

DOI: 10.11779/CJGE201608011

横观各向同性层状地基上弹性矩形板的参数研究

艾智勇^{1, 2}, 杨轲舒^{1, 2}

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘 要: 根据横观各向同性单层地基的解析层元, 结合土体之间的层间连续性条件, 得到了横观各向同性层状土体在任意均布荷载下的位移解答。结合弹性矩形板与层状地基表面的位移协调条件和光滑接触条件, 推导出横观各向同性地基与弹性矩形板共同作用的解析解。随后编制了相应的 Fortran 程序进行数值计算, 分析了板土刚度比、土体横观各向同性和土体层状特性, 模型中各个参数对计算结果的影响。结果表明: 板土刚度比 γ 、横观各向同性参数 m 和层状性质参数 α 对计算结果影响更大, 横观各向同性参数 n 和层状性质参数 β 影响则相对较小。

关键词: 横观各向同性; 层状地基; 解析层元解; 弹性矩形板; 板土刚度比

中图分类号: TU47

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2016)08-1442-05

作者简介: 艾智勇(1966-), 男, 江西余江人, 博士, 教授, 主要从事岩土及地下工程方面的教学和研究工作。E-mail: zhiyongai@tongji.edu.cn。

Parametric study on an elastic rectangle plate on transversely isotropic multi-layered soils

AI Zhi-yong^{1, 2}, YANG Ke-shu^{1, 2}

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: According to the analytical element of a single layer and the continuity conditions between each layer, the vertical displacements of transversely isotropic multi-layered soils under arbitrary vertical uniform loads are obtained. Based on the displacement coordination and smooth contact, the analytical solutions to the interaction problem between the flexible rectangular footing and transversely isotropic multi-layered soils are derived. A Fortran module is developed to analyze the effects of the rigidity of the rectangular footing, transversely isotropic and stratified characters. The results show that the rigidity ratio of plate to soil γ , transversely isotropic parameter m and stratified parameter α exert a great influence on the vertical displacements of soils, while the influence of parameters n and β is limited.

Key words: transverse isotropy; multi-layered soil; analytical element solution; elastic rectangular footing; rigidity ratio of plate to soil

0 引 言

天然地基在长期自然沉积过程中, 往往呈现出横观各向同性和层状的性质, 因此在研究地基与基础共同作用时采取横观各向同性地基模型是更符合实际的。陈光敬等^[1]运用传递矩阵法求解了成层横观各向同性弹性体轴对称问题, 顿志林等^[2]采用位移函数解法得到了轴对称横观各向同性地基的通解; 艾智勇等^[3]在直角坐标下, 推导出三维层状横观各向同性地基的非耦合传递矩阵解; 后来, 艾智勇等^[4]又进一步求得了三维横观各向同性地基的非耦合解析层元解。对于板土共同作用问题, 袁聚云等^[5]基于成层横观各向同性弹性体轴对称问题的传递矩阵解, 研究了中心荷载

下对称刚性板的地基沉降和反力; 艾智勇等^[6]则基于三维层状横观各向同性地基的非耦合传递矩阵解, 对弹性矩形板下的横观各向同性多层地基进行了初步分析。与传递矩阵法相比, 解析层元法中矩阵元素仅包含负指数函数, 计算结果稳定且不受计算深度影响。艾智勇等^[7]采用柱坐标, 基于解析层元法研究了轴对称横观各向同性层状地基上刚性圆板与地基共同作用问题。本文采用直角坐标, 基于解析层元法进一步研究弹性矩形板与横观各向同性地基的共同作用问题, 并分析板土刚度比、地基的横观各向同性及层状性质对地基沉降的影响。

1 单层地基的解析层元

单层横观各向同性地基表面和任意深度 h_n 处位移和应力的关系为^[4]

$$\begin{bmatrix} -\bar{\sigma}_c(\xi, 0) \\ -\bar{\sigma}_z(\xi, 0) \\ \bar{\sigma}_c(\xi, h_n) \\ \bar{\sigma}_z(\xi, h_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_c(\xi, 0) \\ \bar{u}_z(\xi, 0) \\ \bar{u}_c(\xi, h_n) \\ \bar{u}_z(\xi, h_n) \end{bmatrix}, \quad (1a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_d(\xi, 0) \\ \bar{\sigma}_d(\xi, h_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_d(\xi, 0) \\ \bar{u}_d(\xi, h_n) \end{bmatrix}, \quad (1b)$$

式中, k_{ij} 为精确对称的解析层元元素, k_{ij} 和 t_{ij} 具体见文献[4], $\bar{u}_z(\xi, h_n)$, $\bar{\sigma}_z(\xi, h_n)$ 分别是 z 方向的位移 u_z 和正应力 σ_z 为 Fourier 变换后的量, ξ 为 Fourier 变换参数. $\bar{u}_c(\xi, h_n)$, $\bar{u}_d(\xi, h_n)$, $\bar{\sigma}_c(\xi, h_n)$, $\bar{\sigma}_d(\xi, h_n)$ 分别是 u_c , u_d , σ_c , σ_d 为 Fourier 变换后的量,

$$u_c = \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \quad (2a)$$

$$u_d = \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_c = \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right), \quad (2b)$$

$$\sigma_d = \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right).$$

式中, u_x , u_y 分别是 x , y 方向的位移, τ_{xz} , τ_{yz} 是 z 面上沿 x, y 方向的剪应力。

2 层状地基的解析层元解

层状横观各向同性地基示意图如图 1 所示。其中, E_h 为水平向弹性模量, E_v 为竖向弹性模量; G_v 为竖直面上的弹性模量, μ_h 为水平向应力引起的正交水平向应变的泊松比, μ_{vh} 为竖直向应力引起的水平向应变的泊松比。

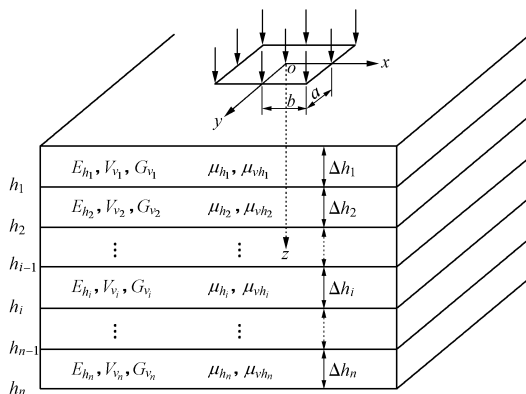


图 1 横观各向同性地基示意图

Fig. 1 Transversely isotropic multi-layered soils

层状地基的连续性条件为

$$u_x(x, y, h_i^-) = u_x(x, y, h_i^+), \quad (3a)$$

$$u_y(x, y, h_i^-) = u_y(x, y, h_i^+), \quad (3b)$$

$$u_z(x, y, h_i^-) = u_z(x, y, h_i^+), \quad (3c)$$

$$\tau_{xz}(x, y, h_i^-) = \tau_{xz}(x, y, h_i^+), \quad (3d)$$

$$\tau_{yz}(x, y, h_i^-) = \tau_{yz}(x, y, h_i^+), \quad (3e)$$

$$\sigma_z(x, y, h_i^-) = \sigma_z(x, y, h_i^+). \quad (3f)$$

式中, $u_x(x, y, h_i^-)$ 表示第 i 层中深度 $z = h_i$ 处的 x 方向的位移, $u_x(x, y, h_i^+)$ 表示第 $i+1$ 层中深度 $z = h_i$ 处的 x 方向的位移, 其它同理。

将式 (1) 应用于各层, 并结合层间地基的连续性条件, 就可组装出整个成层体系的总体刚度矩阵:

$$\begin{bmatrix} -\bar{\sigma}_c(\xi, 0) \\ -\bar{\sigma}_z(\xi, 0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{\sigma}_c(\xi, h_n) \\ \bar{\sigma}_z(\xi, h_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^1 & & & \\ & K^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K^{n-1} & \\ & & & & K^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_c(\xi, 0) \\ \bar{u}_z(\xi, 0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{u}_c(\xi, h_n) \\ \bar{u}_z(\xi, h_n) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中, K^i 为第 i 层土体的解析层元。

式 (4) 即为层状地基三维问题在 Fourier 变换域内的解。

3 层状地基与弹性矩形板共同作用

层状地基与弹性板共同作用的剖面示意图如图 2 所示。弹性板的尺寸为 $2b \times 2a$, $\omega(x, y)$ 为板的挠度, $p(x, y)$ 为矩形板上作用的荷载, $q(x, y)$ 为矩形板底面地基的反力。考虑板与地基光滑接触, 则仅有竖向荷载 $q(x, y)$ 作用于地基表面, 于是边界条件可以表示为

$$\sigma_z(x, y, 0) = q(x, y) \quad (|x| \leq b, |y| \leq a), \quad (5a)$$

$$u_z(x, y, 0) = \omega(x, y) \quad (|x| \leq b, |y| \leq a), \quad (5b)$$

$$\tau_{xz}(x, y, 0) = 0, \quad (5c)$$

$$\tau_{yz}(x, y, 0) = 0, \quad (5d)$$

$$u_x(x, y, h_n) = u_y(x, y, h_n) = u_z(x, y, h_n) = 0. \quad (5e)$$

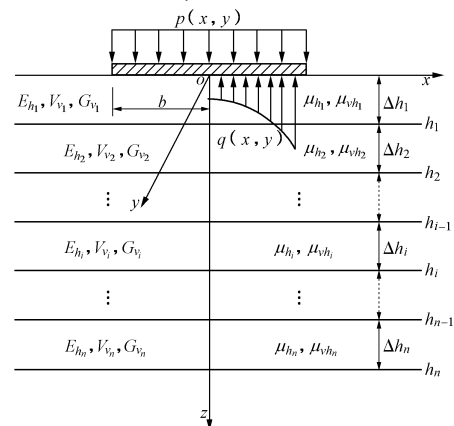


图 2 板土共同作用示意图

Fig. 2 An elastic rectangle plate on transversely isotropic multi-layered soils

考虑到式 (4) 左端第二项不为零, 将式 (5) 进行双重 Fourier 变换后再带入式 (4), 并对矩阵进行运算, 可以得到:

$$\bar{u}_z(\xi, 0) = f_{22} \bar{q}(\xi), \quad (6)$$

式中, f_{22} 为式 (4) 中刚度矩阵的逆矩阵中第二行第二列的元素, $\bar{q}(\xi)$ 为二重 Fourier 变换域内竖向荷载。

根据经典弹性薄板理论, 薄板的挠曲方程为

$$D \nabla^4 \omega(x, y) = p(x, y) - q(x, y). \quad (7)$$

对式 (7) 进行二重 Fourier 变换得:

$$D \xi^4 \bar{\omega}(\xi) = \bar{p}(\xi) - \bar{q}(\xi), \quad (8)$$

式中, $D = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \mu_b^2)}$, 为板的抗弯刚度, 其中 E_b , μ_b

和 h_b 分别为板的弹性模量、泊松比和厚度; ∇^2 为

Laplace 算子, $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$; $\bar{\omega}(\xi)$, $\bar{p}(\xi)$, $\bar{q}(\xi)$

分别为 $\omega(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ 相对应的二重 Fourier 变换后的形式。根据弹性矩形板与地基表面竖向位移的协调条件, 可得:

$$\bar{u}_z(\xi, 0) = \bar{\omega}(\xi), \quad (9)$$

联立式 (6), (8), (9) 得到:

$$\bar{q}(\xi) = \frac{\bar{p}(\xi)}{1 + f_{22} D \xi^4}. \quad (10)$$

对式 (10) 进行 Fourier 逆变换, 可求得竖向荷载下横观各向同性地基与弹性矩形板共同作用的接触应力; 进而根据式 (6)、(8) 可分别求得地基和板表面的位移。

4 数值分析与讨论

4.1 验证

为验证本文理论及计算方法的正确性, 将本文退化到弹性半空间上弹性方板的情况, 并与文献[8~10]的竖向位移解进行对照。计算时, 方形板的参数如下: 边长 $a = b = 4 \text{ m}$, 板厚 $h_b = 0.2 \text{ m}$, 弹性模量 $E = 0.343 \times 10^5 \text{ MPa}$, 泊松比 $\mu_b = 0.167$ 。弹性半空间地基的杨氏弹性模量 $E = 0.343 \times 10^3 \text{ MPa}$, 泊松比为 $\mu = 0.4$ 。从表 1 可见, 本文计算结果与样条有限元法[8]、等参有限元法[9]及半解析数值法[10]的结果符合得很好, 这就验证了本文方法的正确性。

表 1 弹性半空间地基表面竖向位移

Table 1 Surface vertical displacement of multi-layered soils (m)

样条元法 ^[8]	等参元法 ^[9]	半解析法 ^[10]	本文方法
8×8 网格	8×8 网格	8×8 网格	
0.01062	0.01061	0.01060	0.01061

4.2 板土相对刚度对计算结果的影响

为方便分析, 定义无量纲板土相对刚度比为 $\gamma =$

$D / (G_{v1} b^3)$, 无量纲土体竖向位移为 $u_z^* = G_{v1} u_z / pb$, 其中 G_{v1} 为第一层土的剪切模量。为了剔除地基层状性质对计算结果的影响, 取单层横观地基进行分析。弹性矩形板参数取: 长宽比 $b : a = 1 : 1$, $\mu_b = 0.167$, 板厚 $h_b = 0.2 \text{ m}$ 。土体参数取: $E_h = E_v = 20 \text{ MPa}$, $\mu_h = \mu_{vh} = 0.25$, 土层厚度 $h = 30 \text{ m}$ 。取 $\gamma = 0.5, 1.0, 5.0$ 三种情况进行分析, 板底竖向位移结果见图 3。由图 3 可见, 土体竖向位移随着 γ 的增大而减小; 当 $\gamma = 5$ 时, 板中心处土体和板边缘处土体的差异沉降很小, 表明此时弹性板的刚度较土体而言很大, 近似于刚性板与土体共同作用。

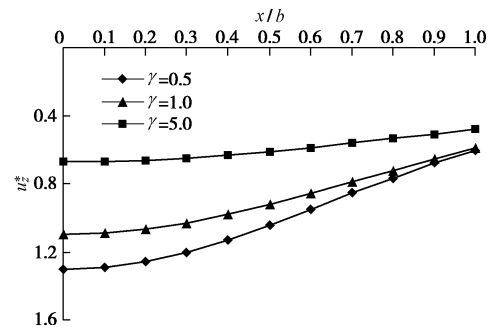


图 3 板土刚度比 γ 对竖向位移的影响

Fig. 3 Influence of stiffness ratio γ on vertical displacement

4.3 横观各向同性性质对计算结果的影响

横观各向同性参数主要包括: $n = E_h / E_v$ 为水平弹性模量与竖向弹性模量之比; $m = G_v / E_v$ 为剪切模量与竖向弹性模量之比。首先研究土体横观参数 n 对计算结果的影响。这时弹性板参数为: 长宽比 $b : a = 2 : 1$, 板厚 $h_b = 0.2 \text{ m}$, 板土相对刚度 $\gamma = 0.5$ 。土体模型取横观各向同性单层土体, 其参数为: $\mu_h = \mu_{vh} = 0.25$, $m = 0.4$ 。分别取 $n = 1, 2, 3$ 来做比对。 n 对土体竖向位移的影响见图 4。由图 4 可知, 土体竖向位移随着 n 增大而减小, 随着 n 的不断增大, 这种减小幅度越来越小, 表明 n 的变化对土体竖向位移的影响有限。

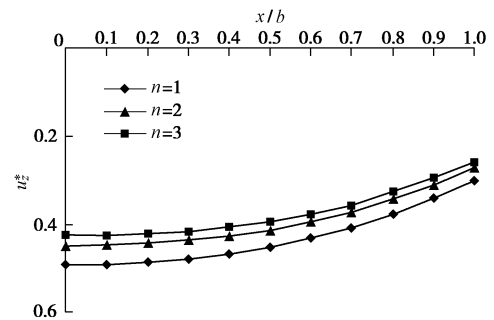


图 4 横观各向同性参数 n 对竖向位移的影响

Fig. 4 Influence of parameter n on vertical displacement

其次研究土体横观参数 m 对计算结果的影响。

$n=2$, 分别取 $m=0.2, 0.3, 0.4$ 作对比, 算例的其它条件同上。 m 对土体竖向位移的影响见图 5。由图 5 可知, 土体竖向位移随着 m 的增大而减小, 且位移减小幅度较为均匀。

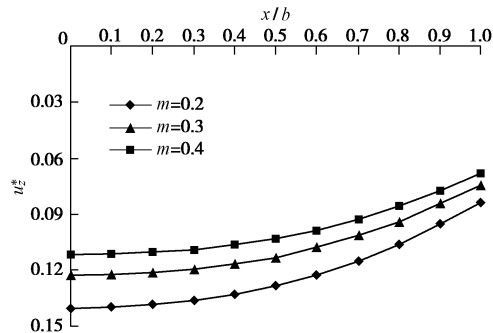


图 5 横观各向同性参数 m 对竖向位移的影响

Fig. 5 Influence of parameter m on vertical displacement

4.4 层状性质对计算结果的影响

以两层土为例研究层状性质对计算结果的影响。定义 $\alpha = G_{v1} / G_{v2}$ 为上层土体剪切模量与下层土体剪切模量之比, $\beta = h_1 / b$ 为上层土体厚度与板宽度的比值。首先研究 α 对计算结果的影响。弹性板计算参数同 4.3 节。土体参数为: $n_1 = n_2 = 2$, $m_1 = m_2 = 0.3$, $\beta = 2.0$, $h_1 = 4 \text{ m}$, $h_2 = 16 \text{ m}$ 。分别取 $\alpha = 0.5, 1.0, 2.0$ 作对比。 α 对土体竖向位移的影响见图 6。由图 6 可知, 土体竖向位移随着 α 的增大而减小, 且位移减小幅度较为均匀。

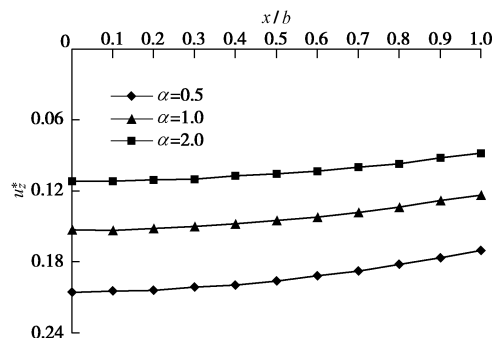


图 6 参数 α 对竖向位移的影响

Fig. 6 Variation of vertical displacement with different values of α

其次研究 β 对计算结果的影响。取土体总厚度 $h = 20 \text{ m}$, $\alpha = 2.0$ 。分别取 $\beta = 1, 2, 3$ 进行分析, 其它参数均同上。 β 对土体竖向位移的影响见图 7。由图 7 可知, 土体竖向位移随着 β 的增大而减小, 但位移减小幅度逐渐变小。本算例与工程实践中地基加固类似, $\alpha = 2.0$ 表明上层土体较下层坚硬, β 的增大可看作土体加固深度增大, 计算结果表明加固深度增大有利于减小土体位移, 但是这种减小位移的效果随着加固深度的增大不断减弱, 这一点也与工程实际相吻

合。

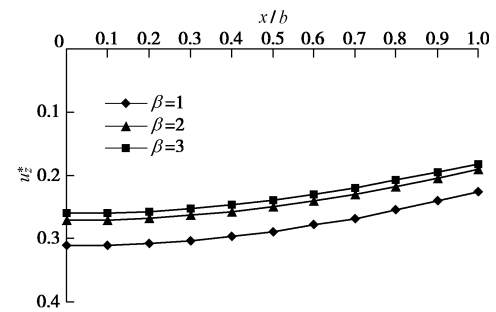


图 7 参数 β 对竖向位移的影响

Fig. 7 Variation of vertical displacement with different values of β

5 结 论

本文通过推弹性矩形板和横观各向同性地基共同作用的解析层元解, 编制了相应的 Fortran 程序, 得到其在物理域内的解答。通过与文献结果进行对比分析, 验证了本文理论及数值计算结果的正确性。算例分析表明, 板土刚度比和土的横观各向同性及层状性质对土体竖向位移有着明显的影响, 其中板土刚度比 γ 、横观各向同性参数 m 和层状性质参数 α 对计算结果影响更大, 而横观各向同性参数 n 和层状性质参数 β 影响则相对较小。具体而言:

(1) 土体竖向位移随着板土刚度比 γ 的增大而减小; 当 $\gamma = 5$ 时, 板中心和板边缘的差异沉降很小, 表明此时弹性板的刚度很大, 近似于横观地基与刚性板共同作用。

(2) 土体竖向位移随着横观各向同性参数 n 增大而减小, 而且随着 n 的不断增大, 这种减小幅度越来越小; 土体竖向位移随着横观各向同性参数 m 的增大而减小, 且位移减小幅度较为均匀。

(3) 土体竖向位移随着层状性质参数 α 的增大而减小, 且位移减小幅度较为均匀; 层状性质参数 β 的增大可看作土体加固深度的增大, 计算结果表明加固深度的增大有利于减小土体位移, 但是这种减小位移的效果随着加固深度的增大不断减弱。

参考文献:

- [1] 陈光敬, 赵锡宏, 于立. 传递矩阵法求解成层横观各向同性弹性体轴对称问题[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(5): 105 - 108. (CHEN Guang-jing, ZHAO Xi-hong, YU Li. Transferring matrix method to solve axisymmetric problems of layered cross-anisotropic elastic body[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(5): 105 - 108. (in Chinese))
- [2] 顿志林, 刘干斌, 茆向阳, 等. 层状横观各向同性地基轴对

- 称问题的位移解法[J]. 焦作工学院学报(自然科版), 2002, **21**(6): 420 - 426. (DUN Zhi-lin, LIU Gan-bin, CHANG Xiang-yang. Displacement function method of axisymmetrical problem with transversely isotropic layers[J]. Journal of Jiaozuo Institute of Technology (Natural Science), 2002, **21**(6): 420 - 426. (in Chinese))
- [3] 艾智勇, 成怡冲. 三维横观各向同性成层地基的传递矩阵解[J]. 岩土力学, 2010, **31**(增刊 2): 25 - 30. (AI Zhi-yong, CHENG Yi-chong. Transfer matrix solutions of three-dimensional transversely isotropic multi-layered soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, **31**(S2): 25 - 30. (in Chinese))
- [4] 艾智勇, 胡亚东. 3D 横观各向同性地基非耦合解析层元[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(增刊 2): 717 - 720. (AI Zhi-yong, CHENG Yi-chong. Uncoupled analytical layer-element for 3D transversely isotropic multilayered foundation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(S2): 717 - 720. (in Chinese))
- [5] 袁聚云, 孙祥波. 传递矩阵法分析中心荷载下对称刚性板地基沉降和反力[J]. 力学季刊, 2005, **26**(2): 316 - 321. (YUAN Ju-yun, SUN Xiang-bo. Analysis of settlement and contact pressure of symmetric rigid plate on subgrade under central concentrated load with method of transferring matrix[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2005, **26**(2): 316 - 321. (in Chinese))
- [6] 艾智勇, 曹国军. 弹性矩形板下横观各向同性多层地基分析[J]. 岩土力学, 2011, **32**(增刊 2): 59 - 63. (AI Zhi-yong, CAO Guo-jun. Analysis of transversely isotropic layered soils under an elastic rectangle plate[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(S2): 59 - 63. (in Chinese))
- [7] 艾智勇, 史本凯. 横观各向同性层状地基上轴对称受荷刚性圆板问题[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(12): 2341 - 2344. (AI Zhi-yong, SHI Ben-kai. An axisymmetrically loaded rigid circular disc on transversely isotropic layered soils [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(12): 2341 - 2344. (in Chinese))
- [8] 陈树坚, 彭育池. 多种地基假定下弹性基础板的样条有限元计算[J]. 中山大学学报, 1980, **19**(2): 15 - 23. (CHEN Shu-jian, PENG Yue-chi. On spline finite element computation of plates on elastic foundations for various base-models[J]. Journal of Sun Yat-sen University, 1980, **19**(2): 15 - 23. (in Chinese))
- [9] 王元汉, 邱先敏, 张佑启. 弹性地基板的等参有限元法计算[J]. 岩土工程学报, 1998, **20**(4): 7 - 11. (WANG Yuan-han, QIU Xian-min, CHENG You-qi. Bending plate on an elastic half-space analyzed by isoparametric elements[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, **20**(4): 7 - 11. (in Chinese))
- [10] WANG Y H, THAM L G, TSUI Y, et al. Plate on layered foundation analyzed by a semi-analytical and semi-numerical method[J]. Computers and Geotechnics, 2003, **30**(5): 409 - 418.