

DOI: 10.11779/CJGE201611007

# 竖井冻结壁形成过程的光滑粒子法模拟

陈佩佩, 白冰\*

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

**摘要:** 土体在冻结管作用下的冻结过程会涉及到相变潜热释放问题, 准确描述冻结管周边的温度分布特征及冻结锋面移动规律对确定冻结壁的厚度及安全合理设计有重要意义。光滑粒子算法作为一种拉格朗日型无网格粒子方法以其独特的优势, 已成功地应用于多种类型工程科学问题的求解。基于光滑粒子法编写了相应的计算程序并尝试着求解相变导热问题, 通过一个简单的具有解析解的算例验证了其实用性和可靠性, 从而给出求解此类问题的一种新的求解思路, 并拓展了光滑粒子法的应用范围。最后针对煤矿井筒建设中冻结壁成形过程进行数值分析, 计算了单圈等间距设置冻结管时的温度场的分布演化特征, 比较了热物理性质不同的两种土体介质在相同冻结条件下的冻结效果, 重点分析了采用不同交错布孔方案对冻结壁成形过程的影响, 从而为工程设计提供一定的依据。

**关键词:** 光滑粒子法; 冻结相变; 温度场; 冻结壁

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2016)11-1981-09

**作者简介:** 陈佩佩(1987-), 男, 博士研究生, 主要从事环境岩土工程等方面的科研工作。E-mail: wschpp007@163.com.cn。

## SPH simulation of forming process of frozen wall of shaft

CHEN Pei-pei, BAI Bing

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** The freezing process of soil under the action of freezing pipe is related to the release of latent heat of phase change. An accurate description of temperature distribution characteristics near the freezing pipe and the freezing front movement rules is very important to determine the frozen wall thickness and safety design reasonably. The smoothed particle method, as a Lagrange meshless particle method, has been successfully used in solving many kinds of engineering problems with its unique advantages. The problem of heat conduction involving phase change is solved by the corresponding calculation program based on the smoothed particle method, and the practability and reliability of this method is verified through numerical examples with analytical solution, so a new solution for solving this kind of problem is given and the application range of the smooth particle method is extended. In the end, numerical analysis of forming process of frozen wall in construction of a coal mine shaft is carried out. The distribution and evolution characteristics of the temperature field are calculated under the condition of freezing pipe with single-ring and uniformly-spaced arrangement. The freezing effects of two kinds of soil media with different thermal physical properties are compared under the same freezing condition, and the influences of schemes with different staggered distribution holes on the forming process of frozen wall are emphatically analyzed so as to provide a basis for engineering design.

**Key words:** SPH algorithm; phase change of freezing; temperature field; frozen wall

## 0 引言

冻结法是在含水丰富地层进行井筒建设、隧道地铁施工、深基础开挖等的一种特殊方法, 其实质是在待建井筒及隧道的周围预先打一圈钻孔, 安上冻结管后使低温媒介在其中循环, 逐渐冷却土层以形成一定厚度的冻结壁从而抵抗土压力并阻止地下水的涌入, 随后开凿井筒或隧道。冻结法在中国最早应用是在煤矿井建设中, 现已在复杂的水文地质条件下建成了数百个井筒, 近些年在南方地下水丰富地区的地铁建设中

也经常使用人工冻结技术施工, 今后冻结法仍然是治理流砂和地下土层水的主要手段之一。实践表明, 土体冻结过程中形成的温度场对确定冻结壁的厚度和冻土的强度有重要意义, 为了冻结壁设计的安全可靠以及经济合理, 开展冻结管周边土壤在相变条件下温度

**基金项目:** 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)项目(2015CB057800); 国家自然科学基金项目(51279002, 51478034)

**收稿日期:** 2015-09-29

**\*通讯作者** (E-mail: baibing66@263.net)

场的演变规律研究很有必要。

事实上,冻结过程是一个非常复杂的物理过程,因为在凝固时会放出潜热发生相变且固液交界面的位置预先是不确定的,固液两种相态的热物理参数也不是相同的,同时所求问题计算域的几何形状可能也不是规则的,对于这样复杂的有相变的不稳定温度场的解析计算仅局限于一些半无限大或者无限大区域,且具有简单边界条件与初始条件的一些理想化情形,因此对伴有相变导热问题的研究多是采用数值计算技术。Zienkiewicz 等<sup>[1]</sup>发展了有限元方法以求解涉及到相变潜热的热传导问题,讨论了若干个算例并和其他方法做了对比,表明了有限元法的可靠性及有效性;Comini 等<sup>[2]</sup>描述了应用有限元方法计算热物理参数随温度变化情况及复杂辐射-对流条件下的非线性不稳定相变导热问题,为考虑相变效应的影响提出使用平均技术计算比热容,并使用了不需要迭代计算、无条件稳定的三层时间积分方案,但在某些特定情况下的计算误差是不能接受的;Morgan 等<sup>[3]</sup>给出一种新的平均计算技术计算比热容,其中所采用的比热容公式比Comini 等<sup>[2]</sup>的形式更为简洁,且可以获得更好的计算结果;Del Giudice 等<sup>[4]</sup>给出一个基于温度梯度的比热容计算方法,本质上说这也是一种平均方法,据报道可以获得合理精度的解;Dalhuijsen 等<sup>[5]</sup>比较了以上两种不同的平均计算技巧,发现 Giudice 等<sup>[4]</sup>的方法比向后差分时间积分法略微准确,另外也对比了有限元数值求解凝固问题时不同时间积分方法的效果;Pham 等<sup>[6]</sup>针对等效比热容函数在相变区域表现出的奇异行为,使用了集中质量法以便获得三对角比热容矩阵,数值试验表明该算法具有更好的精度;Voller 等<sup>[7]</sup>建议了一个可以利用线性化离散技术的源项法,它可以较好地处理等温相变和非等温相变所对应的不同特点的潜热释放问题;Swaminathan 等<sup>[8]</sup>在研究相变问题时提出了一个同时可以利用等效比热容法和源项法优势的耦合算法,该算法可以考虑到对流效应,可以很好地处理和相变相关的潜热演化;Beckett 等<sup>[9]</sup>提出一个  $r$ -自适应移动网格法数值求解了基于热焓概念的相变导热问题,该算法能够较好地预测温度场分布及相变界面的位置;Jana 等<sup>[10]</sup>采用移动网格法对伴有相变现象的导热问题进行了求解,其中对相变界面应用了一个简单的线性插值技术进行处理获得很好的界面捕捉效果,但是需要复杂耗时的自适应网格生成过程;Tavakoli 等<sup>[11]</sup>提出一种无条件稳定完全显式的有限差分法求解凝固问题,数值计算表明该方法具有较好的稳定性,然而该算法是针对某些特定问题而提出的;Yang 等<sup>[12]</sup>基于 sigmoid 函数构建了一个等效比热容导热模型,并采用 Element-free Galerkin (EFG) 法进行

求解,经过数值测试表明所建议的模型能够给出令人满意的数值解。

以上研究文献从数理微分方程的角度上讲大致可以分为两种类型<sup>[13]</sup>。一种是所谓的“热焓法”,即提出一个积分形式的焓(总热量)定义,在整个计算域(包括固液相及相变界面)上建立一个统一的能量守恒方程,这样通过一个数学变换得到新的模型方程,可以将相变边界条件以另外一种方式给予考虑,同时定解条件的提法和原模型问题是完全一样的。热焓法中焓和温度同时是待求场量,数值计算出计算域的焓场后,在根据温度和焓之间的关系得到相应的温度场,因此计算时往往需要额外的计算量,并且为避免相变遗漏现象必须格外小心地处理温度和焓之间的关系。热焓法的应用一般是纯物质等温度相变的情况,即假定相变温度区没有厚度,对于三维问题来讲只是一个几何曲面,因此相变过程发生在一个有限温差范围内的物质(如合金、食品等)就不能使用上述的热焓法。为此,提出了“等效比热容法”,事实上它是将相变潜热隐式的包含于等效比热容中,从而得到一个和典型热传导方程形式完全一致的数学模型,只不过其中的比热容函数是根据物质相变演化特点而定义。然而,新引入的比热容函数使得问题呈现出高度非线性,以致需要迭代计算过程且会出现强烈振荡,收敛变得难以控制而使得计算发生困难。近年来,新一代无网格光滑粒子法以其独特的计算域离散及函数逼近特点备受瞩目,其以一系列任意分布的点形成计算框架,而不是预先定义好的网格系统,因此可以轻易离散任意几何形状的计算域;基于所谓的粒子近似概念可以获得函数及其导数的近似表达式,程序易于实施且具有较高效率。本文尝试采用光滑粒子法求解相变导热方程,其中对相变边界条件的处理是直接进行的,而不是通过一个新的微分模型方程隐式的考虑相变潜热释放,通过一个简单的具有解析解的数值算例进行验证,表明了该算法的有效性和可靠性,进而针对煤矿井筒建设工程中常见的冻结问题进行数值分析,给出了冻结锋面随时间的演变规律,从而为实际工程设计施工提供一定的依据。目前为止,采用光滑粒子法数值计算冻结相变问题的文献非常少见,从而将该新型数值方法的应用范围进行了拓展。

## 1 数学模型及其离散格式

### 1.1 冻结模型方程

根据土体冻结过程中的物理现象,在抽象其模型方程时作如下3个假定。

(1)正在发生相变的区域的传热过程与其他区域

的传热过程有着极大的区别, 数值计算中假定土体冻结相变发生在  $0^{\circ}\text{C}$  时且同时放出潜热, 潜热放完后温度才降到相变温度以下。

(2) 土层中水分在温度降低到相变温度以下时并未全部结冰, 假定冻结区域含冰量 (或含水率) 取为常数;

(3) 忽略因温度梯度的存在而引起的水分迁移, 不计水分向冰冻峰面的转移。

这样, 根据热能守恒理论土层冻结的数学模型可表述如下:

在未冻区有

$$\rho_l C_l \frac{\partial T_l}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{lx} \frac{\partial T_l}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{ly} \frac{\partial T_l}{\partial y} \right), \quad (1)$$

式中,  $T_l$  为温度,  $t$  为时间,  $\rho_l$  为未冻土密度, 一般情况下是常数,  $C_l$  为未冻土的比热容,  $k_{lx}$  和  $k_{ly}$  分别为未冻土的  $x$  方向和  $y$  方向的热传导系数<sup>[13-14]</sup>。

在冻结区有

$$\rho_s C_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{sx} \frac{\partial T_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{sy} \frac{\partial T_s}{\partial y} \right), \quad (2)$$

式中,  $T_s$  为温度,  $\rho_s$  表示冻土密度, 一般情况下是常数,  $C_s$  表示冻土的比热容,  $k_{sx}$  和  $k_{sy}$  分别表示冻土的  $x$  方向和  $y$  方向的热传导系数<sup>[13-14]</sup>。

在冻结峰面 (移动相变边界) 上有

$$T_l = T_s, \quad (3)$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial l} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial l} = \rho_s L \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (4)$$

式中,  $k_s$  和  $k_l$  分别表示冻土和未冻土热传导系数,  $l$  表示冻结峰面的法线方向,  $L$  表示相变潜热,  $S$  表示冻结峰面的位置<sup>[13-14]</sup>。

## 1.2 SPH 离散格式

对未冻区的热能守恒方程 (1) 右边第一项进行粒子近似, 可以得到<sup>[15-16]</sup>

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_{lx} \frac{\partial T_l}{\partial x} \right] \right\}_i = \sum_{j=1}^n \frac{(k_{lx_i} + k_{lx_j})(T_{li} - T_{lj})}{r_{ij}^2} x_{ij} \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \cdot \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (5)$$

式中  $k_{lx_i}$  和  $k_{lx_j}$  分别为未冻土的  $x$  方向热传导系数在粒子点  $i$  和  $j$  处的值;  $T_{li}$  和  $T_{lj}$  分别为粒子点  $i$  和  $j$  处的温度值;  $r_{ij}$  为粒子点  $i$  和  $j$  之间的距离;  $x_{ij}$  为粒子点  $i$  和  $j$  之间  $x$  方向坐标值之差;  $\partial W_{ij}/\partial x_i$  为定义在粒子点  $j$  处的核函数关于  $x_i$  的偏导数;  $m_j/\rho_j$  为和粒子点  $j$  相对应的体积; 式中左边项的下标  $i$  表示该项在粒子点  $i$  处的值。

同理, 对未冻区的热能守恒方程 (1) 右边第二项进行粒子近似, 可以得到<sup>[15-16]</sup>

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_{ly} \frac{\partial T_l}{\partial y} \right] \right\}_i = \sum_{j=1}^n \frac{(k_{ly_i} + k_{ly_j})(T_{li} - T_{lj})}{r_{ij}^2} y_{ij} \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial y_i} \cdot \frac{m_j}{\rho_j}.$$

式中  $k_{ly_i}$  和  $k_{ly_j}$  分别为未冻土  $y$  方向的热传导系数在粒子点  $i$  和  $j$  处的值;  $y_{ij}$  为粒子点  $i$  和  $j$  之间  $y$  方向坐标值之差;  $\partial W_{ij}/\partial y_i$  为定义在粒子点  $j$  处的核函数关于  $y_i$  的偏导数, 式中左边项的下标  $i$  表示该项在粒子点  $i$  处的值。

进一步可以得到未冻土粒子点  $i$  对应温度变化率为<sup>[15-16]</sup>

$$\left( \frac{\partial T_l}{\partial t} \right)_i = \sum_{j=1}^n \frac{(T_{li} - T_{lj})}{r_{ij}^2 \cdot C_{li} \cdot \rho_{li}} \cdot \left[ (k_{lx_i} + k_{lx_j}) x_{ij} \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} + (k_{ly_i} + k_{ly_j}) y_{ij} \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial y_i} \right] \cdot \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (7)$$

式中,  $C_{li}$  为未冻土在粒子点  $i$  处的比热容值,  $\rho_{li}$  为未冻土土在粒子点  $i$  处的密度值。

同样的, 可以得到冻土区粒子点  $i$  对应温度变化率为<sup>[15-16]</sup>

$$\left( \frac{\partial T_s}{\partial t} \right)_i = \sum_{j=1}^n \frac{(T_{si} - T_{sj})}{r_{ij}^2 \cdot C_{si} \cdot \rho_{si}} \cdot \left[ (k_{sx_i} + k_{sx_j}) x_{ij} \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} + (k_{sy_i} + k_{sy_j}) y_{ij} \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial y_i} \right] \cdot \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (8)$$

式中,  $k_{sx_i}$  和  $k_{sy_j}$  分别为冻土的  $x$  方向和  $y$  方向的热传导系数在粒子点  $i$  和  $j$  处的值,  $T_{si}$  和  $T_{sj}$  分别为粒子点  $i$  和  $j$  处的温度值,  $C_{si}$  为冻土在粒子点  $i$  处的比热容值,  $\rho_{si}$  为冻土在粒子点  $i$  处的密度值。

经过数值离散将复杂的偏微分方程转换成与其相等价的一组常微分方程组, 在计算域内的每一个粒子点处对应一个常微分方程, 即粒子点  $i$  处的温度变化率可以由其最近相邻粒子点上的场量信息进行加权求和近似, 从数学角度上看这种加权近似得到的等式是一个常微分方程, 因此最终可以将连续形式的偏微分方程转化为等效的已知初始条件的常微分方程组进行求解。

通过使用标准的时间积分算法, 如跳蛙法、预测-校正法和龙格-库塔法等可以很容易对常微分方程组进行数值积分, 并计算出每一个粒子点对应的变量场<sup>[17-18]</sup>, 对于显式时间积分方法其格式如下, 即

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \Delta t \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^n, \quad (9)$$

式中, 上角标  $n+1$  表示第  $n+1$  时间步, 上角标  $n$  表示第  $n$  时间步, 下角标  $i$  表示第  $i$  粒子点。

与其他显式时间积分方案一样, 时间步长的选取对计算的稳定性至关重要, 为了获得经济合理的时间步长, 据 Clear 等<sup>[18]</sup>的研究报告选用如下的公式获得计算需要的时间步长, 即

$$\Delta t = \beta h^2 / k, \quad (10)$$

式中, 计算参数  $\beta$  的选取决定了数值积分的稳定性, 为避免计算结果发散的同时保证计算速度不至于过慢, 本文计算中  $\beta$  取 0.1,  $h$  表示核函数的光滑长度。

### 1.3 相变潜热的数值实施

在每一时间步积分开始前, 已知的信息是计算域内每一个粒子点对应的温度值、材料热物理参数、表明计算域内所有粒子点相态的记号向量  $L\_S(i)$ 、潜热  $L$  (每个粒子点对应的潜热为一常数) 以及相变粒子的潜热累加变化量  $Q\_heat(i)$ , 当然函数逼近所需要的核函数、光滑长度等信息也是已知的。需要说明的是本文中, 记号向量  $L\_S(i)$  里的元素为 -1 时表示粒子点为固态, +1 表示为固态, 而 0 表示粒子点正处于相变状态。这样关于相变潜热的数值计算过程可以按如下的步骤进行, 即: ①第  $n$  时间步一开始, 根据一个标准子程序计算当前时间步的计算域内每个粒子的温度变化率。②根据第  $n$  步得到的温度变化率, 更新计算域内相变粒子的潜热累加变化量  $Q\_heat(i)$ , 若某一个粒子点的潜热累加变化量等于其对应的相变潜热  $L$ , 改变这些相变粒子在记号向量  $L\_S(i)$  中的记号 (随之重新赋予其新的材料参数, 如对于凝固相变过程, 则给粒子赋予的是固相状态下的材料属性; 而融化相变过程, 则要给粒子重新赋予的是液相材料参数); 如果其潜热累加变化量不等于该粒子点对应相变潜热, 依然保持其粒子的记号为 0; 对于其他粒子依然其原有特性。③根据第  $n$  步得到的温度变化率, 更新计算域内所有粒子点的温度值, 依据所设定的相变标准遍历所有粒子点判定出满足相变标准的粒子, 然后在记号向量  $L\_S(i)$  中改变其记号为 0, 表明计算域内又有一个粒子已经进入相变状态, 然而这时其潜热尚未完全释放 (或吸收), 在随后的热传输过程中将这些新达到相变状态的粒子失去 (或得到) 的热能存储到向量  $Q\_heat(i)$  中。④判定出计算域内所有的相变粒子, 强制赋予其温度值为相变温度, 然后进入下一时间步循环。

明显的, 整个计算过程中在固相和液相粒子之间一直存在着一些粒子, 其温度是相变温度但是潜热并没有完全失去 (或得到), 在导热过程中始终需要检测它们的潜热累加改变量。可以看出, 在已有导热程序的基础上添加一个判断粒子点得失潜热的子程序并对其稍作修改, 便可以轻易实现相变导热问题的数值计算。

## 2 数值验证

### 2.1 半无界空间上的凝固问题

一维半无限空间上液体初始时刻温度  $T_i$  均匀分布, 它高于相变温度  $T_m$ , 被限制在  $x > 0$  的半空间内液

体在时间  $t=0$  时,  $x=0$  的界面温度降到  $T_0$ , 它低于相变温度  $T_m$ , 且当时间  $t > 0$  时, 边界温度一直保持在  $T_0$ , 假定凝固过程忽略体积的变化, 则可以获得该问题积分形式的解析解。然而在积分求解半无限计算域上的温度分布规律及确定冻结锋面的位置时需要计算参数  $\lambda$ , 该参数  $\lambda$  是在给定材料的热物理参数及边界条件后求解下式得到, 即<sup>[14]</sup>

$$\frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}(\lambda)} + \frac{k_l}{k_s} \left( \frac{\alpha_s}{\alpha_l} \right)^{0.5} \frac{T_m - T_i}{T_m - T_0} \frac{e^{-\lambda^2 (\alpha_s / \alpha_l)}}{\operatorname{erfc}[\lambda (\alpha_s / \alpha_l)^{0.5}]} = \frac{\lambda L \sqrt{\pi}}{C_s (T_m - T_0)} \quad (11)$$

式中  $k_l$  和  $k_s$  分别是液相和固相的热传导系数;  $\alpha_l$  和  $\alpha_s$  分别表示液相和固相的热扩散系数;  $C_s$  表示固相的比热容;  $L$  表示材料的相变潜热。作为对数值计算进行评价的算例, 为方便地获得一个作为检测标准的解析解, 参照 Carslaw 等<sup>[14]</sup>的有关做法对式 (11) 进行简化, 即假定所计算材料液相和固相的热物理参数分别为

$$\begin{cases} k_l = k_s = 1, \\ \alpha_l = \alpha_s = 1, \\ C_s = C_l = 1, \\ \rho_l = \rho_s = 1, \end{cases} \quad (12)$$

式中,  $C_l$  表示液相的比热容。

因此, 式 (11) 可以简化为<sup>[14]</sup>

$$T_m - T_0 = \operatorname{erf}(\lambda) e^{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda L \sqrt{\pi}}{C_s} + \frac{(T_i - T_m) e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erfc}(\lambda)} \right] \quad (13)$$

式 (13) 是一个复杂的超越方程, 对其进行求解获得参数  $\lambda$  的显式表达式的过程十分繁琐, 为了获温度分布的显式表达式的可行做法是指定  $\lambda = 1$ ,  $T_m = 1.0$ ,  $T_i = 1.2$ , 进而求解式 (13) 得到  $T_0 = 0.1906$ 。

在假定条件式 (12) 及简化计算的基础上, 可以得到固相域温度分布规律为

$$T_s(x, t) = T_0 + \frac{(T_m - T_0)}{\operatorname{erf}(\lambda)} \operatorname{erf}(x/2\sqrt{t}) \quad ; \quad (14)$$

液相域温度分布规律为

$$T_l(x, t) = T_i + \frac{(T_m - T_i)}{\operatorname{erfc}(\lambda)} \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{t}) \quad ; \quad (15)$$

移动界面的位置函数为

$$x(t) = 2\lambda\sqrt{t} \quad (16)$$

图 1 分别给出了不同时刻采用 SPH 算法和解析算法得到的温度分布特征, 其中温度曲线斜率显著变化的点代表了移动界面的位置。从中可以看出, 采用 SPH 算法得到的数值解和解析解有着很好的吻合度, 它能够很好地模拟计算域内冻结锋面两侧的温度分布特征, 因此基于无网格 SPH 算法计算相变问题是可靠有

效的, 计算精度令人满意。

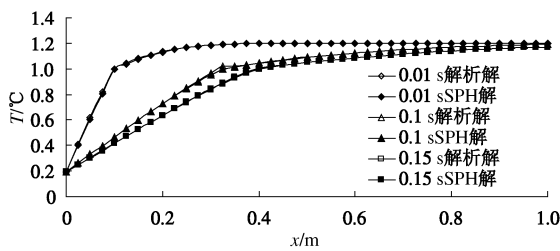


图 1 不同时刻 SPH 解和解析解的温度分布特征

Fig. 1 Temperature distribution of SPH solution and analytical solution at different time

表 1 不同时刻 SPH 算法下的固液界面位置

Table 1 Position of solid-liquid interface using SPH algorithm at different time

时间/s	解析解/m	SPH 数值解/m	误差/%
0.01	0.1000	0.1000	0
0.10	0.3162	0.3125	1.20
0.15	0.3873	0.3875	0.05

表 1 给出了和图 1 对应的 3 个不同时刻点条件下采用 SPH 算法捕捉到的冻结锋面位置,可以看出  $t=0.1$  s 时误差最大,即 1.2%,其余两个时刻点的误差远小于 0.1 s 时刻的,事实上表 1 进一步验证了 SPH 算法求解过程的有效实用性。

2.2 试验对比

为验证伴有相变潜热效应的土体冻结模型的有效性和可行性,使用文献[19]中封闭条件下土的单向冻结试验数据作为一个参照和数值解做对比,同时计算了不考虑相变的土体冻结模型所对应的数值解。试验中所使用的土柱基本几何参数及初边界条件如表 2 所示。

表 2 冻结试验中的土柱及边界条件参数

Table 2 Properties of soil column and boundary conditions in freezing tests

土性	土柱	土柱	初始	上部	下部	含水率
	直径/cm	高度/cm	温度/°C	温度/°C	温度/°C	/%
粉质黏土	15	20	1.0	-5	1.0	18

试验中采用的土样为东北某高速铁路站场路基的细颗粒土,其制作参照 TB 10102—2010《铁路工程土工试验规程》中规定进行,土样含水率为 18%,其对应的粉质黏土密度为  $\rho_s = \rho_l = 1800 \text{ kg/m}^3$ ,热物理参数为  $k_l = 3.05 \text{ J/(m}\cdot\text{s}\cdot\text{K)}$ ,  $k_s = 2.68 \text{ J/(m}\cdot\text{s}\cdot\text{K)}$ ,  $C_l = 2124 \text{ J/(m}\cdot\text{s}\cdot\text{K)}$ ,  $C_s = 2508.5 \text{ J/(m}\cdot\text{s}\cdot\text{K)}$ ,相变潜热  $L = 33500 \text{ J/kg}$ ,依据 3 组冻结试验测试结果的平均值,试验选用的土样冻结相变温度为  $-0.25^\circ\text{C}$ 。参照相关文献[18]的做法模拟上述单向冻结试验,计算中边界条件和初始条件和试验设定的完全一致。为了获得较高的计算精度,计算域中均匀的布置了 120701 个粒子,粒子间

距两个方向均是 0.0005 m,时间步长是 0.01 s,核函数的光滑长度取为 0.0006 m。

从图 2 中可以看出,计算中考虑相变释放的潜热效应时,通过 SPH 数值模拟计算出的冻结锋面的演化规律与试验实测的冻结深度变化规律吻合的更好一些,这主要体现在:在冻结前期阶段考虑相变的数值解最大误差不超过 10%,不考虑相变的最大误差为 40%;另外,不考虑相变效应时,冻结锋面位置在 20 h 左右就会稳定,而考虑冻结相变效应时,冻结锋面的位置大概在 35 h 左右达到稳定,这和实测数据表现出的特征是一致的,导致这种现象的原因是相变释放的潜热使土体冷却变慢,即意味着需要额外更多的时间将潜热带出土体。因此从以上分析中可知,考虑相变潜热的土体冻结模型结果和实际情况更为符合一些。

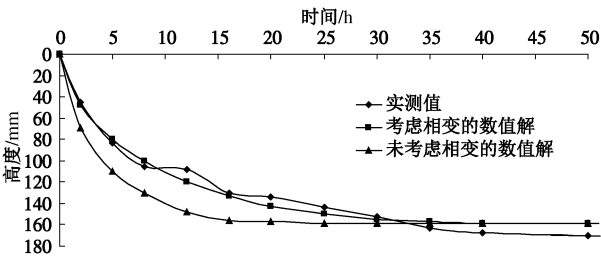
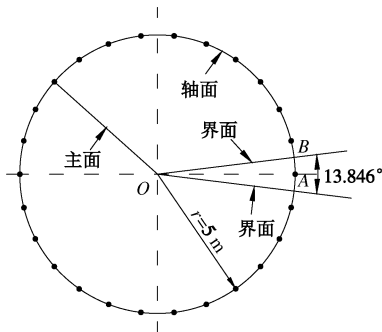


图 2 SPH 解和试验测试相对应的的冻结锋面演化特征

Fig. 2 Evolution profile of freezing front corresponding to SPH solution and tests

3 数值算例

在实际工程中冻结孔一般会根据工程的需要沿圆周等间距布置,因此在冻结壁形成过程中的温度场具有对称性,在数值模拟时可以取一个扇形子域进行计算(如图 3(b)所示),而得到的温度场分布演化特征可以表示整个冻结壁成型过程中的温度场演变规律。在图 3(a)中主面是指通过井筒中心与冻结管中心的垂直平面,界面是指井筒中心与两相邻冻结管中心连线中点所构成的垂直平面,轴面是指两相邻冻结管中心的环形连线所构成的垂直平面。作为一个数值近似计算,冻结孔可以处理为一个计算域中的点,因为相比整个计算域而言冻结孔的横截面积是非常小的。



(a) 井筒冻结孔单圈布置图

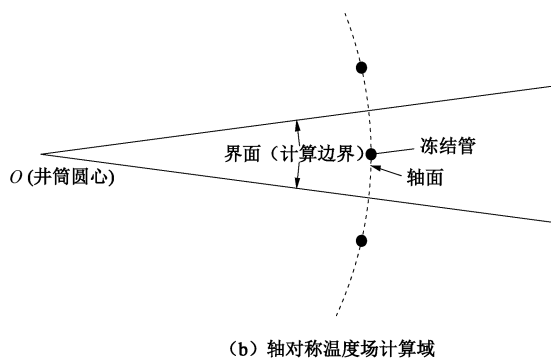


图 3 计算几何模型

Fig. 3 Computational geometry model

工程中遇到的一类典型中粗砂的热物理参数为  $k_1=1.86 \text{ J}(\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{K})$ ,  $k_s=2.56 \text{ J}(\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{K})$ ,  $C_1=1465.1 \text{ J}(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $C_s=1088.4 \text{ J}(\text{kg}\cdot\text{K})$ ,  $\rho_s=\rho_l=2090 \text{ kg/m}^3$ ,  $L=52875.8 \text{ J/kg}$ <sup>[20]</sup>。其定解初始条件是  $15^\circ\text{C}$ , 计算边界(界面)为一个绝热边界, 扇形计算子域的另外一个边界恒为  $15^\circ\text{C}$ 。

图 4 给出了冻结开始后 6 个不同时间点对应的冻结管周边温度分布特征, 其中图 4 中的刻度表示以井筒中心为极点的径向坐标。在冻结前地层的初始温度是均匀分布的, 冻结管中低温媒介循环流动会逐渐带走土壤中的热能, 以致在每个冻结管周围形成冻结土柱。在冻结开始的前期, 冻结土柱(即相变温度等值线)是圆形的, 然而受相邻冻结管相互作用的影响, 冻结土柱变为椭圆形且可以发现这个椭圆的形心与冻结管并不重合。可以看到大约在冻结开始后的 40 d 左右时, 两个相邻冻结管的冻结土柱交圈(即相交接), 交圈以后冻结土柱的形心趋于和冻结管重合。冻结过程中, 除了  $0^\circ\text{C}$  等温线外冻结管周边的等温线呈现出向井筒形心内凹的现象, 且计算时间跨度的后期  $0^\circ\text{C}$  等温线也呈现出内凹的趋势, 同时可看出两个冻结管之间的界面对称线及其周边的等温线是正交垂直的, 事实上, 这种垂直正交现象是冻结管沿轴面等间距布置及等冻结温度荷载共同作用下的对称效应的必然体现。

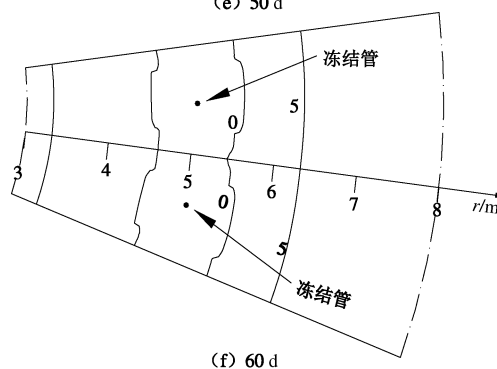
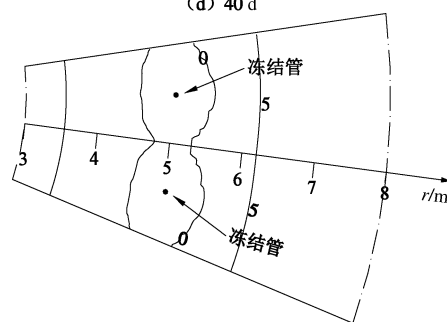
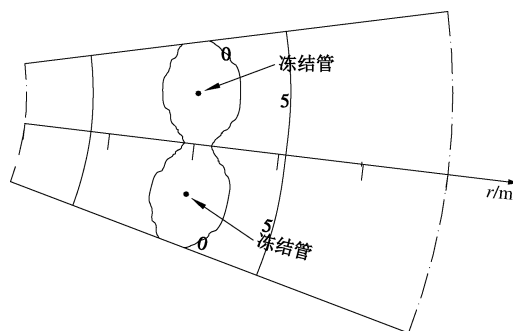
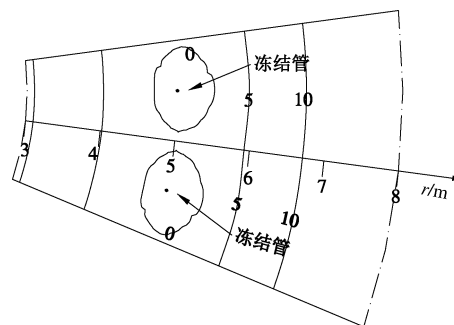
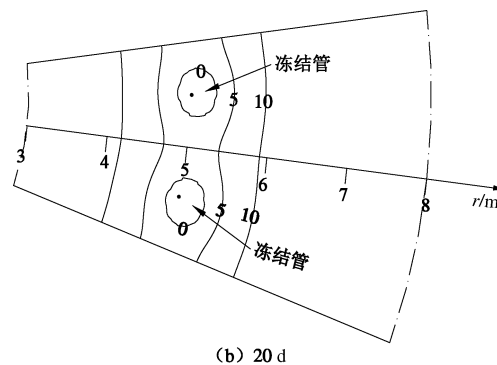
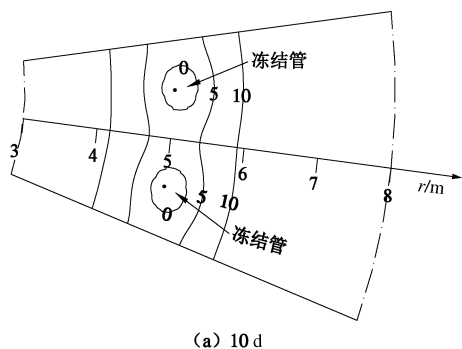


图 4 不同时间点冻结管周边的温度演化规律

Fig. 4 Temperature evolution profile near freezing pipe at different time points

图 5 给出了不同时刻沿两不同对称面的温度演化特征, 其中图 5 (a) 中横坐标  $r=5$  m 对应的是冻结管的位置, 图 5 (b) 中横坐标  $r=5$  m 对应的则是过冻结管的轴面对应的位置。从图 5 (a) 中可以看出, 以冻结管所在的轴面为参考面, 其两侧土体的冻结速度随时间逐渐的变慢, 并且  $r < 5$  m 对应范围内的冻结速度明显的要快于  $r > 5$  m 对应范围内的, 温度并不以  $r=5$  m 为对称面呈现出对称分布。通过和图 5 (a) 的对比, 从图 5 (b) 中可以发现同一时刻界面上的土体冻结程度显著的低于主面上的冻结程度, 事实上这种现象很容易地解释, 即离冻结管越近冻结效果越好。同时也可以看出, 沿着两不同对称面 (即  $OA$  主面和  $OB$  界面) 的冻结特征是完全一致的, 即同一时刻沿着径向方向, 距离  $r=5$  m 轴面越近的区域冻结程度越高; 若距  $r=5$  m 轴面相同的距离, 离井筒圆心近的冻结效果更好一些。

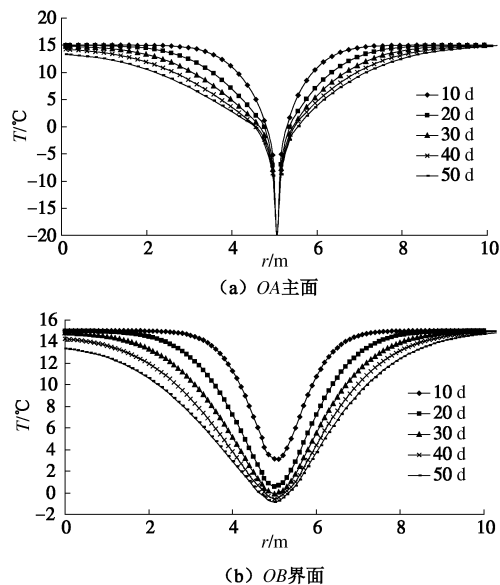


图 5 中粗砂介质两不同对称面上的温度演化特征

Fig. 5 Temperature evolution characteristics of two different symmetric planes in sand medium

在井筒建设中, 冻结管往往会穿越不同的土层, 不同类型的土体介质的热物理性质差异很大, 为了安全起见分析相同冻结条件下的不同土壤的冻结效果十分必要。这里取常见的一类典型黏土作为对比, 其热物理参数为  $k_1=1.51$  J (m·s·K),  $k_s=2.05$  J (m·s·K),  $C_l=1548.8$  J (kg·K),  $C_s=1172.1$  J (kg·K),  $\rho_s=\rho_s=2050$  kg/m<sup>3</sup>,  $L=530718$  J/kg<sup>[19]</sup>。需要说明的是, 定解条件和计算子域与中粗砂的一样, 计算结果绘成图 6。

图 6 给出的是黏土介质两不同对称面上的温度演化特征。通过和图 5 对比, 可以看出相冻结条件下中粗砂介质的冻结效果会好一些, 这种现象可以从材料介质的 3 个重要热物理参数 (热扩散系数、相变潜热和比热容) 上解释。计算得到: 中粗砂未冻时和已冻

时的热扩散系数分别为  $6.07 \times 10^{-7}$  和  $1.13 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, 而黏土未冻时和已冻时的热扩散系数分别为  $4.76 \times 10^{-7}$  和  $8.53 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s。明显的, 中粗砂已冻或未冻状态下的热扩散系数均大于黏土的热扩散系数, 因此相同条件下中粗砂介质内部热能传播快一些, 即相同时间内冻结管会从中粗砂层带走更多的热能。潜热作为衡量物质从一相转为另一相所吸收或放出热量, 这意味着在相同冻结条件下物质的潜热越大, 则需要越长的时间才能得到相同的冻结效果, 比热容在很多文献中相对于潜热称之为显热, 两者之和表示物质所蕴含的总热量, 这样冻结情况下 1 kg 的中粗砂需要释放的总热量为  $52875.8+1465.1\Delta T$  J ( $\Delta T$  表示温度改变量), 相比之下黏土需要释放的总热量为  $530718+1548.8\Delta T$  J。因此, 相同冻结条件下中粗砂的冻结程度会高于黏土介质。

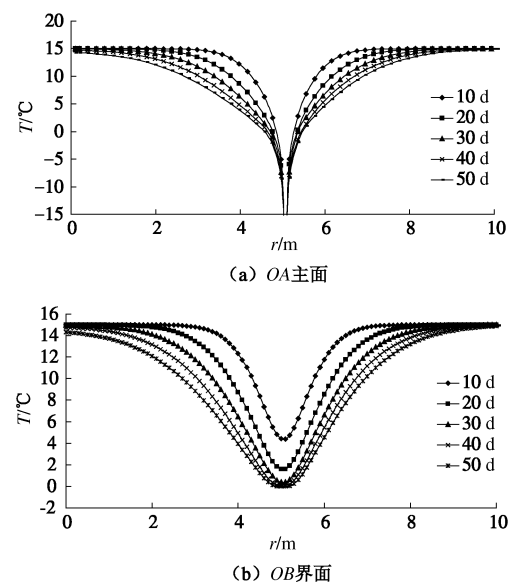


图 6 黏土介质两不同对称面上的温度演化特征

Fig. 6 Temperature evolution characteristics of two different symmetric planes in clay medium

冻结孔的设置形式对冻结效果有很大影响, 有时为了尽快推进工程进度必须在短时间内获得满足设计要求的井筒冻结壁, 多孔交错布置冻结孔作为一种常用的方案, 人们特别关注其冻结效果。本文考虑三孔及四孔交错相邻的情况, 假定所有冻结孔为双圈布置, 外圈直径为 5 m, 内圈直径为 4.2 m, 三孔和四孔的外圈两相邻冻结孔的对应的圆心角为  $13.846^\circ$  (即相当于等间距布置 26 个冻结管), 而内圈两相邻冻结孔对应的圆心角分别为  $13.846^\circ$  和  $6.923^\circ$  (即等间距布置 52 个冻结管), 具体的布置方案可见图 7, 其中图 7 (a) 和图 7 (b) 中的  $OA$  和  $OB$  和图 3 (a) 中的  $OA$  和  $OB$  是相对应的。为了与单圈等间距布置方案相比较, 土性及定解条件与上述中粗砂一致, 两种冻结孔布置方案的计算结果分别绘成图 8, 9。

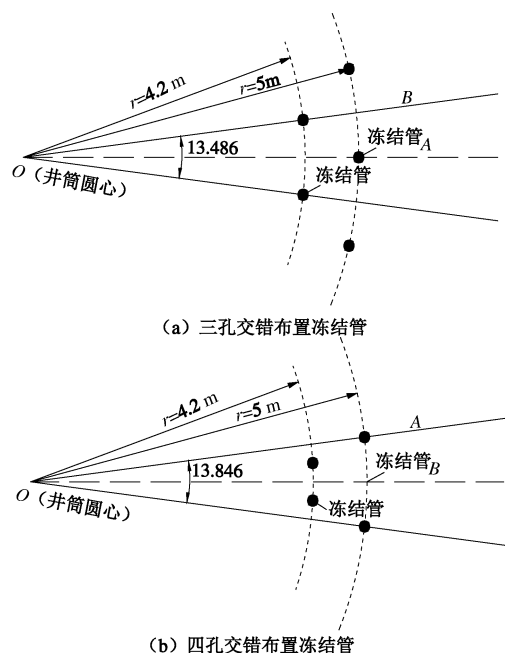


图7 冻结管交错分布示意图

Fig. 7 Staggered distribution of freezing pipe

图8给出了三孔交错布置方案条件下中粗砂介质中两不同对称面上的温度演化特征。从图8中可以看出,冻结壁厚度的增长速度比单圈等间距布置方案的明显要快很多,这是内圈和外圈上设置的交错相邻冻结管(多个冷源)共同作用的结果。沿着两个对称面(OA面和OB面)的两圈之间区域(即 $4.2\text{ m} < r < 5\text{ m}$ )的土体冻结程度最高,温度下降最快,这是相邻冻结管的相互强影响区,两圈之外区域的温度曲线的形状与单圈等距设置冻结管情况下的温度曲线是类似的,只是温度降低的速度有所加快。

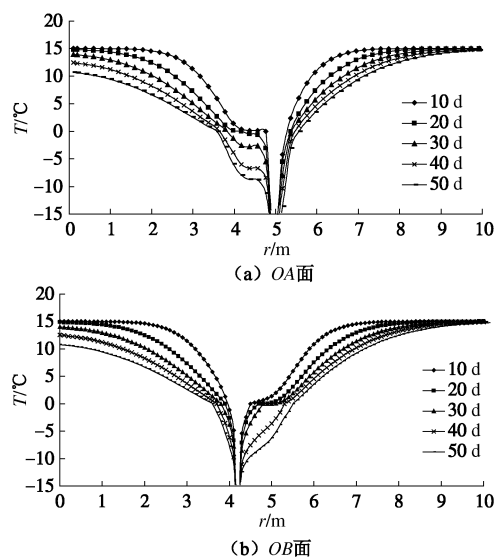


图8 中粗砂介质三孔交错布置方案条件下两不同对称面上的温度演化特征

Fig. 8 Temperature evolution characteristics of two different symmetric planes in sand medium under three staggered layout schemes

图9给出了四孔交错布置方案条件下中粗砂介质中两不同对称面上的温度演化特征。从中可以看出,由于内圈上冻结管设置密度增加一倍,相比三孔交错布置方案,其冻结效果明显要好,冻结壁的厚度增加速度明显要快,且其冻结程度明显要高(即 $4.2\text{ m} < r < 5\text{ m}$ 之间区域的温度明显地低一些),两圈之外的冻结扩展速度也快一些;冻结壁的厚度及两圈之间(即 $4.2\text{ m} < r < 5\text{ m}$ )的温度在冻结开始后大约30 d便趋于稳定,其趋于冻结管温度(即 $-20^\circ\text{C}$ )的速度越来越慢。

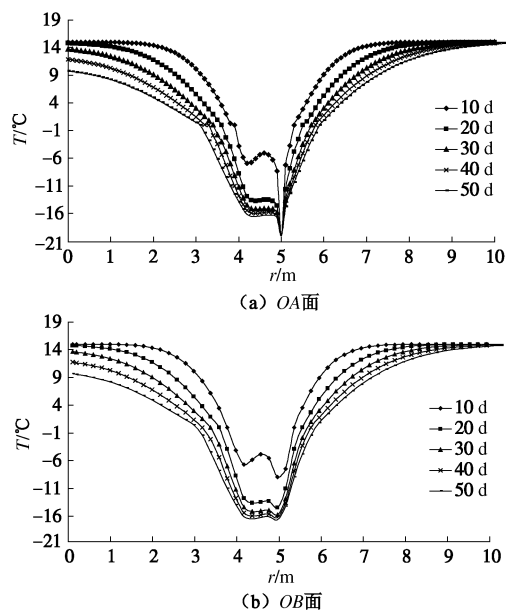


图9 中粗砂介质四孔交错布置方案条件下两不同对称面上的温度演化特征

Fig. 9 Temperature evolution characteristics of two different symmetric planes in sand medium under four staggered layout schemes

## 4 结 论

(1) 尝试将光滑粒子法应用于相变导热问题的数值计算,在已有导热程序基础上嵌入考虑相变潜热释放的子程序,其程序实施过程是简单直接的,从而实现了光滑粒子法在相变问题求解中的应用。

(2) 使用一个已有解析解的算例进行数值验证,计算表明:采用SPH算法得到的数值解和解析解有着很好的吻合度,它能够很好地模拟计算域内冻结锋面两侧的温度分布特征,并且很好地捕捉到冻结锋面位置,表明了光滑粒子算法的可靠性、有效性。

(3) 针对煤矿井筒建设中冻结壁的成形过程进行分析,大约在冻结开始后40 d左右相邻冻结管形成的冻结土柱开始交圈,交圈后 $0^\circ\text{C}$ (即相变温度)等值线形状相比冻结前期发生明显变化;冻结过程中,除了 $0^\circ\text{C}$ 等温线外冻结管周边的等温线呈现出向井筒形心内凹的现象,且计算时间跨度的后期 $0^\circ\text{C}$ 等温线



也呈现出内凹的趋势。

(4) 冻结孔的设置形式对冻结效果有很大影响, 从冻结效果的角度上看双圈四孔交错布置方案最好, 双圈三孔交错布置方案次之, 单圈等间距方案最差; 文中规则的交错布置方案得到的结果对估算因施工造成的孔位不规则分布时的冻结效果具有一定的参考价值。

#### 参考文献:

- [1] ZIENKIEWICZ O C, PAREKH C J, WILLS A J. The application of finite elements to heat conduction problems involving latent heat[J]. *Rock Mechanics*, 1973, **5**(2): 65 - 76.
- [2] COMINI G, GUIDICE S D, LEWIS R W, et al. Finite element solution of non - linear heat conduction problems with special reference to phase change[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1974, **8**(3): 613 - 624.
- [3] MORGAN K, LEWIS R W, ZIENKIEWICZ O C. An improved algorithm for heat conduction problems with phase change[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, **12**: 1191 - 1195.
- [4] DEL GIUDICE, COMINI G, LEWIS R W. Finite element simulation of freezing processes in soils[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1978, **2**(3): 223 - 235.
- [5] DALHUIJSEN A J, SEGAL A. Comparison of finite element techniques for solidification problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986, **23**(10): 1807 - 1829.
- [6] MORGAN, K, LEWIS, R. W, ZIENKIEWICZ, O. C. An improved algorithm for heat conduction problems with phase change[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, **12**: 1191 - 1195.
- [7] VOLLER V R, SWAMINATHAN C R. General source-based method for solidification phase change[J]. *Numerical Heat Transfer (Part B)*, 1991, **19**: 175 - 189.
- [8] SWAMINATHAN C R, VOLLER V R. On the enthalpy method[J]. *International of Journal Numerical Method Heat Fluid Flow*, 1993, **3**: 233 - 244.
- [9] BECKETT G, MACKENZIE J A, ROBERTSON M L. A moving mesh finite element method for the solution of two-dimensional stefan problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, **168**(2): 500 - 518.
- [10] JANA S, RAY S, DURST F. A numerical method to compute solidification and melting processes[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2007, **31**(1): 93 - 119.
- [11] TAVAKOLI R, DAVAMI P. Unconditionally stable fully explicit finite difference solution of solidification problems[J]. *Metallurgical & Materials Transactions B*, 2007, **38**(1): 121 - 142(22).
- [12] YANG H, HE Y. Solving heat transfer problems with phase change via smoothed effective heat capacity and element-free Galerkin methods[J]. *International Communications in Heat & Mass Transfer*, 2010, **37**(4): 385 - 392.
- [13] CRANK J. Free and moving boundary problems[M]. Oxford: Clarendon Press, 1984.
- [14] CARSLAW H S, JAEGER J C. Conduction of heat in solids[M]. Oxford: Clarendon Press, 1959.
- [15] MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics[J]. *Reports on Progress in Physics*, 2005, **68**(8): 1703 - 1759.
- [16] MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics and its diverse applications[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2012, **44**(1): 323 - 346.
- [17] LIU M B, LIU G R. Smoothed particle hydrodynamics (SPH)[J]. *Archives of Computational Methods in Engineering State of the Art Reviews*, 2010, **17**(1): 25 - 76.
- [18] CLEAR P W, MONAGHAN J J. Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, **148**(1): 227 - 264.
- [19] 刘乃夫. 寒区高速铁路路基填料冻结特性实验研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2015. (LIU Nai-fu. Experimental study on freezing characteristics of subgrade fillings of high-speed railway in cold regions[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2015. (in Chinese))
- [20] 徐学祖, 王家澄, 张立新. 冻土物理学[M]. 北京: 科学出版社, 2001. (XU Xue-zu, WANG Jia-cheng, ZHANG Li-xin. Permafrost physics[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese))