

DOI: 10.11779/CJGE201612002

# 砂土的 UH 模型

姚仰平, 刘林, 罗汀

(北京航空航天大学交通科学与工程学院, 北京 100191)

**摘要:** 在 UH (Unified Hardening, 统一硬化) 模型的基础上, 通过分析砂土特性, 建立了砂土的本构模型。该模型具有以下几个特点: ①通过引入压硬性参量, 模型可以描述在  $e - \ln p$  空间内砂土的等向压缩线为曲线的特性; ②通过引入剪胀性参数, 模型可以合理描述砂土的剪胀特性, 即松砂的特征状态应力比较大, 密砂的特征状态应力比较小的特性; ③通过引入临界状态参数来建立砂土的水滴形屈服面, 模型可以合理描述临界状态线 (CSL) 在  $e - \ln p$  空间内的位置。相对于 UH 模型, 本文所提的砂土模型只增加了 3 个材料参数, 且 3 个参数都可通过室内常规试验确定。最后, 利用该模型对砂土排水和不排水试验进行预测, 预测结果与试验结果吻合很好。

**关键词:** 砂土; 压硬性; 剪胀性; 临界状态; UH 模型

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2016)12-2147-07

作者简介: 姚仰平(1960-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事土的本构关系和机场高填方研究。E-mail: ypyao@buaa.edu.cn。

## UH model for sands

YAO Yang-ping, LIU Lin, LUO Ting

(School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** By analyzing the behaviours of sands, a constitutive model for sands is proposed based on the UH model. The model has the following characteristics: (1) the model can describe that the isotropic compression line of sands is a curve in the  $e - \ln p$  plane by introducing a compressive hardening parameter. (2) The stress ratio at the characteristic state point of loose sand is relatively large, and that of dense sand is relatively small, which can be described by the new model by introducing a dilatancy parameter. (3) The yield surface of sands is proposed by introducing a critical state parameter, and the position of the critical state line (CSL) in the  $e - \ln p$  plane can be accurately described by the proposed model. Compared with the UH model, the proposed model requires three additional sand parameters which can be determined by the conventional triaxial tests. Finally, the validity of the new model is confirmed by the data from triaxial drained and undrained compression tests for sands.

**Key words:** sand; compressive hardening; dilatancy; critical state; UH model

## 0 引言

1975 年 Lade 等<sup>[1]</sup>通过分析总结砂土的真三轴试验数据, 提出了砂土的弹塑性模型。Been 等<sup>[2]</sup>假设砂土临界状态线在  $e - \ln p$  空间为直线的基础上, 提出了状态参数来建立砂土的本构模型。Li 等<sup>[3]</sup>在边界界面模型的基础上通过引入状态参量来建立了砂土的本构模型。Poorooshasb 等<sup>[4-5]</sup>采用单屈服面非相关流动法则, 提出了砂土的弹塑性本构模型。姚仰平等<sup>[6]</sup>在统一硬化模型的基础上考虑了压力与密度的综合影响, 建立了砂土的弹塑性本构模型。本文拟在 UH (Unified Hardening, 统一硬化) 模型<sup>[7-8]</sup>基础上, 从砂土的压硬性、剪胀性、临界状态特性等 3 方面出发, 建立适合于砂土的本构模型。

## 1 砂土等向压缩特性及其描述

图 1 是 Cambria sand 在不同初始密度下的等向压缩线<sup>[9]</sup>。通过对试验结果分析发现, 对于砂土, 不同初始密度的压缩线在  $e - \ln p$  空间内均表现为曲线, 且最终都趋向于等向压缩线的渐近线。因此 Pestana 等<sup>[10]</sup>、Sheng 等<sup>[11]</sup>采用双对数坐标来描述砂土的压缩曲线。本文基于 Sheng 等<sup>[11]</sup>的思想, 结合 UH 模型的体系, 在单对数坐标中引入压硬性参量  $p_s$  来描述砂土的压缩曲线。砂土等向压缩线的表达式为

$$e = Z_i - \lambda \ln \left( \frac{p + p_{si}}{1 + p_{si}} \right) \quad (1)$$

基金项目: 国家重点基础研究发展计划 (“973 计划”) 项目 (2014CB047001); 国家自然科学基金项目 (51579005, 11272031)

收稿日期: 2016-08-18

式中  $\lambda$  为等向压缩线在  $e - \ln p$  空间内渐近线的斜率;  $Z_i$  为不同等向压缩线上平均正应力为 1 kPa 时所对应的孔隙比, 决定了等向压缩线在  $e - \ln p$  空间内的位置;  $p_{si}$  反映不同等向压缩线的弯曲程度, 可描述土的压硬规律, 因此定义为不同等向压缩线所对应的压硬性参量。

Asaoka 等<sup>[12]</sup>在  $e - \ln p$  空间内采用砂土压缩线的渐进线作为 NCL 来建立砂土的本构模型。在临界状态力学的基础上, 类似于 Modified Cam-clay 模型, NCL 在  $e - \ln p$  空间内为直线, 基本特征是计算所得的 CSL 在  $e - \ln p$  空间内也为直线。但是通过对 Toyoura 砂的临界状态点<sup>[13]</sup>进行整理, 发现在  $e - \ln p$  空间内砂土的 CSL 为曲线, 如图 2 所示, 此结果与 Been 等<sup>[2]</sup>得出的结果相同。通过以上分析说明假设 NCL 为直线来建立砂土的本构模型反映的临界状态与试验规律不符。因此本文将等向压缩线的渐近线作为参考压缩线 (RCL), 假定与 CSL 在平均正应力为 0 时相交的等向压缩线作为 NCL, 其作用类似于黏土 NCL 的作用, 如图 3, 4 所示。图 3 中实线表示砂土的不同初始孔隙比下的等向压缩线, 虚线表示砂土的临界状态线, 其中临界状态线在平均正应力等于 0 时的孔隙比为  $e_{c0}$ , NCL 是初始孔隙比为  $e_{c0}$  所对应的等向压缩线。

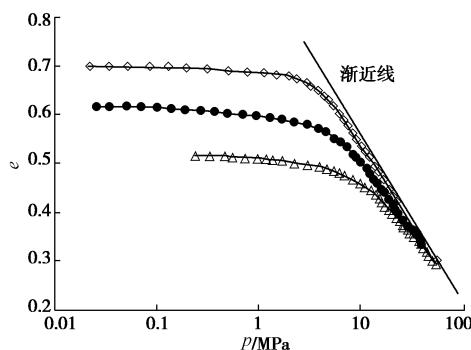


图 1 Cambria 砂的等向压缩曲线<sup>[9]</sup>

Fig. 1 Isotropic compression lines of Cambria sand<sup>[9]</sup>

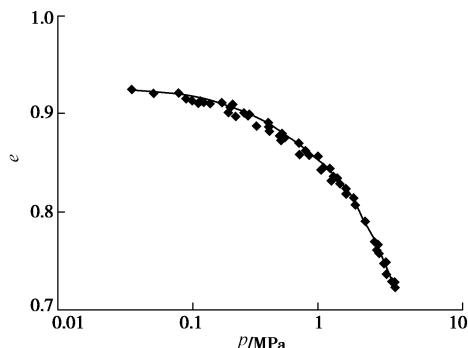


图 2 Toyoura 砂的临界状态曲线<sup>[13]</sup>

Fig. 2 Critical state line of Toyoura sand<sup>[13]</sup>

NCL 是砂土的一条等向压缩线, 因此根据砂土等

向压缩线的表达式 (1), NCL 可表示为

$$e = Z - \lambda \ln \left( \frac{p + p_s}{1 + p_s} \right) , \quad (2)$$

式中,  $Z$  为 NCL 上平均正应力为 1 kPa 时所对应的孔隙比, 决定了 NCL 在  $e - \ln p$  空间内的位置, 根据式 (2) 可以求出  $Z$  的计算式为

$$Z = e_{c0} - \lambda \ln \left( \frac{1 + p_s}{p_s} \right) . \quad (3)$$

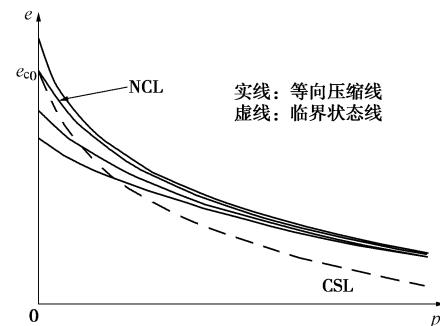


图 3 砂土在  $e - p$  空间内的等向压缩线与临界状态线示意图

Fig. 3 Isotropic compression lines and critical state line for sands in  $e - p$  space

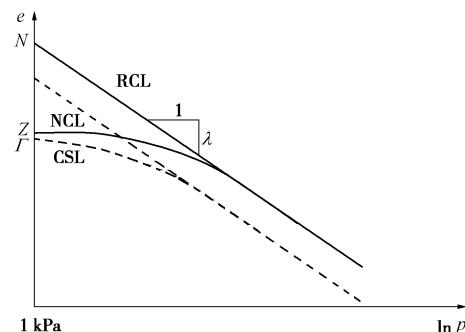


图 4 在  $e - \ln p$  空间内砂土的等向压缩线与临界状态线示意图

Fig. 4 Isotropic compression line and critical state line for sands in  $e - \ln p$  space

通过对式 (3) 进行分析, 如图 5 所示, 取  $e_{c0}=1.0$ , 当  $\lambda=0.2$ ,  $\frac{e_{c0}-Z}{e_{c0}}=5\%$  时,  $p_s=3.4$  kPa。而砂土中,  $p_s$

取值一般较大 (几百 kPa 甚至几千 kPa), 导致  $\frac{e_{c0}-Z}{e_{c0}}$  接近 0, 即  $Z$  近似与  $e_{c0}$  相等, 如图 5 所示, 因此可取  $Z \approx e_{c0}$ 。

$p_s$  为 NCL 所对应的压硬性参量, 计算式为

$$p_s = \exp \left( \frac{N-Z}{\lambda} \right) - 1 , \quad (4)$$

式中,  $N$  为 RCL 上平均正应力为 1 kPa 时所对应的孔隙比, 决定了 RCL 在  $e - \ln p$  空间内的位置, 如图 4



距离, 可表示为

$$\xi = e_\eta - e \quad , \quad (14)$$

式中,  $e$  为土的当前孔隙比,  $e_\eta$  为  $e - \ln p$  空间内等应力比  $\eta$  线上当前平均正应力  $p$  所对应的孔隙比。

### 2.3 砂土模型中 $e_\eta$ 的表达式

通过屈服面方程式 (8) 可求得砂土模型中  $e_\eta$  的表达式, 如图 7 所示, 砂土模型中的  $e_\eta$  可表示为

$$e_\eta = Z - \lambda \ln \left( \frac{p + p_s}{1 + p_s} \right) - \Delta e_p \quad , \quad (15)$$

式中,  $\Delta e_p$  为土在某个平均正应力  $p$  下从 NCL 上开始进行等  $p$  应力路径加载, 加载到某个应力比  $\eta$  过程中孔隙比的改变量, 如图 7 中所示点  $a$  到点  $b$  的距离。从 NCL 上开始进行等  $p$  应力路径加载, 在加载过程中, 通过 Hooke 定律可知弹性变形为 0, 通过屈服面方程式 (8), 可以求得

$$\frac{\varepsilon_v^p}{c_p} = \ln \left[ \frac{(1 + \eta^2 / (M^2 - \chi \eta^2)) p + p_s}{p + p_s} \right] \quad . \quad (16)$$

因此,  $\Delta e_p$  可表示为

$$\Delta e_p = (\lambda - \kappa) \ln \left[ \frac{(1 + \eta^2 / (M^2 - \chi \eta^2)) p + p_s}{p + p_s} \right] \quad , \quad (17)$$

将式 (17) 代入式 (15), 可将  $e_\eta$  表示为

$$e_\eta = Z - \lambda \ln \left( \frac{p + p_s}{1 + p_s} \right) - (\lambda - \kappa) \cdot \ln \left[ \frac{(1 + \eta^2 / (M^2 - \chi \eta^2)) p + p_s}{p + p_s} \right] \quad . \quad (18)$$

## 3 砂土的剪胀特性描述

塑性势面仍采用椭圆, 但塑性势面的特征状态应力比采用  $M_c$  替代了  $M$ , 同时塑性势面与屈服面形状不同, 因此砂土模型采用非关联流动法则, 塑性势函数可表示为

$$g = \ln \frac{p}{p_x} + \ln \left( 1 + \frac{q^2}{M_c^2 p^2} \right) = 0 \quad . \quad (19)$$

因此, 砂土模型对应的剪胀方程为

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p} = \frac{M_c^2 p^2 - q^2}{2pq} \quad , \quad (20)$$

其中, 考虑特征状态应力比应与砂土的当前状态相关, 本文参考了 Li 等<sup>[3]</sup>提出的砂土的特征状态应力比的表达式, 提出了砂土模型的特征状态应力比表达式:

$$M_c = M \exp(-m\xi) \quad , \quad (21)$$

式中,  $m$  为土的剪胀性参数, 根据式 (21) 可求得其计算式:

$$m = -\frac{1}{\xi_c} \ln \left( \frac{M_c^{\xi_c}}{M} \right) \quad , \quad (22)$$

式中,  $M_c^{\xi_c}$  是指土在任一状态下的三轴排水或者不排水试验中的特征状态应力比,  $\xi_c$  是指与  $M_c^{\xi_c}$  对应的密实状态参量。

## 4 砂土的本构关系

### 4.1 应变增量

#### (1) 弹性应变增量

根据 Hooke 定律计算弹性应变增量:

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{mm} \delta_{ij} \quad , \quad (23)$$

式中,  $\nu$  为土的泊松比,  $E$  为弹性模量, 可表示为

$$E = \frac{3(1-2\nu)(1+e_0)}{\kappa} (p + p_s) \quad . \quad (24)$$

#### (2) 塑性应变增量

塑性应变增量可表达为

$$d\varepsilon_{ij}^p = A \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad (25)$$

其中,

$$A = c_p \Omega \frac{\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq}{\frac{\partial g}{\partial p}} \quad , \quad (26)$$

式中,

$$\Omega = \frac{M_c^4 - \eta^4}{M_f^4 - \eta^4} \quad . \quad (27)$$

### 4.2 在 $p-q$ 平面上的弹塑性应力应变关系

在  $p-q$  平面上砂土模型的应力应变关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} dp \\ dq \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K \cdot A_1 & 3KG \cdot A_2 \\ 3KG \cdot A_3 & 3G \cdot A_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_d \end{Bmatrix} \quad . \quad (28)$$

式中  $K$  为弹性体积模量,  $K = E/[3(1-2\nu)]$ ;  $G$  为弹性剪切模量,  $G = E/[2(1+\nu)]$ ;  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  和  $A_4$  为 4 个不同的塑性影响因子, 计算式为

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = \frac{B_1 + B_2}{B_1 + B_2 + Kc_p(M_c^4 - \eta^4)B_3}, \\ A_2 = \frac{-2\eta c_p M^2 (M_c^4 - \eta^4)}{B_1 + B_2 + Kc_p(M_c^4 - \eta^4)B_3}, \\ A_3 = \frac{-2\eta c_p (M_c^2 + \eta^2)B_3}{B_1 + B_2 + Kc_p(M_c^4 - \eta^4)B_3}, \\ A_4 = \frac{B_1 + Kc_p(M_c^4 - \eta^4)B_3}{B_1 + B_2 + Kc_p(M_c^4 - \eta^4)B_3}, \end{array} \right\} \quad (29)$$

式中,  $B_1 = p(M_f^4 - \eta^4)(M^2 - \chi \eta^2) \cdot [M^2 + (1-\chi)\eta^2 + (M^2 - \chi \eta^2)p_s/p]$ ,  $B_2 = 12Gc_p M^2 \eta^2 (M_c^2 + \eta^2)$ ,  $B_3 = M^4 - (1+2\chi)M^2 \eta^2 - \chi(1-\chi)\eta^4$ 。

## 5 模型分析

### 5.1 土的临界状态参数 $\chi$ 的分析

图 8 中点为 Toyoura 砂的临界状态试验点, 实线为 Toyoura 砂的 NCL, 虚线分别为  $\chi$  取 0.0, 0.55, 0.8 时的 CSL。图 8 中显示, 当  $\chi=0.0$  时, 计算所得的 CSL 与试验 CSL 有一定的偏差, 随着  $\chi$  的逐渐增大, NCL 与 CSL 之间的距离越来越大, 当  $\chi=0.55$  时, CSL 的计算值与试验值最接近。

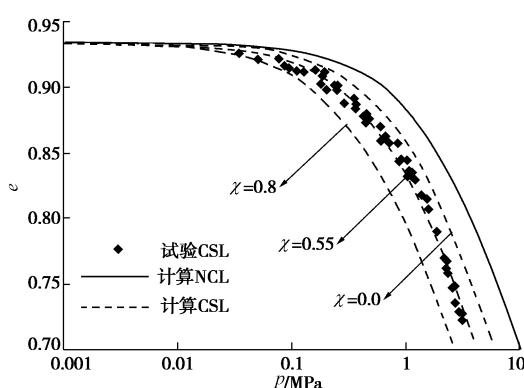


图 8 临界状态参数  $\chi$  的分析

Fig. 8 Analysis of critical state parameter

图 9 是当  $\chi$  取 0.0, 0.55, 0.8 时, 根据砂土模型屈服面方程式 (5) 所得的屈服面在  $p-q$  平面上的形状。当  $\chi=0.0$  时, 砂土模型的屈服面形状为椭圆, 与 UH 模型的屈服面形状相同, 随着  $\chi$  的增大, 屈服面由椭圆逐渐向水滴形转变。

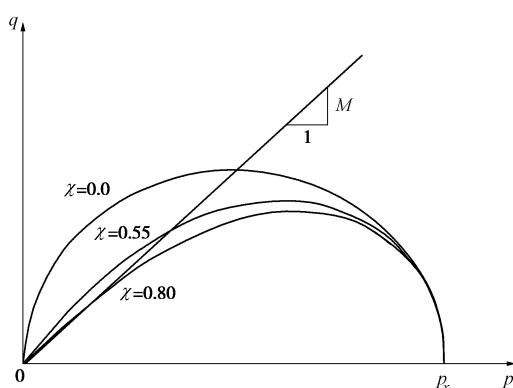


图 9 不同参数  $\chi$  所对应的屈服面

Fig. 9 Yield surfaces under different values of parameter  $\chi$

### 5.2 等向压缩与临界状态描述

#### (1) 砂土的等向压缩描述

图 10 中实线是砂土模型对相同初始围压、不同初始密度的 Toyoura 砂进行的等向压缩描述, 材料参数见表 1。

表 1 Toyoura 砂的材料参数

材料参数	数值	备注
$M$	1.25	
$\lambda$	0.135	
$\kappa$	0.04	与 UH 模型相同
$v$	0.3	
$N$	1.973	
$Z/p_s$	0.934/2200 kPa	
$\chi$	0.55	新增参数
$m$	1.8	

图 10 中显示, 在  $e-\lg p$  空间内 NCL 为一条曲线, 且不同初始密度的砂土(不管是松砂或密砂), 等向压缩线均为曲线, 并最终都趋向渐近线, 与砂土试验现象相符。

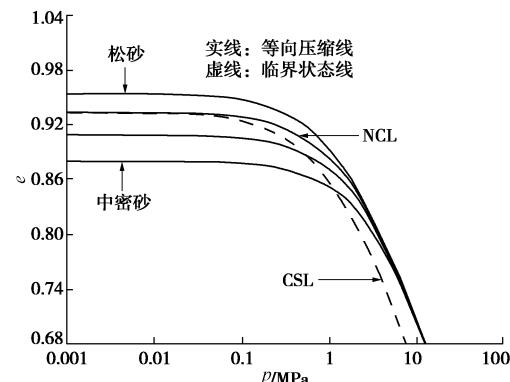


图 10 Toyoura 砂等向压缩曲线与临界状态线

Fig. 10 Isotropic compression lines and critical state line for Toyoura sand

#### (2) 砂土的临界状态描述

图 10 中显示, 砂土的 CSL 在  $e-\lg p$  应空间内为一条曲线, 且 CSL 与 NCL 在  $p=0$  kPa 时相交, 随着  $p$  的逐渐增大, CSL 与 NCL 逐渐趋于平行, 与砂土的临界状态试验现象相符。

## 6 试验验证

Ishihara 等<sup>[13, 15]</sup>对 Toyoura 砂进行了大量的三轴试验, 试验结果已经被许多学者用来验证其本构模型, 材料参数见表 1。

图 11 是对初始围压为 500 kPa 的 Toyoura 砂进行常规三轴排水试验预测模拟, 其中初始孔隙比分别为 0.81, 0.886, 0.96, 保持围压不变。通过图 11 说明, 砂土模型能够反映密砂的剪胀和软化, 如孔隙比为 0.81 的砂土, 同时能够反映松砂的剪缩和硬化, 如孔隙比为 0.96 ( $>e_{c0} \approx 0.934$ ) 的砂土, 计算结果与试验数据符合较好。

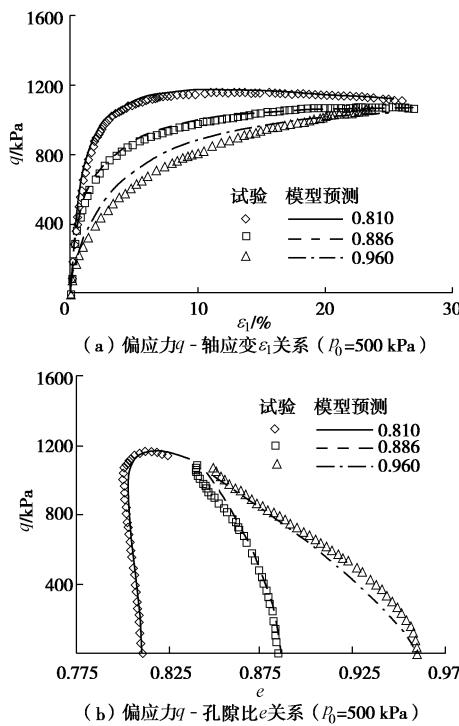


图 11 Toyoura 砂三轴排水条件下试验结果与模型预测

Fig. 11 Comparison between test results and model predictions on Toyoura sand for  $p_0=500$  kPa under drained triaxial compression

图 12 为对初始孔隙比为 0.833 的 Toyoura 砂进行常规三轴不排水试验结果预测, 其中初始围压分别为 0.1, 1.0, 2.0, 3.0 MPa。

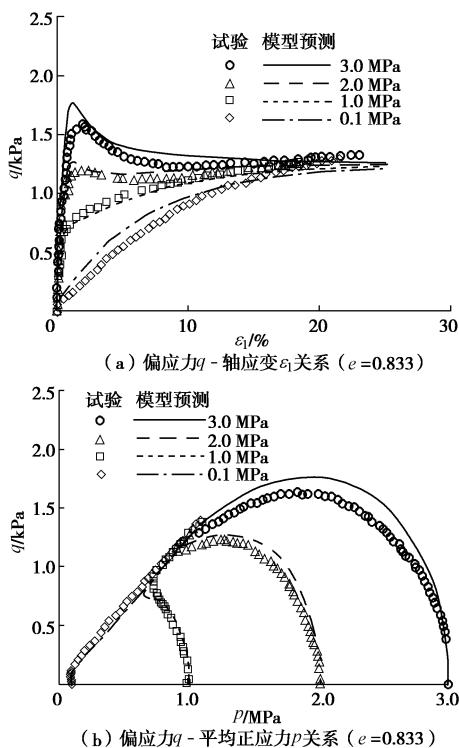


图 12 Toyoura 砂三轴不排水条件下试验结果与模型预测

Fig. 12 Comparison between test results and model predictions on Toyoura sand for  $e=0.833$  under undrained triaxial compression

图 13 是对初始围压为 1.0 MPa 的 Toyoura 砂进行常规三轴不排水试验预测模拟。如图 11~13 所示, 砂土模型的预测结果不仅可以反映砂土的应变软化和硬化等特性, 而且预测结果与试验结果符合很好。

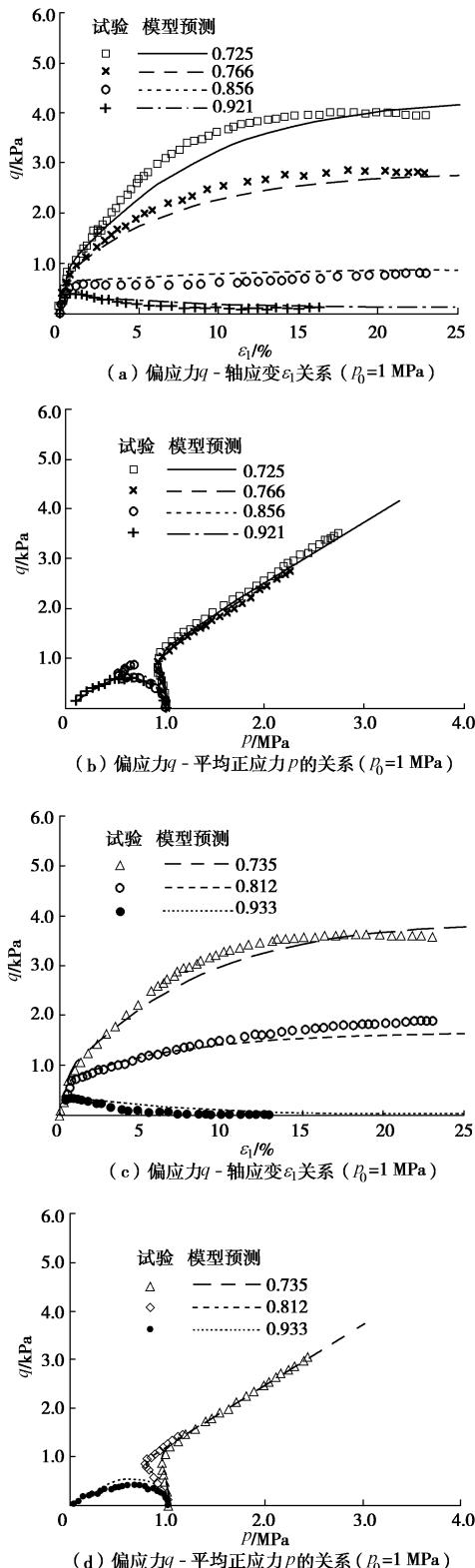


图 13 Toyoura 砂三轴不排水条件下试验结果与模型预测对比

Fig. 13 Comparison between test results and model predictions on Toyoura sand for  $p_0=1$  MPa under undrained triaxial compression

## 7 结 论

本文在 UH 模型的基础上, 通过引入考虑砂土特性的 3 个新参数, 建立了砂土的本构模型。砂土模型具有以下 3 个特点。

(1) 通过引入参数  $Z$  或压硬性参量  $p_s$  来描述在  $e - \ln p$  空间内砂土的等向压缩线为曲线的特性。

(2) 通过剪胀性参数  $m$  描述了砂土的特征状态应力比随着当前状态的变化而变化的趋势, 从而达到能合理描述砂土的剪胀特性的目的。

(3) 将临界状态参数  $\chi$  引入到屈服面中, 使得砂土模型的屈服面形状呈水滴形, 达到能合理描述砂土特性的目的。

(4) 当砂土的 3 个新参数均为 0 时, 该模型退回到可以描述饱和超固结黏土的 UH 模型。

## 参考文献:

- [1] LADE P V, DUNCAN J M. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1975, **101**(10): 1037 – 1053.
- [2] BEEN K, JEFFERIES M G, HACHEY J. The critical state of sands[J]. Géotechnique, 1992, **42** (4): 655 – 663.
- [3] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, **50**(4): 449 – 460.
- [4] POOROOSHAB H B, HOLUBEC I, SHERBOURNE A N. Yielding and flow of sand in triaxial compression, Part I[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1966, **3**(5): 179 – 190.
- [5] POOROOSHAB H B, HOLUBEC I, SHERBOURNE A N. Yielding and flow of sand in triaxial compression, Part II[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1967, **4**(4): 376 – 397.
- [6] YAO Y P, SUN D A, LUO T. A critical state model for sands dependent on stress and density[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2004, **28**: 323 – 337.
- [7] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. Constitutive model for overconsolidated clays[J]. Science China Technological Sciences, 2008, **51**(2): 179 – 191.
- [8] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: three dimensional unified hardening model for overconsolidated clays[J]. Géotechnique, 2009, **59**(5): 451 – 469.
- [9] LADE P V, BOOP P A. Relative density effects on drained sand behavior at high pressures[J]. Soils and Foundations, 2005, **45**: 1 – 13.
- [10] PESTANA J M, WHITTLE A J. Formulation of a unified constitutive model for clays and sands[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1999, **23**: 1215 – 1243.
- [11] SHENG D C, YAO Y P, CARTER J P. A volume-stress model for sands under isotropic and critical stress states[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, **45**(11): 1639 – 1645.
- [12] ASAOKA A. An elasto-plastic description of two distinct volume change mechanisms of soils[J]. Soils and Foundations, 2002, **42**(5): 47 – 57.
- [13] VERDUGO R, ISHIHARA K. The steady state of sandy soils[J]. Soil and Foundations, 1996, **36**: 81 – 91.
- [14] 姚仰平, 余亚妮. 基于统一硬化参数的砂土临界状态本构模型[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(12): 1827 – 1832. (YAO Yang-ping, YU Ya-ni. Extended critical state constitutive model for sand based on unified hardening parameter[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(12): 1827 – 1832. (in Chinese))
- [15] ISHIHARA K. Liquefaction and flow failure during earthquakes[J]. Géotechnique, 1996, **43**(3): 351 – 415.