

DOI: 10.11779/CJGE201609017

# 关于土坡稳定性分析中的分项系数取值的讨论

张 宁, 李 旭\*, 储昭飞, 刘保国

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

**摘要:** 基于可靠度理论的分项系数法已在结构工程设计中广泛应用, 并成为当前岩土工程设计方法发展的一种趋势。针对土质边坡抗剪强度参数(凝聚力 $c$ 和摩擦系数 $f$ )的分项系数取值进行讨论: 首先结合条分法、响应面法以及设计域的概念, 在不同工况下标定分项系数的取值; 然后评估, 在采用不同分项系数组合进行边坡设计时, 实际边坡的可靠度水平。研究结果表明: ①变异系数对分项系数的标定有重要影响; ②减小分位比能够部分抵消一定目标可靠度下由变异系数所引起的分项系数标定值变化以及一定分项系数下实际边坡可靠度水平的波动; ③设计验算点是设计域中特殊的一点, 它并不是最优的设计值取值点, 使用标准化空间里设计域上特定角度一点作为设计值取值点更具优势; ④当分位比为0.1, 目标可靠度3.2时, 经过优化分析, 推荐土质边坡分项系数取值为 $\gamma_c=1.30$ ,  $\gamma_f=1.15$ ; ⑤使用该方法, 可以对现有安全系数设计方法的可靠度水平进行评估。

**关键词:** 土质边坡; 可靠度设计; 分项系数; 响应面法; 设计域

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2016)09-1695-10

作者简介: 张 宁(1993-), 男, 硕士研究生, 主要从事边坡可靠度分析方面研究。E-mail: 14121147@bjtu.edu.cn。

## Optimum values of partial factors in stability analysis of soil slopes

ZHANG Ning, LI Xu, CHU Zhao-fei, LIU Bao-guo

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** The partial factor method is widely used in the design of structural engineering and tends to be developed in the design of geotechnical engineering. The optimum values of partial factors used in the stability analysis of soil slopes are discussed. First, the traditional slice method, the response surface method and the concept of design space are combined to calibrate the partial factors. Then, several groups of partial factors are used to design the soil slopes with variable shear strength parameters and geometrical shapes. The actual reliability levels of these designs are checked and used to optimize the selection of partial factors. The results demonstrate that: (1) The coefficient of variation strongly affects the calibration of partial factors; (2) The decrease of fractile ratios can reduce the variation of the calibrated partial factors and the real reliability levels of soil slopes designed by the partial factor method; (3) Instead of the design checking point, a point with certain degree in the design location is recommended for the calibration of partial factors; (4) When the target reliability index is 3.2 and the fractile ratio is used as 0.1, the partial factors  $\gamma_c=1.30$  and  $\gamma_f=1.15$  are recommended in the design of soil slopes. (5) Using the proposed method, the real reliability levels of the soil slopes designed by the factor of safety method can be evaluated.

**Key words:** soil slope; reliability analysis; partial factor; response surface method; design location

## 0 引 言

在边坡稳定分析中, 规范<sup>[1-2]</sup>采用安全系数法进行稳定分析, 但同时也建议对于I级边坡可采用基于抗滑稳定安全系数的方法进行可靠度分析<sup>[2]</sup>。由于边坡稳定中各影响因素(例如岩土材料的抗剪强度参数)的准确概率分布难以获得, 复杂边坡的安全系数没有显式表达式, 导致可靠度直接分析方法(包括一次二阶矩法, 响应面法, Monte Carlo 模拟等)难以直接用于边坡稳定的实际工程设计。采用分项系数进行工程设计是较为适用的可靠度分析方法, 它能够综合考虑

材料、荷载等因素的变异性, 较安全系数方法更能反映结构的安全程度, 同时避免了可靠度直接分析方法的上述困难。因此, 分项系数设计方法已经在工程设计中, 尤其在结构工程中获得了广泛的应用; 此外, 分项系数设计方法在国外岩土工程中的应用也初步崭露头角(如 Eurocode 7<sup>[3-4]</sup>)。

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)项目(2012CB026104); 国家自然科学基金项目(51479001); 中央高校基本科研业务费项目(2014JBZ013)

收稿日期: 2015-02-13

\*通讯作者(E-mail: cexuli2012@163.com)

岩土工程的分项系数设计方法尚未获得工程界的广泛认可，尤其在分项系数的合理选用方面存在一些待解决的问题：①岩土工程中材料变异系数取值范围较大，不考虑变异系数影响而在所有情况下都使用同一分项系数是否可行？造成的误差有多大？如何在变异系数取值范围大的情况下优选分项系数，选择一个综合的分项系数？这些问题亟待解决。②分项系数标定的时候并不是只能取设计验算点，文献[5]提出了设计域（design location）的概念，使用标准化空间里设计域中特定角度的一点作为设计值，并进行分项系数标定有可能更具优势。③目前岩土工程参数标准值（或者说分位值）在不同规范中选取不统一，这对分项系数的选择有很大的影响，需要予以澄清。④采用小值平均值的安全系数设计方法中，安全系数其实相当于一个特殊的分项系数，其对应的可靠度水平需要进行评价。

本文就土质边坡稳定分析中的分项系数取值进行讨论，通过优化给出推荐的分项系数取值。这对边坡稳定分项系数设计方法的发展有着重要的意义。

## 1 土坡稳定性分析

### 1.1 土坡稳定性分析中的不确定性因素

岩土工程中的不确定因素包括管理因素、模型因素和参数因素 3 大类<sup>[6]</sup>。管理因素指结构的施工和使用等过程中的各种非技术性的人为不确定因素；模型不确定性主要指分析方法和数值模型的不确定性，例如有限元强度折减法，极限平衡圆弧滑动法，和极限平衡 Sarma 法的安全系数计算结果以及可靠度分析结果会有一定差异；参数不确定性主要指影响结构稳定性的各种参数的不确定性，其性质可以用假定的概率分布进行描述。

参数不确定性是本文研究的重点，本文考虑简单边坡模型（如图 1 所示，单阶单层土坡，坡顶和坡底水平，不考虑地下水，滑裂面位置由搜索确定），假定土层强度参数指标凝聚力  $c$  和摩擦系数  $f$  的概率分布类型，在土层强度参数指标  $c$  和  $f$  分布（均值  $\mu$  和变异系数  $\delta$ ）和边坡形状（边坡高度  $h$  和边坡坡角  $\theta$ ）变化条件下，研究土体抗剪强度参数指标  $c$  和  $f$  分项系数的合理取值。

因土体重度变异系数相对较小（如文献[6]取为 0.01~0.10），标准值与均值相近，而且对稳定性影响不大（如 Eurocode 7 给出的分项系数是 1.0<sup>[4]</sup>，即设计值等于标准值），本文不考虑其不确定性，直接取为定值 20 kN/m<sup>3</sup>。

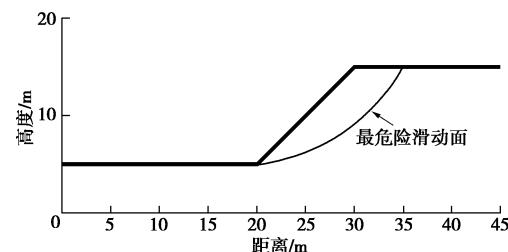


图 1 土坡模型

Fig. 1 Simple slope model

### 1.2 土坡稳定性分析的功能方程

对于土坡稳定问题，按照文献[6]建议采用以下形式的功能方程：

$$g = K(c, f, h, \theta) - 1 \quad (1)$$

式中  $c$  和  $f$  为土层抗剪强度指标； $h$ ， $\theta$  是边坡的高度和坡角。

边坡稳定安全系数  $K$  很难显式表达，因此本文使用响应面法求解安全系数  $K$  的近似功能函数。其步骤为：

(1) 假定功能函数具有以下形式：

$$g \approx \lambda_0 + \lambda_1 c + \lambda_2 f + \lambda_3 c^2 + \lambda_4 f^2 + \lambda_5 cf \quad (2)$$

式中， $\lambda_i$  为待定系数。

(2) 给定坡高  $h$  和坡角  $\theta$ ，采用一系列的  $(c, f)$  点，使用 STAB2009 进行边坡稳定分析，计算得到一系列安全系数  $K$ ；将  $K$  代入式 1，可得到对应的  $g$  值（即响应值）。

(3) 将一系列的  $(c, f)$  点以及  $g$  值代入式 (2)，通过最小二乘法求解待定系数  $\lambda_i$ ，即得到安全系数  $K$  的近似功能函数。

为简便起见下文中功能函数写作  $g$ ，而功能方程写作  $g(c, f) = 0$  或者  $g(x) = 0$ 。

## 2 土体抗剪强度参数的概率特征

莫尔-库仑准则由于其形式简洁性而在工程中得到了广泛应用，不考虑水地下水作用时，可写作

$$\tau_f = c + f\sigma \quad (3)$$

通常认为：黏聚力  $c$  服从对数正态分布或正态分布，摩擦系数  $f$  服从正态分布<sup>[6-8-9]</sup>， $c$  与  $f$  通常负相关<sup>[10]</sup>。考虑到  $c$  取正态分布时，计算得到的可靠度偏低<sup>[6]</sup>（因为  $c$  变异系数较大，正态分布中  $c$  可以小于 0）本文  $c$  采用对数正态分布， $f$  采用正态分布，不考虑  $c$  与  $f$  之间的相关性；具体取值范围如表 1 所示。

表 1 材料参数

Table 1 Statistical properties of shear strength parameters

参数	变异系数 $\delta$	分布模型	相关性
$c / \text{kPa}$	0.15~0.35	对数正态	不相关
$f$	0.04~0.12	正态	

### 3 分项系数设计方法

#### 3.1 分项系数定义

分项系数设计方法实质在于利用分项系数反映功能函数中各基本变量的不确定性, 以建立与实际可靠度的联系。在边坡工程设计中, 一般采用折减材料抗剪强度参数的方式得到安全系数; 类似地, 可以建立材料抗剪强度参数的分项系数, 从而达到控制工程安全可靠度的目的。材料强度参数分项系数可表示为<sup>[8]</sup>

$$\gamma_{xi} = x_{ik} / x_{id} \quad . \quad (4)$$

式中  $x$  为材料参数, 即  $c$  和  $f$ ;  $\gamma_x$  为材料参数  $x$  的分项系数;  $x_d$  为材料参数设计值;  $x_k$  为材料参数标准值, 即分位比  $t$  对应的分位值, 如下式所示:

$$x_{ik} = F_{xi}^{-1}(\mu_{xi}, \delta_{xi}, t) \quad (0 < t \leq 0.5) \quad , \quad (5)$$

式中  $F^{-1}F^1$  为概率分布累积函数的反函数,  $t$  称为分位比;  $\mu_x$  和  $\delta_x$  为材料参数  $x$  的均值和变异系数。

考虑  $f$  服从正态分布,  $c$  服从对数正态分布, 式(5)可具体写为

$$f_k = \mu_f [1 + \Phi^{-1}(t) \delta_f] \quad , \quad (6)$$

$$c_k = \exp[\mu_c^n + \sigma_c^n \Phi^{-1}(t)] \quad , \quad (7)$$

式中,  $\Phi^{-1}$  为标准正态分布反函数,  $\mu_c^n$  和  $\sigma_c^n$  分别为取对数后的均值和标准差, 满足:

$$\left. \begin{aligned} \mu_c^n &= \ln(\mu_c) - 0.5(\sigma_c^n)^2 \quad , \\ \sigma_c^n &= \sqrt{\ln(1 + \delta_c^2)} \quad . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由式(4)、(5)可知, 在给定强度参数概率分布函数和分位比  $t$  的条件下, 强度参数分项系数由设计值  $x_d$  确定。由可靠度设计要求: 当设计值  $x_d$  满足极限平衡状态, 即  $g(x_d)=0$  时, 结构的实际可靠度  $\beta$  应等于工程设计的目标可靠度  $\beta_T$ 。因此设计值  $x_d$  应满足

$$\beta(x|g(x_d)=0) = \beta_T \quad . \quad (9)$$

考虑到经济性, 在工程设计中, 天然边坡需满足的可靠度水平相对较低(与结构工程相比)。如 Meyerho 推荐土工失效概率可取 0.01, 而挡土结构和基础取为 0.001<sup>[11]</sup>(对应  $\beta_T$  分别为 2.33 和 3.09)。Baecher 等推荐的岩土问题中可靠度指标为 2.0~3.0<sup>[12]</sup>。本文按规范<sup>[8]</sup>指定的水工结构一类破坏为准, 选择目标可靠度 2.7, 3.2 和 3.7 分别计算对应的分项系数, 并主要对  $\beta_T=3.2$  的情况进行讨论。

#### 3.2 分项系数标定方法

由式(9), 要使  $\beta(x)$ , 只需找到验算点  $x_d$  满足  $g(x_d)=0$ 。因此分项系数的标定可以分 3 步进行:

(1) 首先找到一组满足目标可靠度的材料参数  $x$ , 即

$$\beta(\mu_x, \delta_x) = \beta_T \quad . \quad (10)$$

对于边坡稳定问题, 即在给定边坡形状(高度  $h$

和坡角  $\theta$ )、分析方法及计算条件下, 找到一组材料参数值( $\mu_c$ ,  $\mu_f$ ,  $\delta_c$ ,  $\delta_f$ )使得功能函数  $g$  的可靠度为  $\beta_T$ , 即

$$\beta(\mu_c, \delta_c, \mu_f, \delta_f) = \beta_T \quad , \quad (11)$$

式中,  $\beta$  可由映射变换法近似求出(与 JC 法同属一次二阶矩法<sup>[13]</sup>, 但计算收敛性优于 JC 法<sup>[14]</sup>)。即利用累积分布数值相等的映射, 将非正态随机变量  $x$  变换为标准正态随机变量  $y$ <sup>[13-14]</sup>, 即

$$y_i = \Phi^{-1}[F_{xi}(x_i, \mu_{xi}, \delta_{xi})] \quad , \quad (12)$$

式中,  $F_{xi}$  为累积分布函数,  $F(x_i, \mu_{xi}, \delta_{xi})$  即为变量取值小于  $x_i$  的概率。通常,  $x$  对应的空间称为原空间, 而  $y$  对应的空间称为标准化空间。

在标准化空间, 将极限状态面在设计验算点  $y^*$  附近线性展开(图 2(a)), 变换后可得到  $\beta$  近似表达式为<sup>[13]</sup>

$$\beta \approx \frac{g(x^*) - \sum_{i=1}^n \alpha_{xi} y_i^*}{\sum_{i=1}^n (\alpha_{xi})^2} \quad , \quad (13)$$

式中,  $\alpha_{xi}$  称为灵敏度系数, 由下式求出

$$\alpha_{xi} = \cos \psi_{yi} = -\frac{\frac{\partial g(x_i^*)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 [\frac{\partial g(x_i^*)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_i}]^2}} \quad , \quad (14)$$

式中,  $x^*$  与  $y^*$  分别对应原空间和标准化空间中的设计验算点。以坐标轴  $y_i$  到另一轴为正方向, 则  $\psi_{yi}$  是标准化空间沿轴  $y_i$  正向旋转到  $y^*$  的角度, 如图 2 所示。

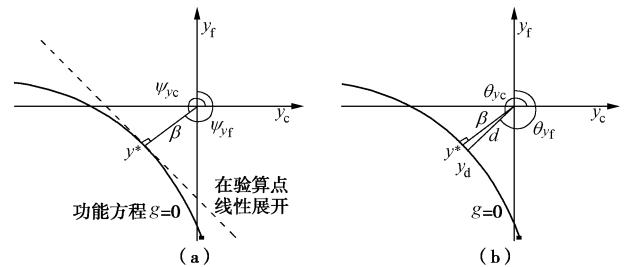


图 2 标准化空间里的设计验算点与一般设计点

Fig. 2 Design checking point and location

几何意义上,  $\beta$  等于标准化空间里原点到  $g=0$  的最近距离, 而最近点就是标准化空间的设计验算点  $y^*$ <sup>[13]</sup>。

(2) 在功能方程  $g(x)=0$  上选择一合理的设计点  $x_d$  满足

$$g(x_d) = 0 \quad . \quad (15)$$

如图 2 所示, 标准化空间里的曲线  $g(y_d)=0$  上任意一点的坐标存在如下几何关系:

$$y_{di} = d \cos(\theta_{yi}) \quad , \quad (16)$$

式中,  $d$  为点  $y_d$  到原点的距离,  $\theta_{yi}$  为  $y_i$  轴沿着正方向旋转到到  $y_d$  的角度。

将  $y_d$  还原到原空间即可得到  $x_d$ , 考虑到  $f$  服从正态分布,  $c$  服从对数正态分布, 抗剪强度参数设计值如下式所示:

$$f_d = \mu_f [1 + d \cos(\theta_{yf}) \delta_f] , \quad (17)$$

$$c_d = \exp[\mu_c^n + \sigma_c^n d \cos(\theta_{yc})] . \quad (18)$$

(3) 由式(6)、(7)计算得到标准值  $x_k$ , 并将  $x_k$  和  $x_d$  (由式(17)、(18)得到)代入式(4), 即可得到分项系数表达式:

$$\gamma_c = e^{[\Phi^{-1}(t)-d \cos(\theta_{yc})]\sqrt{\ln(1+\delta_c^2)}} , \quad (19)$$

$$\gamma_f = \frac{1 + \Phi^{-1}(t) \delta_f}{1 + d \cos(\theta_{yf}) \delta_f} . \quad (20)$$

### 3.3 设计点 $x_d$

通常在标定过程第二步所选择的设计点为设计验算点  $x^*$ 。但是实际上这只是充分而非必要条件。 $g(x)=0$  这条线(或面)称为设计域(design location)<sup>[5]</sup>, 在使用一次二阶矩法分析时, 设计域上任意一点都满足目标可靠度(参见式(13))和功能方程(式(15))。因此设计域上的任意一点都可以作为设计点  $x_d$  用于分项系数的标定。

对于本文讨论的双变量问题, 由几何关系可知

$$\cos^2(\theta_{yc}) + \cos^2(\theta_{yf}) = 1 , \quad (21)$$

因此, 只要在  $d$ ,  $\cos(\theta_{yc})$  和  $\cos(\theta_{yf})$  之间再给定一个条件, 就可以唯一地确定设计点  $x_d$ 。本文采用两种方法选择设计点:

#### (1) 传统方法(记作 PFM-C)

以原空间里的设计验算点  $x^*$  (design checking point) 作为设计值<sup>[5, 7, 15]</sup>。即  $x_d=x^*$ , 如图 3, 此时有

$$d=\min(d)=\beta_T , \quad (22)$$

$$\cos(\theta_{yi})=\cos(\psi_{xi})=\alpha_{xi} . \quad (23)$$

由式(19)、(20)可知, 给定  $\beta_T$  和  $t$  条件下, 影响 PFM-C 分项系数取值的因素是材料参数  $x_i$  的变异系数  $\delta_{xi}$  和灵敏度系数  $\alpha_{xi}$ 。而影响  $\alpha_{xi}$  的因素是功能方程  $g=0$  在标准化空间里的形状, 这和边坡形状, 材料参数  $x_i$  的均值, 变异系数都有关系。

#### (2) 给定角度法(记作 PFM-L)

然而, 按传统方法难以求得稳定分项系数。其原因在于, 当功能方程或者  $x$  概率密度函数发生变化时,  $x^*$  位置以及  $\alpha_i$  (或者说  $d=\beta_T$  时对应的角度  $\theta_{yi}$ ) 变化范围较大, 因此使用设计验算点计算得到的分项系数也容易发生变化。

因此, 不妨指定:

$$\cos(\theta_{yc})=M \cos(\theta_{yf}) . \quad (24)$$

给定  $M$  值, 就可以唯一地确定  $x_d$ ; 进而将  $x_d$  代入式 4 求解分项系数。当  $M=1$  时, 设计点  $y_d$  所在角度为  $225^\circ$  (如图 3 所示), 就是 Ching 等<sup>[5]</sup>推荐的设计方法(原文中记为 QVM)。

式(24)以标准化空间的角度确定设计验算点, 因此可以将这种设计点选择方法称为给定角度法。这种方法在实际上优化了对  $c$  和对  $f$  的折减比例。

另外, 文献[5]的研究表明: 将这种方法用于桩基础问题, 该方法得到的分项系数适应性更强, 在不同变异系数条件下得到的结构可靠度更加稳定, 相比传统方法具有一定的优势。

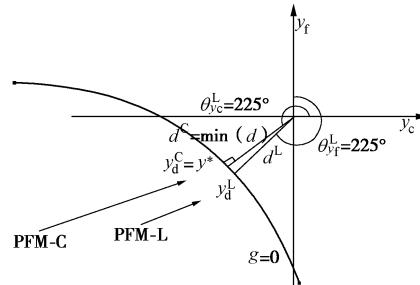


图 3 PFM-C(上标 C)和 PFM-L(上标 L)选用设计点不同

Fig. 3 Design points used in PFM-C and PFM-L methods

实际上设计点的选择并不仅限于以上两种, 还可以采用其他条件。例如从分项系数的角度出发建立联系, 假定  $\gamma_c = k \gamma_f$  (其中  $k$  是一给定的值) 等。只要任意增加一个条件, 都能在  $g=0$  曲线上找到相应的设计点  $x_d$ , 用于求解分项系数  $\gamma_c$  和  $\gamma_f$ 。

### 3.4 综合分项系数

由于不同条件下功能方程不同, 而且标准化空间随变量  $x$  的概率密度函数改变, 分项系数设计方法并不能保证在所有的情况下都具有严格的适用性, 即当  $g(x_d)=0$  时, 该边坡实际可靠度  $\beta$  与目标可靠度  $\beta_T$  并不相同, 存在一定的误差。因此必须对分项系数设计方法的误差进行估计; 并对分项系数进行优选, 提供一个综合的分项系数使得不同工况下的实际可靠度  $\beta$  都和目标可靠度  $\beta_T$  相近。实际上, 规范中提供的分项系数即是一个综合的分项系数<sup>[15]</sup>。

本文在土层强度参数指标  $c$  和  $f$  (均值和变异系数) 和边坡形状(边坡高度  $h$  和边坡坡角  $\theta$ ) 变化条件下, 对分项系数设计方法的误差进行评价, 并给出优选的分项系数, 具体步骤如下:

(1) 标定分项系数。考虑不同参数(均值、变异系数、坡高和坡角)的影响, 在  $m$  种工况下, 得到  $m$  组分项系数, 并分析参数变化对分项系数取值的影响。

(2) 拟选分项系数。对第一步中获得的  $m$  组分项系数进行统计, 获得分项系数最小值, 均值和最大值。考虑到实际工程更倾向于保守设计, 实际可靠度

应尽量大于目标可靠度, 因此拟选分项系数介于均值和最大值之间, 即满足以下条件:

$$\gamma_{xi} \in (\gamma_{xi}^{\text{ave}}, \gamma_{xi}^{\text{max}}) , \quad (25)$$

式中,  $\gamma_{xi}$  为第  $i$  个影响变量的分项系数, 即  $\gamma_c$  和  $\gamma_f$ ;  $\gamma_{xi}^{\text{ave}}$ ,  $\gamma_{xi}^{\text{max}}$  分别为  $m$  组分项系数的平均值和最大值, 即

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xi}^{\text{ave}} &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \gamma_{xi}^j , \\ \gamma_{xi}^{\text{max}} &= \max \{ \gamma_{xi}^j, j = 1, \dots, m \} . \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

按照式(25), 挑选  $n$  组分项系数, 作为候选的综合分项系数。

(3) 优选分项系数。综合分项系数应该具有较好的适应性, 在不同工况下, 实际可靠度都应接近于目标可靠度<sup>[15]</sup>。为此, 在分项系数优先过程中, 定义分项系数可靠度分析的误差为

$$er = \beta(\gamma_{xi}, x_{ik}) - \beta_T , \quad (27)$$

式中,  $x_{ik}$  为不同工况组合。假设共有  $p$  种因素对分项系数存在较大影响, 记为  $x_1, \dots, x_p$ ; 对每个影响因素, 核算  $q$  个取值点; 则需分别计算共计  $pq$  工况下的实际可靠度指标。

最优的分项系数  $\gamma_{xi}^{\text{op}}$  应满足误差平方和最小, 即

$$\text{sser}(\gamma_{xi}^{\text{op}}) = \min \{ \text{sser}(\gamma_{xi}), \forall \gamma_{xi} \in (\gamma_{xi}^{\text{ave}}, \gamma_{xi}^{\text{max}}) \} , \quad (28)$$

式中, sser 是误差平方和, 可采用下式计算:

$$\text{sser}(\gamma_{xi}) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q w_{ik} er^2 , \quad (29)$$

式中,  $w_{ik}$  为各工况的权重, 考虑到实际工程更倾向于保守设计, 本文中取为

$$w_{ik} = \begin{cases} 1 & (er \geq 0) \\ 2 & (er < 0) \end{cases} . \quad (30)$$

因此, 分项系数的具体优先过程为: ①分别计算  $n$  组分项系数  $\gamma_{xi}$  对应的误差平方和 sser, 确定极值点可能位置; ②进而在 sser 极值点附近加大取点密度, 找到最优分项系数  $\gamma_{xi}^{\text{op}}$ 。

## 4 分项系数标定过程

### 4.1 标定步骤

按照本文第三节的讨论, 首先需进行分项系数的标定, 具体计算步骤如下:

(1) 给定边坡形式, 使用响应面法(参见本文 1.2 节)建立边坡稳定的近似功能函数  $g(x)$ ;

(2) 通过试算找到一组满足符号式 11 的  $c, f$  概率密度分布函数(即分布类型、均值和变异系数);

(3) 分别采用本文 3.3 节中 PFM-C 法和 PFM-L 法确定设计点  $x_d^C$  和  $x_d^L$ ;

(4) 给定分位比  $t$ , 代入  $c, f$  的概率密度分布函

数, 得到强度参数的标准值  $x_k$ ;

(5) 将设计点和标准值  $x_k$  代入式(4), 分别计算设计验算点法和给定角度法对应的分项系数  $\gamma_{xi}^C$  和  $\gamma_{xi}^L$ 。

重复步骤(2)~(5), 可以在岩土参数变化条件下, 得到  $m$  组分项系数。

### 4.2 计算示例

本文针对图 1 所示的简单均质边坡进行计算; 给定坡角  $\theta=45^\circ$  和坡高  $h=10$  m。首先等间距选取 10 组  $c$  值, 通过试算得到  $f$  值, 使得边坡安全系数接近 1, 对应功能函数  $g$ (式(1)) 约为 0。这种取点方法, 保证了近似功能方程  $g(x)=0$  (即设计域) 的精度。求解近似功能方程 2 中的待定系数, 得到  $[\lambda]=[-0.218299, -0.027790, 0.317561, 0.001107, -0.091498, 0.064070]^T$ 。

给定  $\mu_f=0.577$  ( $\mu_\phi \approx 30^\circ$ ), 变异系数  $\delta_c=0.25$ ,  $\delta_f=0.08$ , 试算得到当  $\mu_c=14.26$  kPa 时, 边坡可靠度达到  $\beta_T=3.2$ 。取分位比  $t=0.1$ 。按照 PFM-C 法计算(见式(15)、(19)、(20)、(22))得到分项系数为  $\gamma_c=1.316$ ,  $\gamma_f=1.082$ ; 按照 PFM-L 法计算(见式(15)、(19)、(20)、(24))得到分项系数为  $\gamma_c=1.276$ ,  $\gamma_f=1.097$ 。

同理, 给定  $\mu_c=20$  kPa, 变异系数  $\delta_c=0.25$ ,  $\delta_f=0.08$ , 通过试算可知,  $\mu_f=0.486$  时, 边坡可靠度达到目标可靠度 3.2。此时 PFM-C 方法的标定结果为  $\gamma_c=1.410$ ,  $\gamma_f=1.044$ , 而 PFM-L 标定结果为  $\gamma_c=1.290$ ,  $\gamma_f=1.102$ 。

显然, 在标定过程中得到的分项系数并不是一个定值; 它会随强度参数的概率分布, 边坡几何特性(坡角、坡高)等因素的变化而改变; 此外, 分位比  $t$  决定标准值的取值, 对分项系数大小有直接影响。本文后续部分将讨论这些因素的影响。

### 4.3 分位比对分项系数取值的影响

由式(19)、(20)可知, 当其他条件相同时, 分位比  $t$  减小, 材料标准值减小, 材料分项系数减小。不同的设计规范推荐的分位比是不同的, 例如《水利水电工程结构可靠性设计统一标准》建议岩土材料分位比可取 0.1, Eurocode7 中建议分位比为 0.05, GwanghaRoh 等进行土坡分项系数标定时直接均值折减到设计值, 即分位比为 0.5(此外, GwanghaRoh 等的分项系数定义与式(4)定义相反)。

以  $\theta=45^\circ$ ,  $h=10$  m,  $\mu_c=14.26$  kPa,  $\mu_f=0.577$ ,  $\delta_c=0.25$ ,  $\delta_f=0.08$ (此时  $\beta_T=3.2$ ) 的土坡为例, 在不同分位比  $t$  条件下进行分项系数标定, 其结果如图 4 所示: 随着  $t$  的增加,  $\gamma_c$  和  $\gamma_f$  变化趋势相同, 都随  $t$  值呈递增关系。

实际上, 分项系数设计方法是将材料的不确定性分为两步考虑, 第一步使用一定的分位比  $t$  将均值折

减为标准值考虑; 第二步通过分项系数进一步折减为设计值, 以适应不同的可靠度设计水平。

表 2 分位比与标准正态分布分位值的对应关系

Table 2 Fractile of standard normal distribution

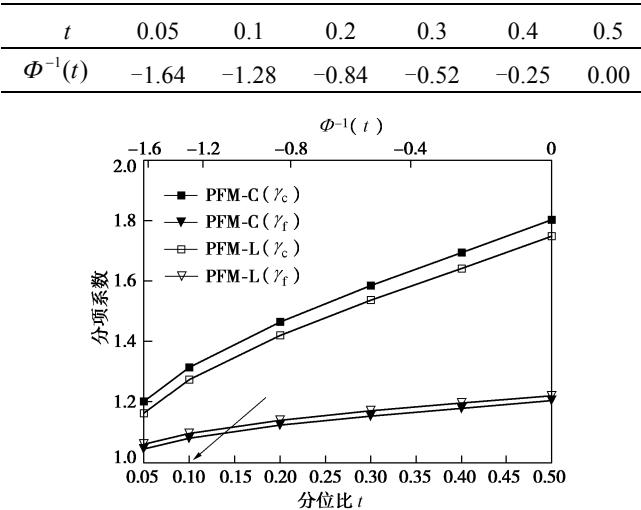


图 4 分项系数与分位比  $t$  关系

Fig. 4 Partial factors obtained under different fractile ratios

表 2 为分位比  $t$  与标准正态分布下的分位值  $\Phi^{-1}(t)$  的关系。由式(19)、(20)可知, 随着  $\Phi$  的增大, 材料参数的变异系数 对分项系数  $\gamma_i$  的影响变大。也就是说, 减小分位比能够减小变异系数 对分项系数, 乃至结构实际可靠度的影响。因此, 减小分位比能够直接提高分项系数的稳定性。

由式(19)、(20)可知, 当分位比

$$t_c = \Phi[d \cos(\theta_{yi})] \quad (31)$$

时,  $\gamma_{xi}$  恒等于 1, 不受变异系数的影响。此时, 分位比取值最佳。对于设计验算点法 (PFM-C),  $d = \beta_T$ 。由式(31)可知

$$t_c > \Phi[-\beta_T], \quad (32)$$

对于给定角度法 (PFM-L), 取  $\theta_{yc} = \theta_{yf} = 225^\circ$ , 考虑到  $d \geq \beta_T$ ,

$$t_c = \Phi[d \cos(225^\circ)] \leq \Phi[-0.7071\beta_T] = t_{op}, \quad (33)$$

对于工程设计而言, 分项系数应该大于 1, 因此  $t$  应大于  $t_c$ 。式(33)满足右端值可以满足这个条件, 即 PFM-L 法存在最佳分位比  $t_{op}$ 。表 3 为由式(33)计算得到不同目标可靠度条件下的最佳分位比  $t_{op}$ 。

表 3 目标可靠度与 PFM-L 最佳分位比的关系

Table 3 Best fractile in PCM-L method

$\beta$	2.2	2.7	3.2	3.7
$t_{op}$	0.060	0.028	0.012	0.0044

实际设计使用不同分项系数, 以兼顾不同可靠度水平, 因此采用的分位比应均大于上面的值, 即大于 0.06。因此规范<sup>[3]</sup>的建议值  $t=0.1$  是近似合理的。对于

边坡稳定安全系数设计方法, 如果试样数目较少, 强度参数将采用小值平均值, 样本总体的小值平均值对应的分位比约为 0.21 (正态分布) 和 0.22~0.27 (对数正态分布, 详见 6 节讨论)。因此小值平均值并不适合作为分项系数设计方法的标准值使用。

本文在以后的讨论中, 将采用分位比  $t=0.1$ 。

#### 4.4 土体强度不确定性对分项系数取值的影响

由式(19)、(20)可知, 强度参数  $c, f$  的变异系数直接影响实际分项系数。此外  $c, f$  的均值和变异系数也能通过影响功能方程  $g=0$  的在标准化空间里的表达形式, 间接地影响分项系数的标定。

(1) 考虑强度参数均值对分项系数标定结果的影响

给定边坡  $\theta=45^\circ$ ,  $h=10$  m,  $\delta_c=0.25$ ,  $\delta_f=0.08$  和一系列  $\mu_c$ , 求解满足边坡稳定目标可靠度  $\beta_T$  为 3.2 的  $\mu_f$ , 进而分别按 PFM-C 和 PFM-L 进行标定, 计算结果如图 5 所示 ( $\mu_c$  与求解得到的  $\mu_f$  有一一对应关系,  $\mu_c$  越大,  $\mu_f$  越小, 这里只给出关于  $\mu_c$  的图)。

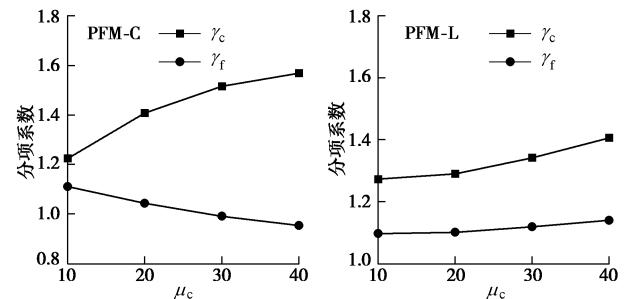


图 5  $\mu_c$  与分项系数关系

Fig. 5 Partial factors under different  $\mu_c$

由图 5 可知, 变异系数不变时, 均值对分项系数标定结果有一定影响; 而 PFM-L 法得到的分项系数变化幅度相对较小, 比 PFM-C 法的计算结果稳定。

(2) 考虑土体参数变异系数对分项系数标定结果的影响

给定  $\theta=45^\circ$ ,  $h=10$  m,  $\mu_f=0.577$ ,  $\delta_f=0.08$ 。 $\delta_c$  在区间 [0.15, 0.35] 变动, 求解满足边坡稳定目标可靠度的  $\mu_c$ , 进而分别按 PFM-C 和 PFM-L 进行标定, 计算结果如图 6 所示。类似地, 给定  $\mu_c=20$  kPa,  $\delta_c=0.25$ ,  $\delta_f$  在 [0.04, 0.12] 区间变动, 求解满足目标可靠度的  $\mu_f$ , 进而得到的标定结果如图 7 所示。

图 6, 7 所示结果表明:

(1) 变异系数改变时, PFM-L 法得到分项系数比 PFM-C 法得到的结果更加稳定。

(2) 变异系数改变时, 分项系数标定结果变化幅度较大。且  $\delta_c$  对  $\gamma_c$  影响远大于对  $\gamma_f$  的影响,  $\delta_f$  对  $\gamma_f$  影响远大于对  $\delta_f$  的影响。

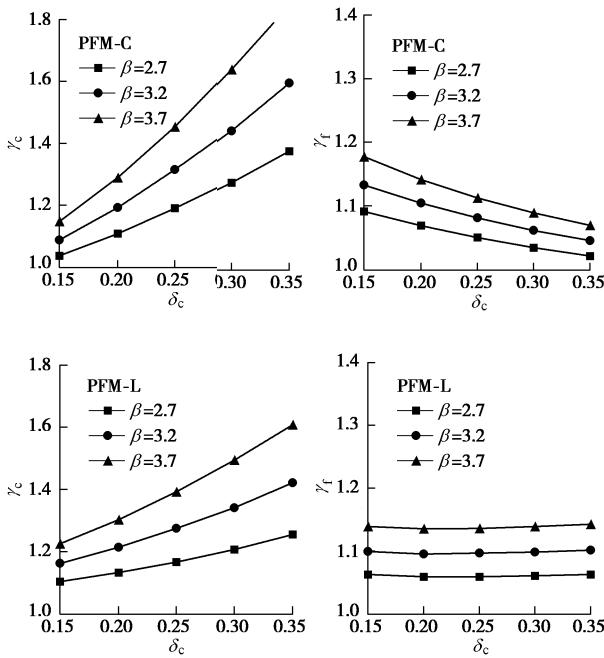
图 6 分项系数标定结果 ( $\delta_c \in [0.15, 0.35]$ ,  $\delta_f=0.08$ )

Fig. 6 Calibration results of partial factors

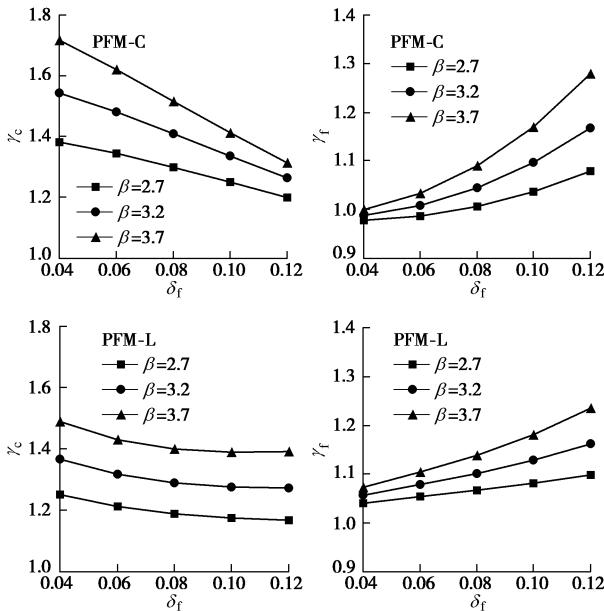
图 7 分项系数标定结果 ( $\delta_f \in [0.04, 0.12]$ ,  $\delta_c=0.25$ )

Fig. 7 Calibration results of partial factors

如图 2(右)所示, 设计域上每一点 ( $c_d, f_d$ ) 对应着一组分项系数 ( $\gamma_c, \gamma_f$ ) 且满足  $g=0$ 。那么当设计点变动时,  $\gamma_c$  和  $\gamma_f$  会同时变动, 并且具有负相关性。如图 3 所示, PFM-L 采用指定角度的方式均衡了折减比例, 减少了负相关性对标定结果的影响。因此, 如图 6, 7 所示, 就标定结果稳定性而言, PFM-L 比 PFM-C 更具优越性, 即 PFM-L 更加合理。

如式 (19)、(20) 所示,  $\delta_c$  是  $\gamma_c$  直接影响因素之一(其余因素为  $t$  和  $d\cos(\theta_{yc})$ ), 因此  $\delta_c$  改变会引起  $\gamma_c$

明显改变, 对  $f$  的讨论类似, 如规律 2 所示。

#### 4.5 边坡几何形状对分项系数取值的影响

由 4.4 节的讨论可知, PFM-L 标定结果更稳定。因此在研究边坡形状的影响时, 仅使用 PFM-L 法进行分项系数的标定。

对于不同边坡几何形式, 边坡稳定的功能函数不同, 进而会间接影响到分项系数的标定结果。本文考虑坡高  $h$  和坡角  $\theta$  的影响。

分别取  $\theta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ , 按 PFM-L 计算分项系数的结果如图 8, 9 所示。分别取  $h=5 \text{ m}, 10 \text{ m}, 15 \text{ m}$ , 按 PFM-L 计算分项系数如图 10, 11 所示。

这里需要说明的是, 由于边坡坡高  $h$  和坡角  $\theta$  对边坡稳定性影响较大, 若统一给定强度参数的初始均值  $\mu_c$ , 有些时候无法找到满足目标可靠度的另一均值  $\mu_f$ 。4.4 节也表明均值对分项系数标定影响很小, 因此这里实际采用的初始均值并不统一。

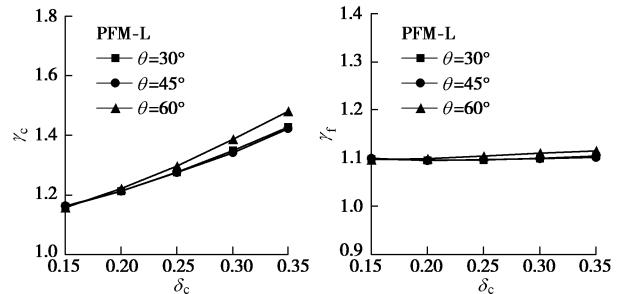
图 8 分项系数标定结果 ( $h=10 \text{ m}$ ,  $\delta_f=0.08$ )

Fig. 8 Calibration results of partial factors

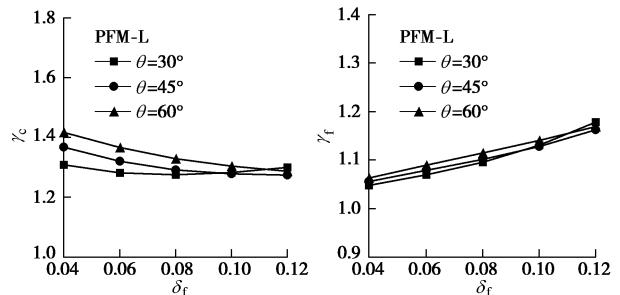
图 9 分项系数标定结果 ( $h=10 \text{ m}$ ,  $\delta_c=0.25$ )

Fig. 9 Calibration results of partial factors

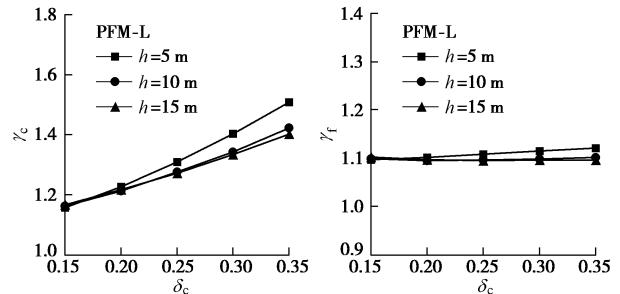
图 10 分项系数标定结果 ( $\theta=45^\circ$ ,  $\delta_f=0.08$ )

Fig. 10 Calibration results of partial factors

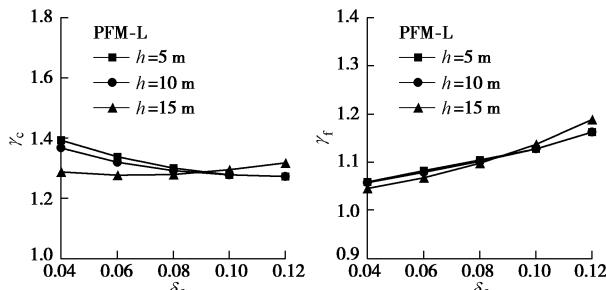
图 11 分项系数标定结果 ( $\theta=45^\circ$ ,  $\delta_c=0.25$ )

Fig. 11 Calibration results of partial factors

由图 8~11 可知:

(1) 相比较强度参数的变异系数而言, 坡角和坡高对分项系数的标定结果影响很小: 对  $\gamma_c$  有少量影响, 而对  $\gamma_f$  的影响可以忽略。

(2) 给定强度参数分布时, 随着坡角  $\theta$  的增大,  $\gamma_c$  有所提高, 其提高幅度与  $\delta_c$  正相关而与  $\delta_f$  负相关; 随着坡高  $h$  的增大,  $\gamma_c$  稍有减小; 其减小幅度与  $\delta_c$  正相关而与  $\delta_f$  负相关。

## 5 分项系数拟选和优选

通过以上标定过程(第 4 节), 得到了分项系数的取值范围和主要影响因素。在此基础上, 按照本文 3.4 节方法进行分项系数的拟选和优选。

### 5.1 拟选分项系数

依据分项系数标定结果(图 4~10), 可知  $\gamma_c$ ,  $\gamma_f$  的取值范围分别约为 (1.20~1.44) 和 (1.05~1.17)。将所有分项系数组合表示到同一副图中, 如图 12 所示。由图 12 可知, PFM-C 法得到的结果较为离散。因此, 在分项系数优选中, 只针对 PFM-L 法的计算结果进行。

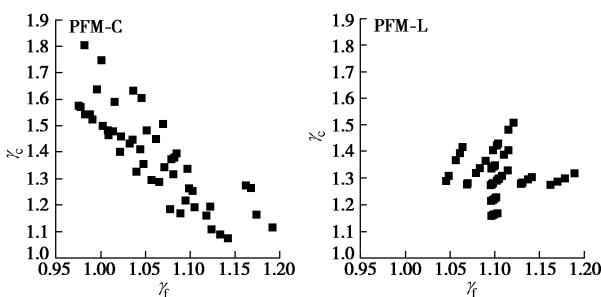


图 12 分项系数标定结果

Fig. 12 Calibration summary of partial factors

依据式(25)、(26), 拟选分项系数组合为 (1.30, 1.10)、(1.35, 1.10)、(1.40, 1.10)、(1.30, 1.15)、(1.30, 1.15) 和 (1.35, 1.15), 分别记为 1~6 组。

### 5.2 优选分项系数

由标定结果可知: 一定目标可靠度和分位比下, 影响分项系数标定结果的最主要因素为变异系数, 其影响显著大于其它因素影响。因此, 验算参数只取  $c$ ,

$f$  的变异系数 ( $p=2$ ) 各 5 组 ( $q=5$ )。

分项系数优选原则为: 如果经过分项系数折减后的抗剪强度参数设计值恰好使边坡达到极限平衡(式(34)), 结构实际可靠度  $\beta$  应尽可能接近目标可靠度  $\beta_T$ 。

$$g(c_d, f_d) = 0. \quad (34)$$

整理式(17)~(20)可得  $c_d$  和  $f_d$  的关于均值和变异系数的表达式

$$c_d = \exp[\mu_c^n + \sigma_c^n \Phi^{-1}(t)] / \gamma_c, \quad (35)$$

$$f_d = u_f [1 - \Phi^{-1}(t) \delta_f] / \gamma_f, \quad (36)$$

式中

$$\mu_c^n = \ln(\mu_c) - 0.5(\sigma_c^n)^2, \quad (37)$$

$$\sigma_c^n = \sqrt{\ln(1 + \delta_c^2)}.$$

当给定均值 ( $\mu_c$ ,  $\mu_f$ ), 变异系数 ( $\delta_c$ ,  $\delta_f$ ) 恰好满足式(34)时, 由映射变换法求得实际可靠度  $\beta$ 。

优选过程步骤如下:

(1) 给定边坡形式, 求得对应功能函数  $g(x)$ ; 给定初始均值 ( $\mu_{c0}$ ,  $\mu_{f0}$ )、初始变异系数 ( $\delta_{c0}$ ,  $\delta_{f0}$ )。

(2) 仅改变  $\delta_c$  (记为 Case1) 或  $\delta_f$  (记为 Case2), 各取 5 个点, 共计取 10 个参数组合。

(3) 对改变  $\delta_c$  的组合, 指定  $\mu_f$  不变, 试算找到满足式 34 的  $\mu_c$ ; 类似地, 对改变  $\delta_f$  的组合, 指定  $\mu_c$  不变找到满足式(34)的  $\mu_f$ 。

(4) 计算每个组合实际可靠度  $\beta$ , 按式(29)计算误差平方和 sser。

优选工况如表 4 所示。

表 4 优选工况表

Table 4 Checking cases in optimizing partial factors

工况	$h/m$	$\theta/(^\circ)$	$\delta_c$	$\delta_f$
Case1	10	60	0.15~0.35	0.08
Case2			0.25	0.04~0.12

实际可靠度  $\beta$  的计算结果如图 13 所示。

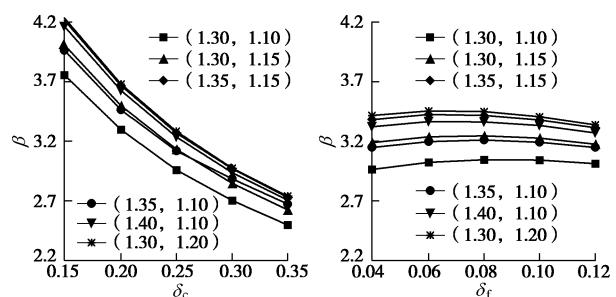


图 13 6 组分项系数对应实际可靠度

Fig. 13 Real reliability indices of slope designed using PF

6 组分项系数验算结果规律同, 当  $f$  变异系数改变时, 实际可靠度变化很小; 而  $c$  变异系数增大时, 实际可靠度有较大变化, 且呈递减趋势。按式(29)

计算 sser, 结果如图 14 所示。在  $\Delta$  附近加大取点密度(每隔 0.1 取一个点), 绘制 sser 关于  $\gamma_c$  和  $\gamma_f$  的等高线图如图 15 所示。

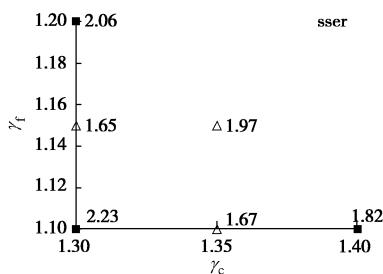


图 14 6 组分项系数对应 sser

Fig. 14 Sums of residual reliability indices

前文 4.4 节标定结果表明, 标定得到  $\gamma_c$  和  $\gamma_f$  存在一定负相关性; 图 15 也表明最优分项系数组合  $\gamma_c^{\text{op}}$  与  $\gamma_f^{\text{op}}$  间也存在较强的负相关性, 即在误差允许范围内, 实际最优分项系数组合是一个范围(比如一条短线段或一个很扁的椭圆等等), 而不是一个点。下面以等高线  $\text{sser}=1.66$  为界, 并考虑式(25)的限制, 最优分项系数可近似表示为

$$\gamma_f^{\text{op}} = -0.83\gamma_c^{\text{op}} + 2.23 \quad (38)$$

考虑到实际分项系数一般取整, 本文建议的分项系数组合为  $\gamma_c=1.30$ ,  $\gamma_f=1.15$ 。

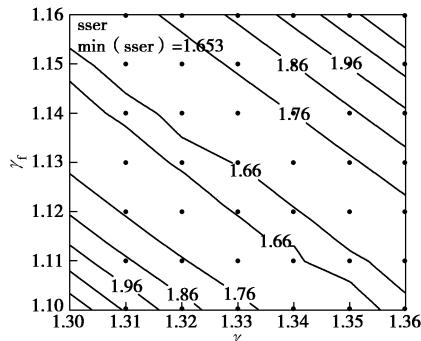


图 15 sser 等高线图

Fig. 15 Contours of sser

## 6 与现行规范的比较

尽管规范给出的是安全系数值, 实际应用时岩土材料抗剪强度参数并不取均值, 而是取试验结果小值平均值或者选用依据经验取地质建议值。这种做法事实上已经将均值折减过一次, 安全系数  $K$  可理解为一种特殊的分项系数, 满足  $\gamma_c = \gamma_f = K$ , 且  $t$  为小值平均值对应分位比。

利用蒙特卡洛法计算可知, 对于正态分布, 小值平均值对应分位比恒定为 0.212, 而对于对数正态分布, 小值平均值对应分位比与变异系数近似呈线性关系(如图 16 所示), 变异系数趋向于 0 时, 分位比极

限为 0.212。

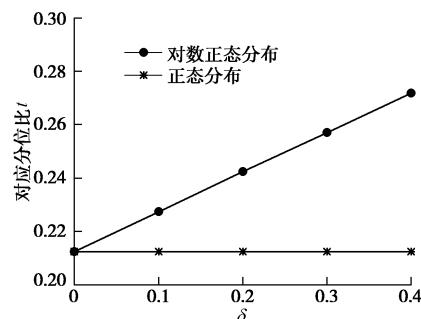


图 16 小值平均值对应的分位比与变异系数关系

Fig. 16 Actual fractile ratios for average of small values

不妨取图 13 中一组数据为例: 均值  $\mu_c=30.0 \text{ kPa}$ , 典型变异系数  $\delta_c=0.25$ ,  $\delta_f=0.08$ , 试算得当  $\mu_f=0.628$ , 实际可靠度 3.20。当  $\mu'_f=0.633$  时, 分项系数组合  $\gamma_c=1.30$ ,  $\gamma_f=1.15$  恰好满足式 34,  $\mu_f$  约等于  $\mu'_f$ , 可知此时本文推荐的最优分项系数组合是合理的。

下面考察传统安全系数法对应实际可靠度。 $c$ ,  $f$  均取小值平均值, 则分位比  $t_c=0.249$ ,  $t_f=0.212$ 。取  $\gamma_c=\gamma_f=K$ , 类似地, 按式(34)试算求得  $\mu'_f$ , 进而求得不同安全系数  $K$  下的实际可靠度, 如表 5 所示。

考虑到本文目标可靠度  $\beta_T=3.20$ , 因此此例中  $t=0.1$  的分项系数(1.30, 1.15)相当于安全系数  $K=1.34$ , 大致为规范中一级边坡要求。

表 5 安全系数验算工况表

Table 5 The cases used to check the performance of  $F_s$

$K$	$\delta_c$	$\delta_f$	$\mu_c$	$\mu'_f$	$\beta$
1.25	0.25	0.08	30	0.5305	2.50
1.30	0.25	0.08	30	0.5808	2.87
1.34	0.25	0.08	30	0.6213	3.17
1.40	0.25	0.08	30	0.6828	3.61
1.50	0.25	0.08	30	0.7867	4.34

## 7 结论

(1) 结合条分法和响应面法, 能够得到边坡稳定的功能函数  $g$ 。功能方程  $g=0$  上任一点都可以作为设计点, 用于分项系数的标定。

(2) 影响土坡分项系数标定的主要因素是土体抗剪强度参数的变异系数; 次要因素包括抗剪强度参数的均值和边坡几何形状(坡高和坡角)。

(3) 减小分位比能够部分抵消由变异系数所引起的分项系数标定值以及实际边坡可靠度水平的波动。建议使用较小的分位比(例如 0.1 或 0.05)。

(4) 相对于 PFM-C(传统方法, 设计点为验算点), PFM-L(给定角度法)得到分项系数更稳定, 在土质边坡分项系数的标定中具有明显优势。PFM-L 法

还存在最优的分位比。

(5) 采用多种分项系数组合进行设计, 以边坡的可靠度水平残差平方和为指标, 能够优选分项系数。分析结果表明: 当给定目标可靠度为 3.2, 分位比取 0.1 时: 建议的  $c, f$  分项系数分别为 1.30 和 1.15。

(6) 土坡稳定分析的单一安全系数设计方法也可视为一种特殊分项系数法, 它采用小值平均值或地质建议值作为标准值, 采用安全系数作为分项系数, 然而, 它对应的实际可靠度的大小和稳定性是值得商榷的, 较为严格的分项系数法可以建立与目标可靠度更明确的联系, 具有良好的发展前景。而传统安全系数法可以作为分项系数法发展的参考和对比。

对于边坡而言, 由于土体本身强度参数的变异系数范围较大, 导致实际分项系数优选困难。本文在研究中, 假定  $c, f$  分别服从对数正态分布和正态分布且不相关, 不考虑上部堆载和地下水影响, 考虑  $c, f$  均值和变异系数、坡高和坡脚、分位比和设计点选取方法等因素, 给出了优选的分项系数。而目前边坡规范均采用安全系数设计, 这种设计方法已经过数十年的考验, 具有很高的适用性; 若要采用分项系数法, 前后规范计算结果不应出现较大差距, 至少大部分情况下, 两种设计方法结果应当相近, 要想达到这一目的还需要更多的工作。

## 参 考 文 献:

- [1] GB50330—2013 建筑边坡工程技术规范 [S]. 2013. (GB50330—2013 Technical code for building slope engineering[S]. 2013. (in Chinese))
- [2] SL386—2007 水利水电工程边坡设计规范[S]. 2007. (SL386—2007 Design code for engineered slopes in water resources and hydropower projects[S]. 2007. (in Chinese))
- [3] 陈立宏. 欧洲岩土工程设计规范 Eurocode7 简介[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(1): 137–138. (CHEN Li-hong. Introduction to geotechnical design code: Eurocode 7[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(1): 137–138. (in Chinese))
- [4] EN1997—1 Eurocode7: geotechnical design-part 1: general rules[S]. 1997.
- [5] CHING J Y, PHOON K K. Quantile value method versus design value method for calibration of reliability-based geotechnical codes[J]. Structural Safety, 2013(44): 47–58.
- [6] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析—原理、方法、程序[M]. 中国水利水电出版社, 2003: 273–274, 289–290. (CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis - principles, methods and procedures[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2003: 273–274, 289–290, 311–318. (in Chinese))
- [7] GWANGHA Roh, HONG H P. Calibration of information-sensitive partial factors for assessing earth slopes[J]. Journal of Geo Engineering, 2009, 4(3): 95–96.
- [8] GB 50199—2013 水利水电工程结构可靠性设计统一标准 [S]. 2013. (GB 50199—2013 Unified design standard for reliability of hydraulic engineering structures[S]. 2013. (in Chinese))
- [9] 张继周, 缪林昌. 岩土参数概率分布类型及其选择标准[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(增刊 2): 3526–3532. (ZHANG Ji-zhou, MIAO Lin-chang. Types and selection criteria of probability distribution of rock and soil parameters[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(S2): 3526–3532. (in Chinese))
- [10] 陈立宏. 抗剪强度概率特性的相关与非相关回归统计法 [J]. 岩土工程学报, 2013, 35(8): 1397–1402. (CHEN Li-hong. Correlated and uncorrelated linear regression statistical methods for probabilistic characteristics of shear strength[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(8): 1397–1402. (in Chinese))
- [11] MEYERHOF G G. Limit states design in geotechnical engineering[J]. Structural Safety, 1982, 1: 67–71.
- [12] BAECHER G B, CHRISTIAN J T. Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering[M]. Wiley, 2003.
- [13] 张 明. 结构可靠度分析: 方法与程序[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 8–13, 29–31. (ZHANG Ming. Structural reliability analysis - methods and procedures[M]. Beijing: Science Press, 2009, 8–13, 29–31. (in Chinese))
- [14] 卢育竹, 侯建国, 安旭文. 映射变换法的收敛性证明及其在抗力分项系数计算中的应用[J]. 武汉大学学报(工学版). 2012, 45(5): 619–622. (LU Yu-zhu, HOU Jian-guo, AN Xu-wen. Proof of convergence of mapping transformation method and its application to calculation of partial safety factor for resistance[J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2012, 45(5): 619–622. (in Chinese))
- [15] 孙万禾, 黄传志, 张美燕. 地基稳定和承载力验算中分项系数的确定 [J]. 中国港湾建设, 2005(6): 1–2. (SUN Wan-he, HUANG Chuan-zhi, ZHANG Mei-yan. Determination of sub-coefficients in verification of stability and bearing capacity of foundations[J]. China Harbour Engineering, 2005(6): 1–2. (in Chinese))