

DOI: 10.11779/CJGE201610007

条形粗糙基础极限承载力求解与误差分析

韩冬冬^{1, 2, 3}, 谢新宇^{*1, 2, 3}, 王忠瑾², 郑凌透^{1, 2, 3}, 黄利^{1, 3}

(1. 浙江大学滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310058; 2. 浙江大学宁波理工学院土木建筑工程学院, 浙江 宁波 315100;
3. 浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室, 浙江 杭州 310058)

摘要: 利用滑移线法计算了粗糙条形基础极限承载力, 计算时考虑了土的黏聚力 c 、内摩擦角 φ 和土体重度 γ 的共同作用, 避免了对破裂面形状的人为假定, 并满足所有边界条件。将数值计算结果与其他学者的解答进行了对比, 证明了解答的准确性。分析了地基承载力系数 N_y 的影响因素, 证实了 N_y 除了与地基摩擦角 φ 有关外, 还与超载比 λ 有关。绘制了不同 φ 值下 N_y 随 λ 的关系曲线, 给出了 N_y 的拟合公式, 计算结果表明拟合公式的误差在 $\pm 4\%$ 以内。最后对传统叠加方法计算承载力与精确解之间的误差进行了计算, 总结了不同 φ 值时误差 ε 随 λ 的变化规律, 发现叠加计算结果比精确解小, 且最大误差出现在 λ 介于 0.1~1 之间。

关键词: 极限承载力; 条形基础; 塑性分析; 滑移线法; 数值分析

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2016)10-1789-08

作者简介: 韩冬冬(1983-), 男, 博士研究生, 主要从事土力学及基础工程等方面的研究。E-mail: hdd-5217@163.com。

Solution and error evaluation for bearing capacity of rough strip footings

HAN Dong-dong^{1, 2, 3}, XIE Xin-yu^{1, 2, 3}, WANG Zhong-jin², ZHENG Ling-wei^{1, 2, 3}, HUANG Li^{1, 3}

(1. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 2. School of Civil Engineering & Architecture, Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo 315100, China; 3. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: The slip-line method is used to calculate the bearing capacity of rough strip footing on ponderable soil. This method takes account of the influence of cohesion c , friction angle φ and unit weight γ of soil in one failure mechanism, and thus avoids assuming the shape of slip surfaces. Moreover, the solution of this method strictly satisfies all the given boundary conditions. The accuracy of the solution is proved by comparing with the published results. The investigations on the influence factors of N_y show that the bearing capacity factor N_y of the rough strip footing is related to the surcharge ratio λ besides the friction angle φ . A curve-fitting-based formula is proposed to get the exact N_y on the basis of the curves between N_y and λ under different φ . The results from the suggested formula have the maximum errors within $\pm 4\%$. Finally, the errors between the bearing capacity obtained by the superposition method and the exact solutions are evaluated. The relationship of the error ε and λ under different φ reveals that the superposition results are less than the exact ones with the largest error occurring when λ varies between 0.1 and 1.

Key words: bearing capacity; strip footing; plastic analysis; slip-line method; numerical analysis

0 引言

条形基础在竖向荷载作用下, 其极限承载力公式如下:

$$q_u = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma BN_y, \quad (1)$$

式中, q_u 为极限承载力, c , q , γ 和 B 分别代表土的黏聚力、基底面以上等效荷载、土的重度和基础宽度。 N_c , N_q 和 N_y 分别代表与 c , q 和 γ 相关的承载力系数。该公式由 Terzaghi^[1]提出, 并采用叠加方法计算承载力系数 N_c , N_q 和 N_y 。当计算 N_c , N_q 时不考虑土体重

度 ($q \neq 0$, $c \neq 0$, $\gamma = 0$), 而 N_y 则按照无地面超载的粗颗粒土进行求解 ($q=0$, $c=0$, $\gamma \neq 0$)。

由于 Terzaghi 计算承载力时采用了两种破坏模式的叠加, 而基础的真实破坏模式是在 q , c 和 γ 共同作用下产生的, 故计算结果与精确解必然有差别。要得到精确的解答, 就应该在同一破坏模式下对承载力进行求解, 避免对极限状态破裂面的形状作人为假定而产生误差。此外, Chen^[2]、Michałowski^[3]、Silvestri^[4]

收稿日期: 2015-10-07

*通讯作者 (E-mail: xiexinyu@zju.edu.cn)

提出,地基承载力和承载力系数 N_y 不仅与土的内摩擦角 φ 有关,还与 q , c , γ 和 B 中一个或几个参数有关,因此,要得到精确的承载力计算结果,就需要研究 N_y 与这些参数之间的关系。肖大平等^[5]和 Zhu 等^[6]分别发现和证明了在竖向荷载作用下,当 $\gamma B / (c + q \tan \varphi)$ 为定值时, N_y 只与土的内摩擦角 φ 有关。在叠加产生的误差分析方面, Davis 等^[7]、Bolton 等^[8]研究认为叠加计算结果相对保守,用于设计是偏于安全的。但对于承载力叠加产生的误差受哪些因素影响,误差的范围有多大,目前还没有定量的研究。

本文采用滑移线方法计算条形刚性基础极限承载力,并采用有限差分方法编制数值计算程序,避免了对滑移线形状的人为假定,计算结果满足所有的边界条件和对称性要求,进而得到极限承载力的精确解。将数值计算结果与其他学者对比,分析地基承载力系数 N_y 的影响因素,并分析传统叠加方法与精确解之间的误差范围及误差的影响参数。

1 承载力问题的等效解答

目前学者达成的共识是地基承载力系数 N_c , N_q 满足如下关系式:

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi. \quad (2)$$

将式(2)代入式(1),可以得到如下公式:

$$q_u + c \cot \varphi = (q + c \cot \varphi) N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_y. \quad (3)$$

公式两边同时除以 γB , 得到

$$p_u = \lambda N_q + \frac{1}{2} N_y, \quad (4)$$

式中, $p_u = \frac{q_u + c \cot \varphi}{\gamma B}$, $\lambda = \frac{(q + c \cot \varphi)}{\gamma B}$ 。

式(4)为求解条形基础极限承载力的一般公式,该公式可以在同一破坏模式下求解地基承载力或极限承载力系数,而非采用 Terzaghi 建议的两种破坏模式相叠加的方式,因此避免了叠加带来的误差。Zhu 等利用临界滑动场法计算了地基承载力系数 N_y ,并将 p_u 定义为标准化承载力, λ 称之为超载比,计算结果表明,完全粗糙基础地基承载力系数 N_y 不仅与土的内摩擦角 φ 相关,也与超载比 λ 有关^[6]。但是 Zhu 等计算时假定基底下刚性核的角度为 $\pi/4 + \varphi/2$,因此造成数值计算结果与精确解产生误差。

本文采用滑移线方法求解地基承载力,基底及刚性核边界满足力学要求和对称性准则,从而避免了人为假定。计算得到的破坏模式和解答更接近真实解。

2 滑移线理论与计算方法

2.1 土体极限平衡状态时任一点的滑移线方程

选取 ox 坐标轴水平, oy 坐标轴垂直,如图 1 所示,图中任意一点 M 最大和最小主应力分别为 σ_1 和 σ_3 , 主应力 σ_1 的作用线与水平线之间的夹角为 η , 若土体满足莫尔-库仑屈服准则,则根据滑移线理论得到 M 沿 α 和 β 的滑移线微分方程为

$$\text{沿 } \alpha \text{ 线 } \begin{cases} dy = \tan(\eta - \mu) dx \\ d\sigma - 2\sigma \tan \varphi d\eta = \gamma(dy - dx \tan \varphi) \end{cases}, \quad (5)$$

$$\text{沿 } \beta \text{ 线 } \begin{cases} dy = \tan(\eta + \mu) dx \\ d\sigma + 2\sigma \tan \varphi d\eta = \gamma(dy + dx \tan \varphi) \end{cases}. \quad (6)$$

式中 $\sigma = 0.5(\sigma_1 + \sigma_3) + c \cot \varphi$, 称之为特征应力; $\mu = \pi/4 - \varphi/2$, 为两条滑移线与大主应力 σ_1 的作用方向线之间的夹角。

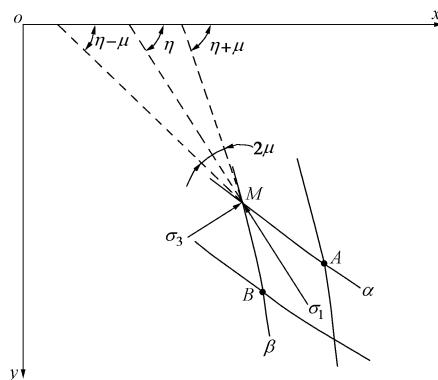


图 1 主应力与滑移线关系图

Fig. 1 Relationship between principal stresses and slip lines

2.2 有限差分公式的推导

数值计算方法中一般采用有限差分法来求解公式(5)和(6)的近似解。 M 点附近滑移线如图 1 所示, A 点和 B 点分别是 M 点附近 α 和 β 的滑移线上的已知点, 则沿 α 线 M 点的 dx , dy , $d\eta$, $d\sigma$ 可分别近似地表示为 $dx = x - x_A$, $dy = y - y_A$, $d\eta = \eta - \eta_A$, $d\sigma = \sigma - \sigma_A$, 代入式(5)并近似地令公式中 $\eta = \eta_A$, $\sigma = \sigma_A$, 则得到 α 滑移线的有限差分方程为

$$\begin{cases} y - y_A = (x - x_A) \tan(\eta_A - \mu) \\ \sigma - \sigma_A - 2\sigma_A(\eta - \eta_A) \tan \varphi = \gamma [(y - y_A) - (x - x_A) \tan \varphi] \end{cases}. \quad (7)$$

同样方式可得到 M 点沿 β 线的有限差分方程如下:

$$\begin{cases} y - y_B = (x - x_B) \tan(\eta_B + \mu) \\ \sigma - \sigma_B + 2\sigma_B(\eta - \eta_B) \tan \varphi = \gamma [(y - y_B) + (x - x_B) \tan \varphi] \end{cases}. \quad (8)$$

通过式(7)、(8)可解得 M 点 x , y , η , σ 的表达式:

$$x = \frac{x_A \tan(\eta_A - \mu) - x_B \tan(\eta_B + \mu) - (y_A - y_B)}{\tan(\eta_A - \mu) - \tan(\eta_B + \mu)}, \quad (9)$$

$$y = y_A + (x - x_A) \tan(\eta_A - \mu), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{1}{2(\sigma_A + \sigma_B) \tan \varphi} \left\{ 2(\sigma_A \eta_A + \sigma_B \eta_B) \tan \varphi - \right. \\ & \left. \sigma_A + \sigma_B + \gamma [y_A - y_B + (2x - x_A - x_B) \tan \varphi] \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\sigma = \sigma_A + 2\sigma_A(\eta - \eta_A) \tan \varphi + \gamma [(y - y_A) - (x - x_A) \tan \varphi]. \quad (12)$$

采用式(9)~(12)计算得到 x , y , η 和 σ 的精度取决于有限差分结点的间距和近似误差的影响。为了减少公式中沿 α 滑移线 $\eta = \eta_A$, $\sigma = \sigma_A$ 以及沿 β 滑移线 $\eta = \eta_B$, $\sigma = \sigma_B$ 这一近似的影响, 定义 $x' = x$, $y' = y$, $\eta' = \eta$ 和 $\sigma' = \sigma$, 并采用 $\eta = (\eta' + \eta_A)/2$, $\sigma = (\sigma' + \sigma_A)/2$ 更新公式(8)中的 η 和 σ , 用 $\eta = (\eta' + \eta_A)/2$, $\sigma = (\sigma' + \sigma_A)/2$ 更新公式(9)中的 η 和 σ , 根据更新后的计算参数重新计算 x , y , η 和 σ , 当计算结果满足以下条件时, 将结果返回作为收敛解答。

$$\begin{cases} |x - x'| \leq \text{Error} \cdot B \\ |y - y'| \leq \text{Error} \cdot B \\ |\eta - \eta'| \leq \text{Error} \\ |\sigma - \sigma'| \leq \text{Error} \cdot |\sigma| \end{cases}. \quad (13)$$

式中, Error 为计算允许的误差, 本文中将 Error 取值为 10^{-15} 。

采用有限差分法求解时, 首先从超载边界处开始计算, 根据边界上两个相邻已知点求解内部滑移线各点的 x , y , η 和 σ 值, 并依次逐步得到滑移线上每一点的解答。

2.3 求解思路

利用滑移线法求解粗糙刚性基础的过程如图 2 所示。图中 OE 为基础上部的一半, EC 为基础上中心线(也是对称轴)。求解时首先要对已知边界进行赋值, 基础角点 O 为奇异点, 该点可以看作长度等于 0 的 α 滑移线, 故该点存在多组 x , y , η 和 σ 值, 其数量取决于对过渡区顶角 FOG 划分的精度。边界 OA 上 x 坐标根据 OA 的划分数量和精度确定, y 和 η 等于 0, $\sigma = (q + ccot)/(1 - \sin\varphi)$, 故 OA 上所有点的 x , y , η 和 σ 值均为已知。对于完全粗糙基础, 若基础上存在滑移线, 则基底任意一点 F 大主应力 σ_1 方向与基础夹角为 $\pi/4 - \varphi/2$, 即 $\eta = 3\pi/4 + \varphi/2$, 因此, 基底的边界条件为 $\eta = 3\pi/4 + \varphi/2$, $y = 0$ 。若 H 点附近滑移线上点已知, 将以上两个参数代入式(10)即可得到 x 和 σ 的解答。

由于基础完全粗糙, 故基础上土体不可能全部处于屈服状态, 如何确定弹性区与塑性区的边界是关键问题。计算时先假定滑移线均延伸到了基础底, 对 O 点和 OA 边界赋值后即可沿 α 滑移线依次计算 α 滑移线与 β 滑移线交点的各参数, 并根据 OE 边界条件确

定基底应力状态。根据对称性要求, 最后一条滑移线与基础上中心线的交点 C 处没有剪应力, 故该点处最大主应力方向垂直($\eta = \pi/2$)。故当一点同时满足 $x = -B/2$ 和 $\eta = \pi/2$ 条件时, 该点对应的 β 滑移线 DC 即为弹性区与塑性区的边界。 DC 与基础上之间的区域为弹性区, 该区域内的滑移线不存在, 图 2 中用虚线表示。 DC 右侧部分为屈服区, 该区域存在真实的滑移线场。

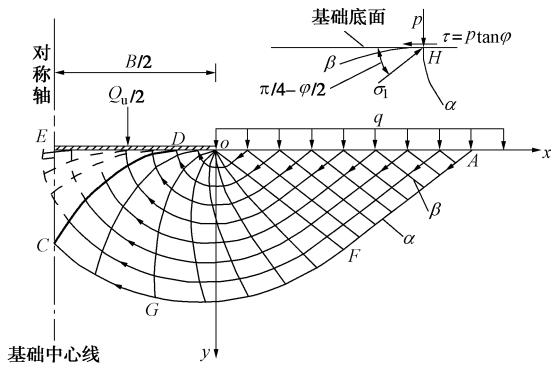


图 2 滑移线求解过程示意图

Fig. 2 Computing process by slip-line method

Martin^[9]采用滑移线法计算完全粗糙基础承载力时发现, 基础下土体弹性区存在两种类型, 一种类型是基础下存在一个完全的弹性区, 即弹性区与塑性区的边界通过基础角点(图 2 中 D 点与 O 重合), 另一种类型是基础下存在一个部分的弹性区, 即弹性区与塑性区的边界 DC 位于基础下某一点, 而非通过基础角点。Sun 等^[10]根据滑移线计算结果指出, 基础具体出现哪一种破坏形式与 φ 和 λ 有关。采用本文提出的滑移线构造方法能很好满足所有的边界条件, 破坏类型完全由计算结果决定, 而不需要人为的假定, 从理论上是严谨的。在确定 C 点的过程中, 需要对 OA 的长度进行反复计算, 本文计算时采用了 Martin^[9]建议的非线性方法。

地基的极限承载力采用下式计算:

$$q_u = \frac{Q_u}{B} = \frac{2 \int_{OD} \sigma_y dx + 2 \int_{DC} (\sigma_y dx - \tau_{xy} dy - dW)}{B}. \quad (14)$$

式中, dW 为楔形体 EDC 沿 DC 曲线微分的重量, σ_y 和 τ_{xy} 为 OD 和 DC 滑移线上任意一点 y 方向对应的正应力和剪应力, 可以通过以下公式计算得到

$$\begin{cases} \sigma_y = \sigma(1 - \sin\varphi \cdot \cos 2\eta) - c \cdot \cot\varphi \\ \tau_{xy} = \sigma \sin\varphi \sin 2\eta \end{cases}. \quad (15)$$

3 地基承载力系数 N_γ 的求解与对比

采用式(14)计算得到 q_u 以后, 即可求出 p_u 。数值计算结果发现, 当 φ 和 λ 为定值时, 不管 q , c , γ 和 B 如何变化, p_u 值均为定值。例如当土的内摩擦角

φ 为 30° , λ 取 0.5 时, 其不同的 q , c , γ 和 B 的计算结果如表 1 所示。

表 1 p_u 的计算结果表 ($\varphi=30^\circ$, $\lambda=0.5$)

Table 1 Computed results of p_u ($\varphi=30^\circ$, $\lambda=0.5$)

q /kPa	c /kPa	γ /(kN·m ⁻³)	B /m	q_u /kPa	p_u
10	0	20	1	402.77	20.14
20	0	20	2	805.55	20.14
10	0	10	2	402.77	20.14
10	5.77	10	4	795.43	20.14
5	2.89	20	1	397.89	20.14
20	2.89	20	2.5	1002.05	20.14

由此可见, 对于给定的 φ 和 λ 值, 对应的 p_u 为定值。因此根据公式(4)得到 N_γ 计算公式如下:

$$N_\gamma = 2(p_u - \lambda N_q) \quad (16)$$

对于给定的内摩擦角 φ , 当 λ 取不同值时, 可计算得到不同的 N_γ 值。计算 N_γ 时, 需要知道 N_q 的结果, 从式(16)可以看出, 只要 N_q 的表达式是 φ 或者 φ 和 λ 的函数, 则 N_γ 就与 φ 和 λ 相关。

Shield^[11]采用塑性理论研究地基承载力时指出, 对于无重土来说, N_q 和 N_c 是与基础粗糙度无关的独立系数, N_c 表达式可采用式(2)的形式。对于考虑土体后地基承载力系数 N_q 的解答, 采用的是 Prandtl^[12]给出的公式:

$$N_q = e^{\pi \tan \varphi} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (17)$$

目前多数学者提出 N_γ 的数值都是对应 $q=0$, $c=0$ 情况下的计算结果, 也就是本文 λ 等于 0 时的解答。本文与其他学者计算得到的 N_γ 值如表 2 所示。为了对比 N_γ 的变化范围, 表中同时列出了 $\lambda=\infty$ 时的数值计算结果。需要说明的是, 对于有重土, 由于程序计算时 $\lambda=0$ 和 $\lambda=\infty$ 数值上不允许, 为了解决这一问题, 本文用数值方法求解 $\lambda=0$ 和 $\lambda=\infty$ 对应 N_γ 时分别采用 $\lambda=10^{-10}$ 和 $\lambda=10^{10}$ 进行计算, 根据 Martin^[13] 的分析, 这一取值已经足够保证精度, 其结果可以看做是 N_γ 的

表 2 承载力系数 N_γ 值的计算结果比较

Table 2 Comparison of bearing capacity factor N_γ

φ ($^\circ$)	滑移线法				极限平衡法			极限分析法		
	本文 $\lambda=10^{-10}$	本文 $\lambda=10^{10}$	Bolton 等 ^[8]	Kumar ^[14]	Terzaghi ^[1]	Kumbhojkar ^[15]	Zhu 等 ^[16]	Michalowski ^[4]	Hjiaj 等 ^[17] 下限	Hjiaj 等 ^[17] 上限
5	0.113	0.495	0.62	0.114	0.50	0.144	0.107	0.18	0.1154	0.1196
10	0.433	1.447	1.71	0.430	1.20	0.559	0.453	0.71	0.4338	0.4552
15	1.181	3.283	3.17	1.173	2.50	1.520	1.309	1.94	1.1780	1.2378
20	2.839	6.905	5.97	2.822	5.00	3.641	3.367	4.47	2.8219	2.9612
25	6.491	14.327	11.6	6.458	9.70	8.342	7.864	9.77	6.4313	6.7379
30	14.754	30.382	23.6	14.683	19.70	19.129	17.579	21.93	14.5671	15.2372
35	34.476	67.740	51.0	34.308	42.40	45.410	40.200	48.68	33.9506	35.6491
40	85.566	163.501	121.0	85.099	100.40	115.311	97.926	118.83	83.3268	88.3901
45	234.213	442.751	324.0	232.648	297.50	325.342	263.746	322.84	224.9452	240.8801
50	742.863	1412.694	1052.0	736.387	1153.20	1072.797	824.313	1025.98	—	—

精确解。

从表 2 可以看出, 在相同内摩擦角时, $\lambda=0$ 和 $\lambda=\infty$ 对应 N_γ 值差别很大, $\lambda=0$ 得到的 N_γ 相当于地面无超载的粗颗粒土的解答, 当 φ 一定时, 该结果为 N_γ 的最小值, $\lambda=\infty$ 得到的 N_γ 则相当于不考虑土体重度对破裂面的影响(即土体破裂面形状严格符合普朗特尔破坏模式)时对应的理论解, 该解答与 Chen 给出的上限理论解答一致。因此 λ 对 N_γ 的影响不容忽略。 $\lambda=0$ 时本文计算结果和 Kumar 的滑移线计算结果基本相同, 且介于 Hjiaj 等极限分析法下限和上限逼近的精确解之间, 可以认为是极限承载力精确解。Bolton 等采用滑移线方法得到的计算结果比本文大很多, 尤其是当 φ 较小时, 计算结果甚至超出了 $\lambda=\infty$ 对应 N_γ 的上限, 这是由于作者计算时假定基础下存在底角为 $45^\circ + \varphi/2$ 的刚性核, 由此导致了较大的误差。Kumar 利用滑移线计算时考虑基础下形成的是局部的刚性核, 满足了需要的边界条件, 故其计算结果与本文解答非常接近。Terzaghi 采用极限平衡法计算时假定基础下存在底角为 φ 的刚性核, 破坏模式与本文数值计算结果存在较大差别, 这是导致计算结果偏大的原因, Kumbhojkar 采用极限平衡法计算时, 假定过渡区破裂面对数螺旋线中心点不是基础角点, 而是位于过渡区与被动区交界线 OF 或 OF' 的延长线上, 通过反复试算得到最小的 N_γ 值, 由于采用试算法改进了破裂面形状, 该解答较 Terzaghi 结果有所改进, Zhu 等采用三角条形法计算承载力时避免了过渡区破裂面形状的假定, 并通过优化计算刚性核角度, 故其解答比 Kumbhojkar 结果又有进一步改进。Michalowski 采用假定与 Zhu 等类似, 但采用极限分析法求解的是 N_γ 上限, 导致其计算结果偏大, Hjiaj 等采用极限分析法求解时为了避免人为假定, 利用了网格划分的方式确定破裂面形状和 N_γ , 其上下限解答差别较小, 是较为精确的解答, 与本文的数值计算结果基本一致。

从以上分析可知, 如果采用相同的破坏模式, 采用不同计算方法得到的地基承载力系数 N_γ 可以非常

接近, 反过来讲, 即使采用相同的计算方法, 若假定的破坏模式与实际不符, 其计算结果与真实解也会有很大差异。因此, 破坏模式是影响 N_γ 计算结果的控制因素, 求解时尽量减少计算假定, 得到更符合实际的破坏模式, 这是得到 N_γ 和极限承载力 q_u 精确解答的关键所在。

4 地基承载力系数 N_γ 的拟合公式

目前承载力系数 N_γ 还不能得到解析解, 许多学者都给出了地基极限承载力公式系数 N_γ 的建议公式, 这些公式都是与 φ 有关的函数。Diaz-Segura^[18] 汇总了砂土地基上现有学者给出的 60 个关于 N_γ 的估算方法, 并总结其表达式可以写成如下形式:

$$N_\gamma = (AN_q + B) \tan(C\varphi) , \quad (18)$$

式中, A , B , C 是拟合系数, N_q 采用式 (17) 求解。

对于给定的内摩擦角 φ , 地基承载力系数 N_γ 在 $\lambda=0$ 时结果最小, 定义此时解答为 $N_{\gamma,\min}$, $\lambda=\infty$ 对应 N_γ 最大值定义为 $N_{\gamma,\max}$, 采用 Diaz-Segura 建议的公式形式, 计算得到 φ 在 $0^\circ \sim 50^\circ$ 时对应的 $N_{\gamma,\min}$ 和 $N_{\gamma,\max}$ 拟合公式如下:

$$N_{\gamma,\min} = (0.92N_q - 0.51)\tan(1.38\varphi) , \quad (19)$$

$$N_{\gamma,\max} = (2N_q + 1.2)\tan(1.3\varphi) . \quad (20)$$

在 $0^\circ \sim 50^\circ$ 时采用公式 (19) 和 (20) 得到的拟合解和数值解如图 3 所示, 二者之间的误差经计算在土 3% 以内, 是较理想的拟合解答。

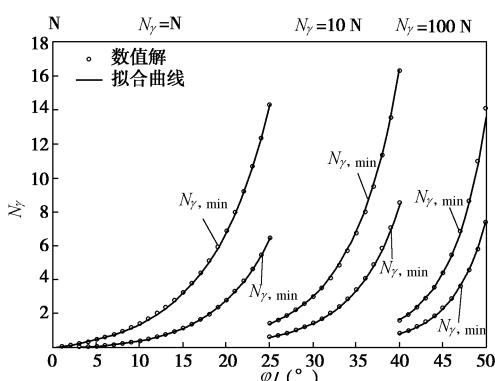


图 3 $N_{\gamma,\min}$ 及 $N_{\gamma,\max}$ 数值解与拟合曲线

Fig. 3 Numerical results and fitting curves of $N_{\gamma,\min}$ and $N_{\gamma,\max}$

根据式 (16)、(17) 以及滑移线的数值计算结果, 地基承载力系数 N_γ 与 λ 和 φ 两个参数有关。取不同内摩擦角 φ 时计算一系列相对应的 N_γ 与 λ 值, 结果如图 4 所示。从图中看可以看出, 当 λ 逐渐减小接近 0 时, N_γ 趋于定值, 该值即为 $\lambda=0$ 时对应的 $N_{\gamma,\min}$; 当 λ 逐渐增大时, N_γ 也趋于定值, 该值即为 $\lambda=\infty$ 时对应的 $N_{\gamma,\max}$ 。根据数值计算结果, 当土的内摩擦角 φ 介于 $0^\circ \sim 50^\circ$ 时, N_γ 的建议的拟合公式如下:

$$N_\gamma = \frac{N_{\gamma,\min}}{1 + \left(\frac{\lambda}{A_0}\right)^{0.75}} + \frac{N_{\gamma,\max}}{1 + \left(\frac{A_0}{\lambda}\right)^{0.75}} , \quad (21)$$

式中, $N_{\gamma,\min}$ 和 $N_{\gamma,\max}$ 可以采用表 2 中的数值解答, 也可以采用本文的拟合式 (19) 和 (20) 来计算, A_0 是与 φ 有关的系数, 建议的拟合式如下:

$$A_0 = 0.22 \tan^3 \varphi + 0.684 \tan^2 \varphi - 0.042 \tan \varphi + 0.354 . \quad (22)$$

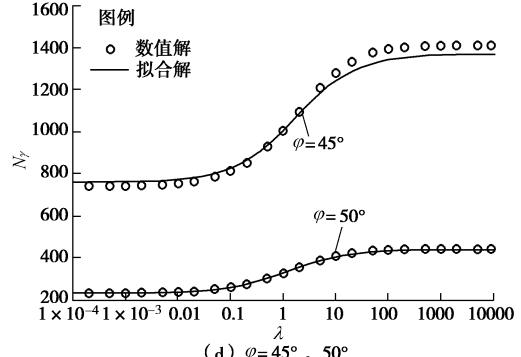
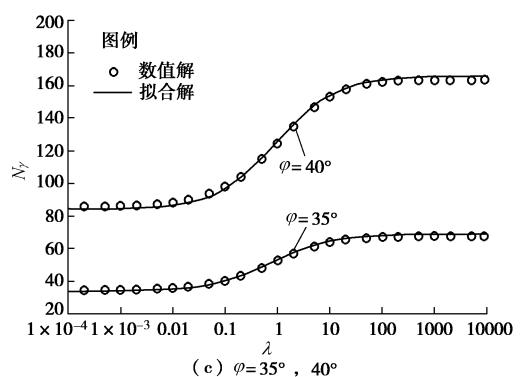
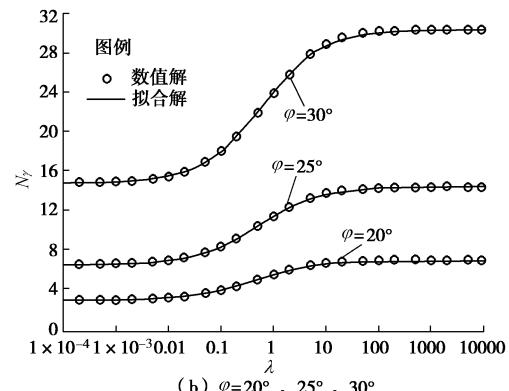
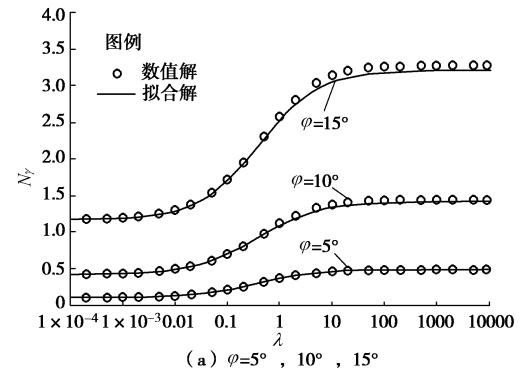


图 4 N_γ 数值解与拟合曲线

Fig. 4 Numerical results and fitting curves of N_γ

当 $N_{\gamma,\min}$ 和 $N_{\gamma,\max}$ 采用式(19)、(20)时不同 φ 对应的 N_{γ} 与 λ 的关系曲线见图 4。从图可以看出, 采用公式(22)得到的拟合曲线与数值结果总体上比较接近。图中在 φ 等于 15° 和 50° , 当 λ 小于 0.01 或大于 100 时, N_{γ} 拟合曲线和数值结果出现了一定程度的误差。

拟合结果与数值解之间的误差来源于以下两个方面: 一个是 $N_{\gamma,\min}$ 和 $N_{\gamma,\max}$ 采用式(19)、(20)产生的误差, 另一个是拟合式(21)本身与数值解之间的误差。计算结果表明, 当 $N_{\gamma,\min}$ 和 $N_{\gamma,\max}$ 采用数值解时, 不同 λ 与 φ 对应的 N_{γ} 的拟合解与数值解之间的误差在 $\pm 3\%$ 以内, 且 λ 小于 0.01 或大于 100 时, 拟合解与数值解之间误差小于 0.5%。若 $N_{\gamma,\min}$ 和 $N_{\gamma,\max}$ 采用式(19)、(20), λ 小于 0.01 或大于 100 时, 拟合解与数值解之间的误差主要由式(19)、(20)与数值解的偏差引起, 但无论 λ 与 φ 取何值, N_{γ} 的拟合解与数值解之间的误差均在 $\pm 4\%$ 以内, 说明本文的建议公式具有较高的拟合精度。

5 叠加引起的误差分析

传统叠加方法计算极限承载力计算时, 地基承载力系数 N_{γ} 计算时采用的是 $q=0$, $c=0$, $\gamma \neq 0$ 模式进行的求解, 相当于得到的是 $\lambda=0$ 时对应的值, 即 $N_{\gamma,\min}$, 将其对应的承载力记为 q_u^s , 其表达式如下:

$$q_u^s = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma BN_{\gamma,\min} \quad (23)$$

则采用叠加方法产生的误差 ε 如下:

$$\varepsilon = \frac{q_u^s - q_u}{q_u} = \frac{0.5(N_{\gamma,\min} - N_{\gamma})}{\lambda N_q - c \cot \varphi / \gamma B + 0.5N_{\gamma}} \quad (24)$$

从上式看出, 误差 ε 为负值, 即采用传统叠加方法低估了地基极限承载力, 这与其他学者的结论是一致的。影响误差 ε 的因素包含多个参数, 为了更一般的讨论 ε 的范围, 将以上公式做适当变化, 可得到误差 ε 满足以下不等式:

$$\varepsilon_L \leq \varepsilon \leq \varepsilon_U \quad , \quad (25)$$

$$\text{其中 } \varepsilon_L = \frac{0.5(N_{\gamma,\min} - N_{\gamma})}{\lambda(N_q - 1) + 0.5N_{\gamma}} \quad , \quad (26)$$

$$\varepsilon_U = \frac{0.5(N_{\gamma,\min} - N_{\gamma})}{\lambda N_q + 0.5N_{\gamma}} \quad . \quad (27)$$

不等式左侧等号成立的条件是 $q=0$, 右侧等号成立的条件是 $c=0$ 。这说明在 φ 和 λ 一定时, 叠加方法对无等效超载的黏性土产生的误差最大, 对有等效超载的粗颗粒土, 叠加方法产生的误差最小。

当土的内摩擦角 φ 一定时, 无论 q , c , γ 和 B 这

4 个参数取值如何变化, 采用叠加方法产生的误差始终在 ε_L 和 ε_U 之间。这说明对于内摩擦角确定的土, 采用叠加方法产生误差 ε 的范围可用 λ 评估。土的内摩擦角 φ 取 $10^{\circ} \sim 40^{\circ}$ 时叠加误差 ε 与 λ 的关系见图 5。

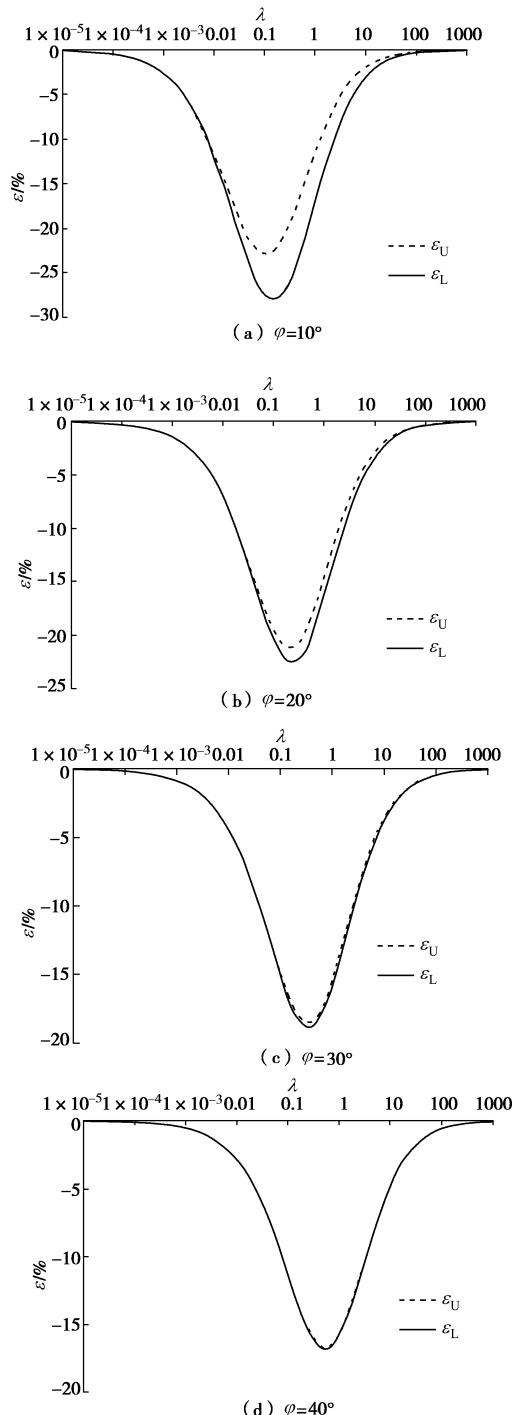


图 5 叠加产生的误差 ε 与超载比 λ 关系曲线

Fig. 5 Relationship between superposition errors ε and surcharge ratio λ

由计算结果及图 5 可以得到以下规律:

(1) 叠加产生的误差 ε_L 与 ε_U 随 λ 的变化呈近似的对数正态分布, 在 φ 介于 $10^{\circ} \sim 40^{\circ}$ 时, 最大误差

出现在 λ 等于0.1至1之间,且最大误差对应的 λ 随着 φ 的增大逐渐变大。

(2) ε_L 与 ε_U 极值虽不相同,但随着 φ 的增大二者极值越来越接近。例如 φ 等于10°时, ε_L 与 ε_U 极值分别为-28.1%和-23.0%,而当 φ 为40°时, ε_L 与 ε_U 极值分别为-16.8%和-16.7%,这说明在 λ 一定的情况下,极限承载力误差虽然会受 q 或 c 的影响在一定范围内出现变化,但叠加误差主要受 λ 的影响,且随着 φ 的增大,叠加误差的波动范围会逐渐收窄。

(3) ε_L 与 ε_U 取得极值对应的 λ 并不相同,随着 φ 的增大其极值对应的 λ 越来越接近,如 φ 在10°时, ε_L 与 ε_U 极值对应 λ 分别为0.147和0.136;而 φ 取40°时, ε_L 与 ε_U 极值对应 λ 已经非常接近,分别为0.550和0.544。

(4) 叠加产生最大误差随着 φ 的增大有所减小,当 φ 为10°时,叠加产生的最大误差约-28%, φ 增大至40°时,最大误差减小至-16.8%。实际工程中 λ 往往介于0.1~10之间,从图中看出,该范围是叠加产生最大误差的区间,说明多数情况下采用叠加方法对地基承载力都会带来相当程度的误差,不过这种误差低估了地基承载力,因此是偏于安全的。

6 结论与建议

采用滑移线理论和有限差分法编制了粗糙条形基础极限承载力计算程序,用于求解地基承载力 q_u 和承载力系数 N_y ,并对数值计算结果进行了分析和拟合。得到的结论与建议如下:

(1) 采用数值方法得到的计算结果在 $\lambda=0$ 时介于上下限逼近的精确解之间,说明该方法计算结果是精确的。其他学者计算承载力系数 N_y 与精确解之间的误差主要来源于对破坏模式的人为假定与实际不符,若要得到精确的 N_y 和 q_u ,求解时尽量减少计算假定。

(2) 以往学者给出的承载力系数 N_y 仅考虑了土的内摩擦角 φ 的贡献,没有考虑超载比 λ 的影响,这将引起较大的误差。建议以后计算 N_y 时考虑 λ 的作用,本文给出的拟合公式计算结果与数值解相比误差在±4%以内,具有较高的拟合精度。

(3) 采用传统叠加方法会导致较大的误差,叠加误差 ε 主要受土的内摩擦角 φ 和超载比 λ 的影响,当 φ 一定时,叠加产生的最大误差产生于 λ 等于0.1~1区间某一个值。由于叠加方法低估了极限承载力,因此是一种偏于安全的设计方法。

参考文献:

[1] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. New York:

John Willy and Sons, 1943.

- [2] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.
- [3] MICHALOWSKI R L. An estimate of the influence of soil weight on bearing capacity using limit analysis[J]. Soils and Foundations, 1997, 37(4): 57~64.
- [4] SILVESTRI V. A limit equilibrium solution for bearing capacity of strip foundations on sand[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(2): 351~361.
- [5] 肖大平, 朱唯一, 陈环. 滑移线法求解极限承载力问题的一些进展[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(4): 25~29.
(XIAO Da-ping, ZHU Wei-yi, CHEN Huan. Progress in slip lines method to solve the bearing capacity[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(4): 25~29. (in Chinese))
- [6] ZHU D Y, LEE C F, LAW K T. Determination of bearing capacity of shallow foundations without using superposition approximation[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(2): 450~459.
- [7] DAVIS E H, BOOKER J R. The bearing capacity of strip footings from the standpoint of plasticity theory[C]// Proceedings 1st Australia-New Zealand Conference on Geomechanics. Melbourne, 1971: 276~282.
- [8] BOLTON M D, LAU C K. Vertical bearing capacity factors for circular and strips on Mohr-Coulomb soil[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, 30: 1024~1033.
- [9] MARTIN C M. New software for rigorous bearing capacity calculations[C]// Proceedings of the British Geotechnical Association International Conference on Foundations. Dundee, 2003: 581~592.
- [10] SUN J P, ZHAO Z Y, CHENG Y P. Bearing capacity analysis using the method of characteristics[J]. Acta Mechanica Sinica, 2013, 29(2): 179~188.
- [11] SHIELD R T. Plastic potential theory and Prandtl bearing capacity solution[J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1954, 21(2): 193~194.
- [12] PRANDTL L. About the penetrating strength (hardness) of plastic building materials and strength of cut[J]. ZAMM: Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1921, 1(1): 15~20. PRANDTL L. Über die eindringungsfestigkeit (härte) plastischer baustoffe und die festigkeit von schneiden[J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1921, 1(1): 15~20. (in German)
- [13] MARTIN C M. Exact bearing capacity calculations using the

- method of characteristics[C]// Proceedings of 11th International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics. Turin, 2005: 441 - 450.
- [14] KUMAR J. The variation of N_y with footing roughness using the method of characteristics[J]. International Journal For Numerical And Analytical Methods In Geomechanics, 2009, 33: 275 - 284.
- [15] KUMBHOJKAR A S. Numerical evaluation of Terzaghi's N_y [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1993, 119(3): 598 - 607.
- [16] ZHU D Y, LEE C F, JIANG H D. A numerical study of the bearing capacity factor N_y [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2001, 38(5): 1090 - 1096.
- [17] HJIAJ M, LYAMIN A V, SLOAN S W. Numerical limit analysis solutions for the bearing capacity factor N_y [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(5/6): 1681 - 1704.
- [18] DIAZ-SEGURA E G. Assessment of the range of variation of N_y from 60 estimation methods for footings on sand[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2013, 50: 793 - 800.

第九届全国青年岩土力学与工程会议（第3号通知）

2016年11月10日~13日，中国 重庆

会议简介：本届会议是继在浙江大学（1992）、大连理工大学（1995）、河海大学（1998）、中科院武汉岩土所（2001）、西安交通大学（2004）、同济大学（2007）、清华大学（2011）、南昌航空大学（2013）召开的前八届会议之后全国青年岩土工程科技工作者的又一次学术盛会。热忱欢迎本领域的专家、学者、工程技术人员、博士后、研究生积极参与！

本届会议以“岩土工程灾害与控制”为主题，将对近年来我国岩土力学与岩土工程领域中取得的相关研究进展进行广泛的学术交流。

主办单位：中国土木工程学会土力学及岩土工程分会；中国力学学会岩土力学专业委员会；中国水利学会岩土力学专业委员会；中国建筑学会地基基础分会；中国振动工程学会土动力学专业委员会。

承办单位：重庆交通大学；重庆大学；招商局重庆交通科研设计院有限公司。

协办单位：重庆市科学技术协会；重庆市水利电力建筑勘测设计研究院；中国水利水电出版社；重庆岩石力学与工程学会；国家内河航道整治工程技术研究中心；国家山区公路工程技术研究中心；山区桥梁与隧道工程国家重点实验室培育基地；山区道路工程与防灾减灾技术国家地方联合工程实验室；

《Journal of Mountain Science》编辑部；《岩土工程学报》编辑部；《岩土力学》编辑部；《地下空间与工程学报》编辑部；《重庆交通大学学报（自然科学版）》编辑部。

论文征集情况：大会会务组自2015年6月1日起开始接收论文投稿，截止2015年12月31日，共征得中文稿件318篇，英文稿件54篇，并经会务组初审后，推荐至《Journal of Mountain Science》（SCI检索源期刊）、《岩土工程学报》（EI检索源期刊）、《岩土力学》（EI检索源期刊）、《地下空间与工程学报》（CSCD检索源期刊）和《重庆交通大学学报（自然科学版）》（全国中文核心期刊），录用稿件发表于《岩土工程学报》（正刊）、《岩土力学》（正刊、增刊）、《地下空间与工程学报》（正刊、增刊）。

学报》（正刊、增刊）和《重庆交通大学学报（自然科学版）》（正刊）。经各编辑部审稿后，共录用中文稿件118篇，其中《岩土工程学报》正刊录用6篇，《岩土力学》正刊录用10篇、增刊录用2篇，《地下空间与工程学报》正刊录用16篇、增刊录用29篇，《重庆交通大学学报（自然科学版）》正刊录用55篇；英文稿件有35篇通过编辑部初审，正在进行专家审稿、作者修改等工作。

会议地点：重庆华商国际会议中心（地址：重庆市南岸区学府大道33号）。

会议时间：2016年11月10~13日。

专场安排：专场一：地质灾害与控制；专场二：测试技术与勘察；专场三：基本特性与本构；专场四：地基与基础工程；专场五：能源岩土工程；专场六：环境岩土工程；专场七：博士研究生论坛；专场八：硕士研究生论坛

会议展览：会议期间举办岩土力学与工程技术展览，主要包括岩土力学试验仪器、设备、机械、新材料、软件等。热忱欢迎从事岩土工程领域的新材料、新技术、新设备的开发、生产和运用的相关单位踊跃报名参加技术展览。

会议注册：注册费：正式代表：1500元/人，研究生代表：2016年10月10日前已提交回执：免费。2016年10月10日前未提交回执：500元/人，注册方式：现场报到注册并缴纳注册费。

联系方式：联系人：王俊杰（023-62896924；13883116938），梁越（023-62459033；18983369809），钟祖良（13594058380），朱根桥（18008377813），叶四桥（13627647292），黄锋（15808075278），通讯地址：重庆市南岸区学府大道66号，重庆交通大学国家内河航道整治工程技术研究中心，邮政编码：400074。

会议回执：请参会代表务必于2016年10月10日前填写会议回执，并返回会务组邮箱：nycgge2016@163.com，以便会务组安排会议议程。

（大会组委会 供稿）