程(14)可以写成如下形式:

$$\dot{b} = \Lambda b, \quad b(z) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_l z) \\ \exp(-\lambda_l z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

式中, c_1 和 c_2 为积分常数。向量 $b(z)$ 是一个 (6×1) 的列向量, 由式(22)可以看出, $b(z)$ 的分量表示向上或者向上传播的波。由于矩阵 Λ 和 Φ 已经按照式(20)的特定方式分块, $b(z)$ 的前 3 个分量表示向上传播的波, 而后 3 个分量表示向上传播的波。对于均质半无限地基, 因为没有向上传播的波, 位移向量 u 和应力向量 p 必须保证为有限值, 因此需要有 $c_1 = 0$ 。

将方程 (22) 代入方程 (21) 中可得

$$V = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \exp(\lambda_i z) \\ c_2 \exp(-\lambda_i z) \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

应用方程 (23) 可以得到半无限地基表面的边界条件为

$$p_l = K_\infty u_l, \quad (24)$$

式中, $K_\infty = \Phi_{22} \Phi_{12}^{-1}$ 。

2.3 状态方程的求解

选取层状地基任意层作为分析层, 其上下边界分别为 $[z_a, z_b]$, 设 u_a 和 p_a 分别为 z_a 端的位移和对偶应力向量, u_b 和 p_b 分别为 z_b 端的位移和对偶应力向量。基于一阶线性常微分方程 (14) 的解, 对于线性保守体系, 典型层的两端位移和应力向量存在以下关系^[25]:

$$u_b = M_F u_a - M_G p_b, \quad p_a = M_Q u_a + M_E p_b \quad (25)$$

其中系数矩阵 M_F , M_G , M_Q 和 M_E 为矩阵 H_{11} , H_{12} , H_{21} 和 H_{22} 的函数, 而矩阵 H 只与地基材料参数、频率和波数有关。

由式 (25) 可以看出, 一旦线性保守体系中的边值 u_a 和 p_b 确定, 则整个体系 $[z_a, z_b]$ 内的位移和应力便可全部求解得出。当地基厚度 $z_b - z_a$ 较大时不能直接求解得出系数矩阵, 但当地基厚度很小时, 可以利用 Taylor 级数进行求解。其具体求解方法可参见文献 [25], 本文只给出简单的计算过程。选取任意相同材料属性的地基层 $k(k=1, 2, \dots, l)$ 进行说明, 假设其厚度为 $h_k = z_k - z_{k-1}$, 首先将地基层 k 划分为 2^{N_1} (N_1 为任意正整数) 个相同厚度的子层, 则每个子层的厚度为 $\eta = h_k / 2^{N_1}$; 其次将每一个子层进一步划分为 2^{N_2} (N_2 也为任意正整数) 个微细薄层, 则每一个微细薄层的厚度为 $\tau = \eta / 2^{N_2}$ 。由此可见, 对于微细薄层, 其厚度 τ 非常的小, 所以与微细薄层对应的系数矩阵 $M_F(\tau)$, $M_G(\tau)$, $M_Q(\tau)$ 和 $M_E(\tau)$ 可由 Taylor 级数展开近似求解。首先对微细薄层进行 N_2 次的合并, 可以得到地基层子层的系数矩阵; 然后子层进行 N_1 次的合并, 可以得到地基层任意相同材料属性层的系数矩阵; 最后对地基的全部层进行 $l-1$ 次的合并, 可以得到整个层状地基体系的系数矩阵。对于微细薄层和子层的合并, 每合并一次, 微细薄层和子层的数量将减少一半, 由此可见, 尽管在求解过程中将地基分为若干的子层和微细薄层, 但需要合并的次数并不多, 并且运算过程中的矩阵均为 3×3 的数值矩阵, 所以整个计算过程的计算量很小, 求解效率比较高。

3 频率-波数域内动力柔度矩阵

为求解层状地基内部激励点和接收点体系在频率-波数域内的动力柔度矩阵, 整个体系由激励点和接收点所在的平面分为 3 部分 (如图 2 所示)。利用第 2

节的精细积分算法可以求解出任意保守体系内层状地基两端的位移和应力向量的关系式, 即式 (25), 现将其进行转化写成如下统一形式:

$$\begin{Bmatrix} p_a \\ -p_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix}, \quad (26)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} K_{aa} &= M_Q + M_E M_G^{-1} M_F, \\ K_{ab} &= -M_E M_G^{-1}, \\ K_{ba} &= -M_G^{-1} M_F, \\ K_{bb} &= M_G^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

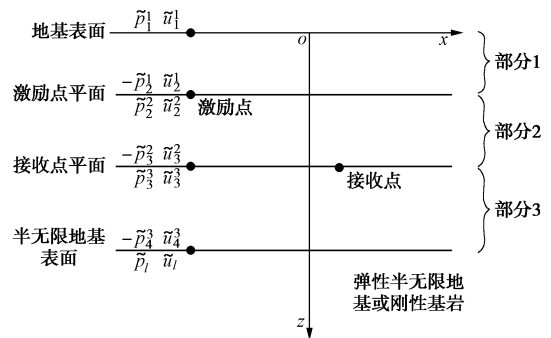


图 2 层状地基内部激励点与接收点体系

Fig. 2 The source and receiver system in multi-layered soil

将图 2 中的 3 部分分别利用式 (26) 可得各部分上下表面应力和位移之间的关系为

$$\begin{Bmatrix} p_1^1 \\ -p_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{部分 1}), \quad (28)$$

$$\begin{Bmatrix} p_2^2 \\ -p_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{部分 2}), \quad (29)$$

$$\begin{Bmatrix} p_3^3 \\ -p_4^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3^3 \\ u_4^3 \end{Bmatrix} \quad (\text{部分 3}). \quad (30)$$

式中, 上标分别表示对应部分 1、部分 2 和部分 3, 下标 1, 2, 3 和 4 分别表示地基表面、激励点平面、接收点平面和半无限地基表面的位移和应力向量。

对于整个层状地基体系, 平衡方程可以表示为

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & & \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & \\ & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ & & K_{21}^3 & K_{22}^3 + K_{\infty} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

或简写为

$$P = KU. \quad (32)$$

式中 $P = [P_1, P_2, P_3, P_4]^T$ 可看作为外荷载向量; $P_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为 i 平面的外荷载向量, 且 $P_1 = p_1$, $P_2 = -p_2^1 + p_2^2$, $P_3 = -p_3^2 + p_3^3$ 以及 $P_4 = -p_4^3 + p_4$; $U = [U_1, U_2, U_3, U_4]^T$ 为位移向量, $U_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是 i 平面的位移向量, 且 $U_1 = u_1$, $U_2 = u_2^1 = u_2^2$,

$U_3 = u_3^2 = u_3^3$ 以及 $U_4 = u_4 = u_l$; K 为层状地基体系频率-波数域内的动力刚度矩阵; K_∞ 为式 (24) 中的动力刚度矩阵。

对方程 (32) 中的 K 求逆, 可得位移向量为

$$U(\kappa, z, \omega) = F(\kappa, z, \omega) P(\kappa, z, \omega) \quad (33)$$

式中, $F(\kappa, z, \omega) = K^{-1}(\kappa, z, \omega)$ 表示频率-波数域内层状地基动力柔度矩阵。

4 层状地基格林函数的求解

利用第 3 节求解得出三维波动问题频率-波数域内激励点-接收点体系的动力柔度方程 (式 (33)), 其中 $F(\kappa, z, \omega)$ 的元素 $F_{ij}(\kappa, z, \omega)$ 表示在 j 层面上施加外部单位幅值激励作用下 i 点的位移幅值, 即

$$u_i(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) = F_{ij}(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) p_j(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (34)$$

式中, 变量 κ_x 和 κ_y 分别表示沿 x 和 y 的波数, 在柱坐标系下可以展现为如图 3 所示, 其中激励点置于 z 轴上, 相应的坐标系的转换矩阵为

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ z \end{Bmatrix} = R(\varphi) \begin{Bmatrix} \chi \\ \kappa \\ z \end{Bmatrix}, \quad R(\varphi) = \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

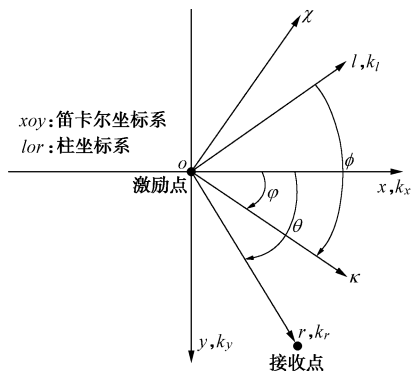


图 3 三个角度 φ , ϕ , θ 的定义

Fig. 3 Denifinition of three angles φ , ϕ and θ

对于横观各向同性地基, 可以令 $\kappa_x = 0$ 和 $\kappa_y = \kappa$ 将双重 Fourier 变换转化为一维 Fourier 变换积分, 极大的降低了数值求解的计算量^[27], 此时柱坐标系下动力柔度矩阵与直角坐标系下动力柔度矩阵的关系为

$$F_{ij}(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) = R(\varphi) F_{ij}(0, \kappa, z, \omega) R(\varphi)^T \quad (36)$$

波数 (κ_x, κ_y) 和 (χ, κ) 之间的转换可以应用笛卡尔坐标系和柱坐标系之间的转换

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = R(\theta) \begin{Bmatrix} l \\ r \\ z \end{Bmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

相应的不同坐标系内的位移和荷载向量转换可以写成

$$\begin{cases} \tilde{u}_i(x, y, z, \omega) = R(\theta) \tilde{u}_i(0, r, z, \omega) \\ \tilde{p}_j(x, y, z, \omega) = R(\theta) \tilde{p}_j(0, r, z, \omega) \end{cases} \quad (i, j = s, r) \quad (38)$$

其中, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$ 。

为了在柱坐标系下进行积分变换, 式 (35) 和 (37) 可以通过引入角度 ϕ 来更方便地实现 (如图 3 示):

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \varphi - \theta \quad (39)$$

角度 ϕ 定义了波数 (χ, κ) 相对于空间坐标 (l, r) 的转动, 并且两个变换关系 (35) 和 (37) 可以合并为

$$R(\varphi) = R(\theta) R(\phi) \quad (40)$$

应用式 (34)、(36)、(38) 和 (41), 利用 Fourier 变换的逆形式 (式 (2)) 可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(x, y, z, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} R(\theta) R(\phi) F_{ij}(0, \kappa, z, \omega) \cdot \\ &\quad [R(\theta) R(\phi)]^T \tilde{p}_j(0, \kappa, z, \omega) e^{i\kappa r \sin \phi} d\phi d\kappa \quad (41) \end{aligned}$$

式中, $\kappa r \sin \phi = \kappa_x x + \kappa_y y$ 。

对于任意平面 j 激励点处微圆盘上施加的 x , y 和 z 均向布荷载, 微圆盘的半径为 Δr 。在柱坐标系内, 该荷载幅值可以表示为

$$\tilde{p}_j(0, r, z, \omega) = \begin{cases} \tilde{p}/(\pi \Delta r^2) & (r \leq \Delta r) \\ 0 & (r > \Delta r) \end{cases}, \quad \tilde{p} = [\tilde{p}_x \quad \tilde{p}_y \quad \tilde{p}_z]^T \quad (42)$$

利用式 (1) 将荷载 $\tilde{p}_j(0, r, z, \omega)$ 转化到频率-波数域内

$$\begin{aligned} p_j(0, \kappa, z, \omega) &= \frac{\tilde{p}}{\pi \Delta r^2} \int_0^{\Delta r} \int_0^{2\pi} e^{-i\kappa r \sin \phi} d\phi r dr \\ \Rightarrow p_j(0, \kappa, z, \omega) &= \frac{2\tilde{p}}{\kappa \Delta r} J_1(\kappa \Delta r) \quad (43) \end{aligned}$$

式中 $J_n(*)$ 为第一类的 n 阶 Bessel 函数; κ 是径向的波数; ϕ 表示波数和坐标向量 (κ, ω) 和 (r, θ) 之间的夹角。注意当 $\Delta r \rightarrow 0$ 时, 可以得到集中荷载的表达形式:

$$p_j(0, \kappa, z, \omega) = \tilde{p} (J_1(\kappa \Delta r) \rightarrow \kappa \Delta r / 2) \quad (44)$$

将式 (43) 代入方程 (41) 中可以得到任意均布荷载情况下的格林函数为

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(x, y, z, \omega) &= \frac{\tilde{p}}{\pi \Delta r} \int_0^{+\infty} R(\theta) G_{ij} R^T(\theta) J_1(\kappa \Delta r) d\kappa, \\ G_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\phi) F_{ij}(0, \kappa, z, \omega) R^T(\phi) e^{i\kappa r \sin \phi} d\phi \quad (45) \end{aligned}$$

相似的, 将式 (44) 代入方程 (41) 中可以得到任意集中荷载作用下的格林函数为

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(x, y, z, \omega) &= \frac{\tilde{p}}{2\pi} \int_0^{+\infty} R(\theta) G R^T(\theta) \kappa d\kappa, \\ G &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\phi) F(0, \kappa, z, \omega) R^T(\phi) e^{i\kappa r \sin \phi} d\phi \quad (46) \end{aligned}$$

注意圆盘均布荷载是以 z 轴为轴对称分布, 向量 \tilde{p} 可以从对 ϕ 的积分中分离。式 (46) 的第二式可以进行解析求解, 因此格林函数的求解将只有对波数的一维积分, 从而极大地降低了双重积分的计算量, 提高求解效率, 此一维积分可以通过五点高斯积分很容易的实现。

5 数值算例

5.1 三维横观各向同性层状地基格林函数

利用本文算法求解横观各向同性层状地基三维波动问题的格林函数, 层状地基材料属性见表 1 所示。在地基内部 $4.0h$ 深度处施加水平和竖直向的集中荷载, 求解 $a_0=2.0$ ($a_0=\omega h/c_s$, 且 $c_s=\sqrt{G/\rho}$) 时格林函数 \tilde{u}_r 和 \tilde{u}_z 沿深度变化的值, 无量纲形式:

$$\tilde{u} = \frac{h}{G}(k(z) + ic(z)) \quad , \quad (47)$$

计算结果见图 4。此处将计算结果与文献[17]结果进行对比, 由图 4 可见, 二者基本完全拟合, 从而验证了本文算法的准确性。

表 1 三层半无限地基材料属性

Table 1 Material properties of soil with three layers and half-space

层号	E_H	E_V	$\nu_{HH}=\nu_{HV}$	G_{HV}	ρ	h
1	2.5	3.0	0.25	1.0	1.0	1.0
2	3.0	4.0	0.25	1.4	1.1	1.0
3	5.0	5.0	0.25	2.0	1.3	2.0
4	7.5	6.0	0.25	2.5	1.5	无限

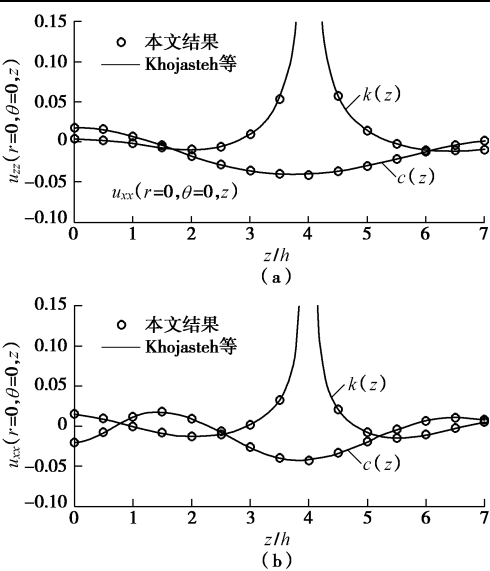


图 4 层状地基格林函数的对比 ($a_0=2$)

Fig. 4 Comparison of Green's functions for multi-layered soil ($a_0=2$)

5.2 横观各向同性层状地基水平和竖直向杨氏模量比值对位移格林函数的影响

利用本文算法求解层状地基内部的格林函数, 层状地基材料属性见表 2 所示。为研究层状地基的各向异性属性对格林函数的影响, 选取不同的水平和竖直

向弹性模量的比值 $n=E_H/E_V$ 进行求解, 此算例中分别取 1/3, 1 和 2, 其中 $n=1$ 的情况表示各向同性地基。在地基内部 $1.5h$ 深度处施加水平和竖直向的集中简谐荷载, 并分别求解 $a_0=2.0$ 和 4.0 ($a_0=\omega h/c_s$, 且 $c_s=\sqrt{G_{44}/\rho}$, G_H 和 ρ 均为第一层的材料属性) 时位移格林函数 \tilde{u}_{xx} 和 \tilde{u}_{zz} 沿深度变化的值, 将其写成式 (47) 的无量纲形式, 计算结果见图 5~8。由图易见, 随着比值 n 的变化, 格林函数均发生较大的变化, 尤其对于格林函数的虚部, 曲线峰值随着 n 的增大而增大, 峰值点对应的频率值也有微小的变化。此外, 随着深度的增加, 格林函数的实部在 $1.5h$ 处逐渐趋近于无穷大, 当深度大于 $1.5h$ 后, 格林函数又随之减小, 而对于格林函数的虚部却表现的与之不同, 在施加荷载的层面未出现奇异值。对于无量纲频率 $a_0=4.0$ 的情况, 与 $a_0=2.0$ 的情况相比, 格林函数曲线在同样的深度范围内表现出更加明显的波动特性。

表 2 两层弹性半无限地基材料属性

Table 2 Material properties of soil with two layers resting on an elastic half-space

层号	E_H	$\nu_{HH}=\nu_{HV}$	ρ	h
1	2.5	0.25	1.0	1.0
2	1.3	0.30	1.0	0.5
半空间	0.533	1/3	0.89	无限

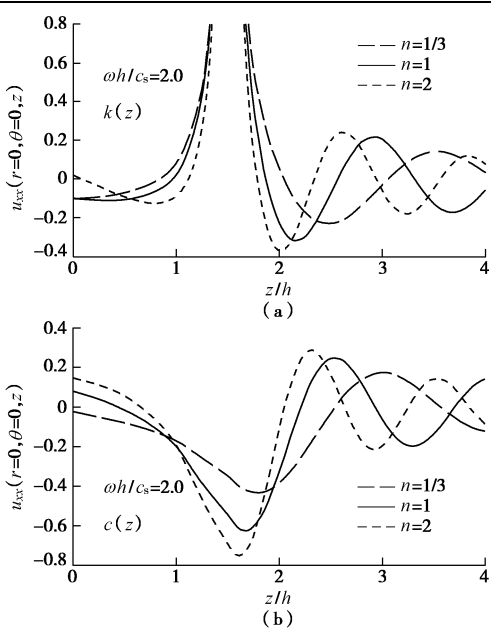
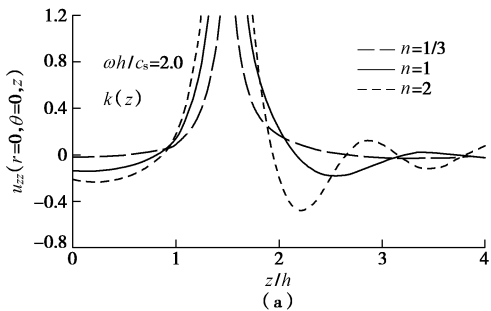
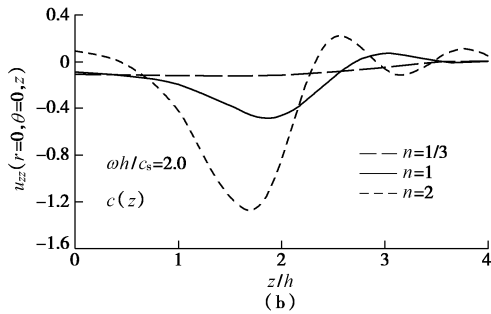
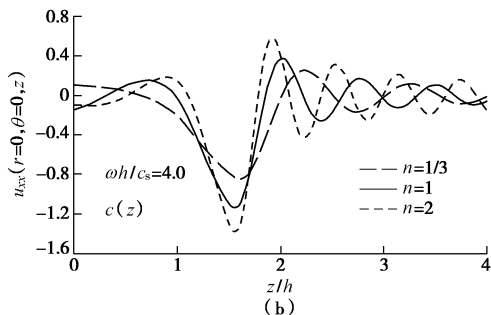
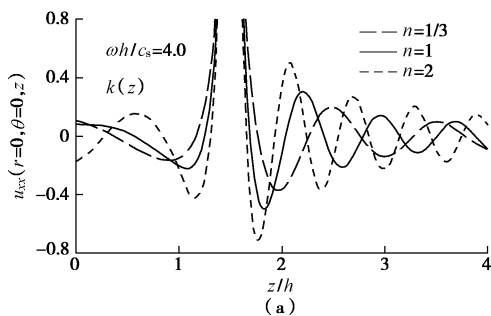
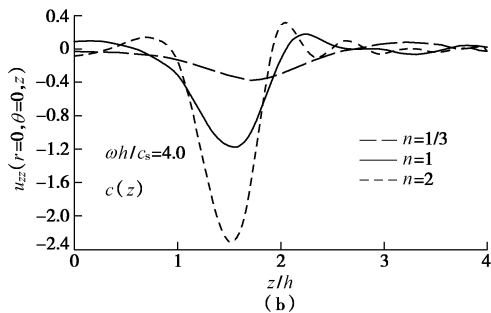
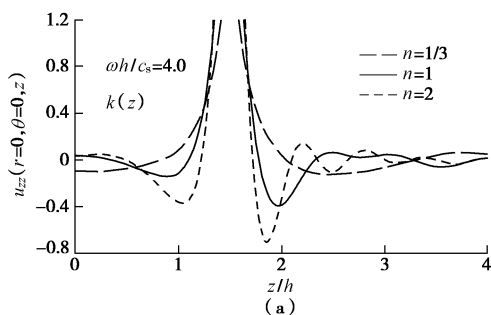


图 5 层状地基沿 z 轴的格林函数

Fig. 5 Green's functions for multi-layered soil along z -axis



图6 层状地基沿 z 轴的格林函数Fig. 6 Green's functions for multi-layered soil along z -axis图7 层状地基沿 z 轴的格林函数Fig. 7 Green's functions for multi-layered soil along z -axis图8 层状地基沿 z 轴的格林函数Fig. 8 Green's functions for multi-layered soil along z -axis

6 结 语

地基各向异性特性对基础与层状地基动力相互作用有十分重要的影响, 本文提出了一种求解横观各向同性层状地基任意点格林函数的数值算法。首先利用傅里叶积分变换将横观各向同性层状地基的波动方程转换为频率-波数域内的两点边值问题的常微分方程组, 运用精细积分方法求解并得到频率-波数域内的动力柔度矩阵, 然后再将得到的地基动力柔度系数转换到频率-空间域内, 从而得到横观各向同性层状地基的位移格林函数。本文提出的算法可以求解横观各向同性层状地基表面或内部任意点的格林函数, 数值算例验证了本文算法的精确性。此外, 分析了地基的各向异性特性对地基位移响应的影响, 结果表明, 横观各向同性层状地基水平向和竖直向材料参数的不同对地基的动力响应有显著的影响, 在实际工程计算中应予以考虑, 不可以进行简化处理。

参考文献:

- [1] LAMB H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid[J]. Phil Trans, Royal Society of London, 1904, **203**: 1 - 42.
- [2] MINDLIN, R. D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid[J]. Physics, 1936, **7**: 195 - 202.
- [3] APSEL R J, LUCO J E. On the Green's functions for a layered half space (Part II)[J]. Bull Seism Soc of Am, 1983, **73**(4): 931 - 951.
- [4] PAK R Y S. Asymmetric wave propagation in an elastic half-space by a method of potentials[J]. J Appl Mech, 1987, **54**(1): 121 - 126.
- [5] 艾智勇, 曾 凯, 曾文泽. 层状地基三维问题的解析层元解[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(6): 1154 - 1158. (AI Zhi-yong, ZENG Kai, ZENG Wen-ze. Analytical layer-element solution for three-dimensional problem of multilayered foundation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(6): 1154 - 1158. (in Chinese))
- [6] STONELEY R. The seismological implications of anisotropy in continental structures[R]. London: Royal Astronomical Soc. Monthly Notices, Geophysical Supplement, 1949: 343 - 353.
- [7] SYNGE J L. Elastic waves in anisotropic media[J]. Journal of Mathematics and Physics 1957, **35**: 323 - 334.
- [8] BUCHWALD V T. Rayleigh waves in transversely isotropic media[J]. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1961, **14**(4): 293 - 317.
- [9] WANG Y, RAJAPAKSE R K N D. Dynamic of rigid strip

- foundations embedded in orthotropic elastic soils[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1991, **20**: 927 - 947.
- [10] RAJAPAKSE R K N D, WANG Y. Green's functions for transversely isotropic elastic half-space[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1993, **119**(9): 1724 - 1746.
- [11] SHODJA H M, ESKANDARI M. Axisymmetric time-harmonic response of a transversely isotropic substrate-coating system[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2007, **45**: 272 - 287.
- [12] RAHIMIAN M, ESKADARI M, PAK R Y S, et al. An elastodynamic potential method for a transversely isotropic solid[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 2007, **133**(10): 1134 - 1145.
- [13] KHOJASTEH A, RAHIMIAN M, ESKANDARI M, et al. Asymmetric wave propagation in a transversely isotropic half-space in displacement potentials[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2008, **46**: 690 - 710.
- [14] SEALE S H, KAUSEL E. Point loads in cross-anisotropic layered halfspace[J]. *J Eng Mech*, 1989, **115**: 509 - 524.
- [15] YANG B, PAN E, TEWARY V K. Three-dimensional Green's functions of steady-state motion in anisotropic half-spaces and bimetals[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, **28**: 1069 - 1082.
- [16] KHOJASTEH A, RAHIMIAN M, PAK R Y S, et al. Asymmetric dynamic Green's functions in a two-layered transversely isotropic half-space[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2008, **134**(9): 777-787.
- [17] KHOJASTEH A, RAHIMIAN M, ESKANDARI M, et al. Three-dimensional dynamic Green's functions for a multilayered transversely isotropic half-space[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, **48**: 1349 - 1361.
- [18] BARBOSA J M O, KAUSEL E. The thin-layer method in a cross-anisotropic 3D space[J]. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 2012, **89**: 537 - 560.
- [19] 唐和生, 王远功, 陈 镨. 轴对称横观各向同性层状弹性半空间问题受力分析[J]. *上海力学*, 1999, **20**(1): 64 - 69. (TANG He-sheng, WANG Yuan-gong, CHEN Rong. Stress analysis of axisymmetrical problems in transversely isotropic multilayered elastic half space[J]. *Shanghai Journal of Mechanics*, 1999, **20**(1): 64 - 69. (in Chinese))
- [20] 唐和生, 薛松涛, 陈 镨, 等. 格林函数在横观各向同性层状地基沉降中的应用[J]. *同济大学学报*, 2000, **28**(5): 626 - 630. (TANG He-sheng, XUE Song-tao, CHEN Rong, et al. Application of the green's functions for the settlement of transversely-isotropic layered soil[J]. *Journal of Tongji University*, 2000, **28**(5): 626 - 630. (in Chinese))
- [21] 艾智勇, 胡亚东. 3D 横观各向同性地基非耦合解析层元[J]. *岩土工程学报*, 2013, **35**(2): 717 - 720. (AI Zhi-yong, HU Ya-dong. Uncoupled analytical layer-element for 3D transversely isotropic multilayered foundation[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, **35**(2): 717 - 720. (in Chinese))
- [22] AI Z Y, LI Z X, CANG N R. Analytical layer-element solution to axisymmetric dynamic response of transversely isotropic multilayered half-space[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2014, **60**: 22 - 30.
- [23] ZHONG W X, LIN J H, GAO Q. The precise computation for wave propagation in stratified materials[J]. *Int J Numer Methods Eng*, 2004, **60**: 11 - 25.
- [24] GAO Q, LIN J H, ZHONG W X, et al. A precise numerical method for Rayleigh waves in a stratified half space[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, **67**: 771 - 786.
- [25] GAO Q, ZHONG W X, HOWSON W P. A precise method for solving wave propagation problems in layered anisotropic media[J]. *Wave Motion*, 2004, **40**: 191 - 207.
- [26] 林 皋, 韩泽军, 李建波. 层状地基任意形状刚性基础动力响应求解[J]. *力学学报*, 2012, **44**(6): 1016 - 1027. (LIN Gao, HAN Ze-jun, LI Jian-bo. Solution of the dynamic response of rigid foundation of arbitrary shape on multi-layered soil[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, **44**(6): 1016 - 1027. (in Chinese))
- [27] SHENG X, JONES C J C, PETYT M. Ground vibration generated by a harmonic load acting on a railway track[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, **225**: 3 - 28.