

DOI: 10.11779/CJGE201606019

横观各向同性层状地基上埋置刚性条带基础 动力刚度矩阵求解

韩泽军¹, 林 崇², 周小文¹, 李建波²

(1. 华南理工大学土木与交通学院, 广东 广州 510641; 2. 大连理工大学建设工程学部, 辽宁 大连 116024)

摘要: 提出了求解横观各向同性层状地基埋置刚性条带基础动力刚度矩阵的精确算法。算法利用空间变换方法求解得到了横观各向同性层状地基表面或内部任意点的动力位移响应, 针对开挖基础求解开挖区域内节点群的动力柔度矩阵, 最后利用容积算法求解埋置刚性条带基础动力刚度矩阵。此算法采用精细积分算法求解频率-波数域内层状地基的动力柔度系数, 对层状地基的层数和厚度均没有任何限制。此外, 算法基于维数较小的矩阵(2×2)运算, 数值计算稳定, 求解效率较高, 数值算例验证了所提算法的精确性及对横观各向同性多层地基的广泛适用性。

关键词: 横观各向同性; 层状地基; 精细积分算法; 埋置刚性条带基础; 动力刚度矩阵

中图分类号: TU470; O302 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2016)06-1117-08

作者简介: 韩泽军(1985-), 男, 博士, 助理研究员, 主要从事水工结构抗震和结构地基相互作用科研。E-mail: ctzjhan@scut.edu.cn。

Solution of dynamic stiffness matrix for rigid strip foundations embedded in layered transversely isotropic soil

HAN Ze-jun¹, LIN Gao², ZHOU Xiao-wen¹, LI Jian-bo²

(1. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China; 2. Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A precise algorithm is proposed to evaluate the dynamic stiffness matrix of the rigid strip foundation embedded in layered transversely isotropic soil. The space transformation method is used to obtain the dynamic displacement response of arbitrary nodes at the surface or in the layered transversely isotropic soil. Then the dynamic flexibility matrix of the nodes in the excavation scope is established. Finally the flexible volume method is introduced to evaluate the dynamic stiffness matrix of the rigid strip foundation. The proposed method solves the dynamic flexibility coefficients of the layered soil in the frequency-wave number domain by using the precise integration method, and there is no limit to the number and thickness of layers. In addition, the computation is based on the matrix algebra with small dimension, and the computation is always stable with high efficiency. Numerical examples demonstrate the accuracy and the wide applicability of the proposed method to the layered transversely isotropic soil.

Key words: transverse isotropy; layered soil; precise integration method; embedded rigid strip foundation; dynamic stiffness matrix

0 引言

结构-地基相互作用问题是一个复杂的课题, 是土动力学、结构动力学、地震工程学、岩土及结构抗震工程学、计算力学及计算机技术等众多学科的交叉性研究课题。由于许多大型土木建筑及海洋工程建筑都是坐落在层状地基之上的, 并且层状地基表现出不同程度的各向异性特性(例如河北沧州海兴核电站、日本的柏崎刈羽核电站等), 复杂层状地基的研究越来越受到人们的重视。近几十年来, 各国的研究者采用多

种多样的算法, 对结构-层状地基动力相互作用开展了大量的研究工作^[1-4]。

对于横观各向同性均质半无限地基的研究, 早期的解析解法可以给出一个地基动力响应的精确解, 计算效率高, 有利于对本质问题的理解。Gazetas^[5]得到

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(51508203); 中央高校基本科研业务费面上项目(2015M020); 博士后科学基金项目(2015M570713)

收稿日期: 2015-05-03

了横观各向同性层状地基表面条带基础动力响应, 该方法只能处理均质半无限或者单层地基的情况。

高速发展的计算机技术促进了数值方法的研究, 它已经成为了研究结构-地基动力相互作用问题的重要手段, 并且使波动解析解所遭遇的问题在一定程度上得到了缓解, 从而导致基础动力响应求解问题的研究内容、研究范围和研究深度得到进一步的拓展, 例如有限元法^[6]、边界元法^[7], 以及基于此两种算法的混合算法^[8]。上述数值算法在处理结构-半无限地基动力相互作用时都具有其优越性, 但大多只在近场考虑地基的非均匀特性, 或者只能处理单层地基的情况, 对于更为复杂的层状地基的情况则仍有诸多问题需要解决。林皋等^[9-10]结合 Fourier 变换方程和精细积分算法对二维层状地基动力响应提出了高效而精确的算法。艾智勇等^[11]运用对偶积分方程求解了横观各向同性层状地基与刚性条形基础接触应力问题。以上算法均处理层状地基表面动力响应的问题, 对于层状地基埋置条带基础将不再适用。

Wang 等^[12]求解得到了均质半无限正交各向异性地基上埋置条带基础动力刚度矩阵, 但该算法不能处理层状地基情况。20世纪80年代边界元法的出现促进了动力刚度研究的进展, 此方法满足无限远处辐射条件, 有利于无限地基的处理。Kausel 等^[13]提出了有限元离散与解析解相结合的薄层法求解层状地基动力响应问题, 此方法将层状地基进一步分成水平薄层, 垂直向采用有限元离散, 波只在水平向传播, 采用波数振型分解方法进行求解, 但垂直方向的离散可引起数值结果散乱^[14], 需采取措施提高计算精度和稳定性。Spyrakos 等^[15-16]和韩泽军等^[17]利用有限元和边界元相结合 (FEM-BEM) 的算法求解层状地基上埋置条带基础动力响应问题, 埋置基础利用有限元离散, 对于无限域地基利用边界元求解, 在两者的交界面进行协调耦合, 此方法对于多层地基情况较难得到基本解, 从而只能求解单层地基或者均质半无限的情况。

综上所述, 寻求一种既保证计算精度, 同时具有较高计算效率的求解横观各向同性层状地基上埋置基础动力刚度矩阵的算法具有重要的理论价值和实际意义。Gao 等^[18]所提出的精细积分算法可以高效、可靠而准确地在频率-波数域内进行多层地基波的传播分析, 这为解决任意层状地基动力响应问题的计算带来了新的希望。本文将精细积分方法求解动力方程的高精度、高稳定性特点应用到弹性地基动力分析中, 求解得到了二维横观各向同性层状地基表面或内部任意点的格林函数。在此基础上, 结合容积算法求解横观各向同性层状地基上任意开挖条带基础动力刚度矩

阵。

1 基本方程

将直角坐标系的坐标原点设置在层状地基的表面 $z=z_0=0$ 处, x 轴为水平向, z 轴竖直向下, 每层地基均为均质横观各向同性属性, 层状地基包括 I 层, 第 k 层的厚度由 z_k-z_{k-1} ($k=1, 2, \dots, I$) 来确定 (图 1)。对于无限长条带基础埋置于横观各向同性层状地基之上的问题可以简化为广义平面应变问题, 即假定波动只沿水平 x 方向传播, 且外部激励在 $x-z$ 平面内, 层状地基几何和材料属性以及所受荷载均与 y 方向无关, 因此应力、应变和位移均仅为 x 和 z 的函数。

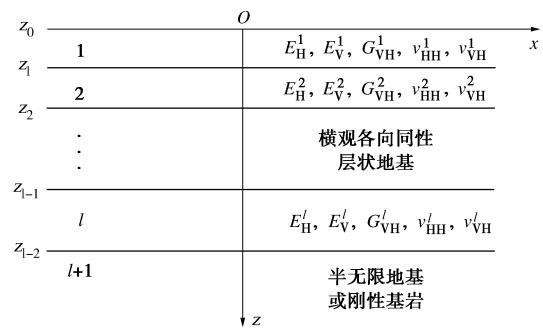


图 1 横观各向同性层状地基

Fig. 1 Transversely isotropic layered soil

定义空间域坐标 x 和波数域波数 κ 两者之间的 Fourier 变换关系为

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Gamma}(\kappa, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(x, z, \omega) \exp(-i\kappa x) dx \\ \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(x, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(\kappa, z, \omega) \exp(i\kappa x) d\kappa \end{array} \right., \quad (1)$$

式中, κ 是沿 x 方向的波数; ω 为频率; $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(x, z, \omega)$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}(\kappa, z, \omega)$ 分别表示频率-空间域和频率-波数域内的位移和应力等函数。

对于地基位移-应变关系为

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\varepsilon}_x = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad \tilde{\varepsilon}_y = 0, \quad \tilde{\varepsilon}_z = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}, \\ \tilde{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}, \quad \tilde{\gamma}_{xz} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}, \quad \tilde{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}. \end{array} \right\} \quad (2)$$

式中, \tilde{u} , \tilde{v} 和 \tilde{w} 分别为 x , y 和 z 方向的位移。

广义平面波动问题的动力控制方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tilde{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2}. \end{array} \right. \quad (3)$$

对于横观各向同性材料, 应力-应变关系定义为

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_x = d_{11}\tilde{\varepsilon}_x + d_{12}\tilde{\varepsilon}_y + d_{13}\tilde{\varepsilon}_z, \\ \tilde{\sigma}_y = d_{12}\tilde{\varepsilon}_x + d_{11}\tilde{\varepsilon}_y + d_{13}\tilde{\varepsilon}_z, \\ \tilde{\sigma}_z = d_{13}\tilde{\varepsilon}_x + d_{13}\tilde{\varepsilon}_y + d_{33}\tilde{\varepsilon}_z, \\ \tilde{\tau}_{xy} = \frac{1}{2}(d_{11} - d_{12})\tilde{\gamma}_{xy}, \tilde{\tau}_{yz} = d_{66}\tilde{\gamma}_{yz}, \tilde{\tau}_{zx} = d_{66}\tilde{\gamma}_{zx}. \end{cases} \quad (4)$$

横观各向同性层状地基材料的弹性矩阵有5个控制参数, 分别是指水平向和竖直向杨氏模量 E_H 和 E_V 、竖直面剪切模量 G_{VH} 以及水平面和竖直面的泊松比 ν_{HH} 和 ν_{VH} , 5个参数与弹性参数存在满足关系:

$$\begin{cases} d_{11} = (E_H/a)(1 - n\nu_{VH}^2), \quad d_{12} = (E_H/a)(n\nu_{VH}^2 + \nu_{HH}), \\ d_{13} = (E_H/a)\nu_{VH}(1 + \nu_{HH}), \quad d_{33} = (E_H/a)(1 - \nu_{HH}^2) \\ d_{66} = G_{VH} \end{cases} \quad (5)$$

式中 $n = E_H/E_V$; $a = (1 + \nu_{HH})(1 - \nu_{HH} - 2n\nu_{VH}^2)$; G_{VH} 可由试验测得或由下式给出^[5]:

$$G_{VH} = \frac{d_{11}d_{33} - d_{13}^2}{d_{11} + 2d_{13} + d_{33}} \quad (6)$$

本文主要讨论频率域内层状地基动力响应问题, 消掉位移和应力变量里的时间因子 $e^{i\omega t}$, 此时层状地基频率-空间域内的控制方程(3)可以对应写为

$$\begin{cases} d_{66} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + (d_{13} + d_{66}) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial z} + d_{11} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \rho \omega^2 \tilde{u} = 0, \\ d_{55} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} + d_{44} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \rho \omega^2 \tilde{v} = 0, \\ d_{66} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + (d_{66} + d_{13}) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z \partial x} + d_{33} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} + \rho \omega^2 \tilde{w} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

由方程不难看出, 波动方程解耦为平面内的P-SV波和出平面的SH波, 对于广义平面应变问题只需考虑平面内的P-SV波问题即可。利用Fourier变换(式(1))可以得到频率-波数域内的波动方程为

$$\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}'' + (\mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_{12})\mathbf{u}' - (\mathbf{K}_{11} - \rho\omega^2\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (8)$$

式中 \mathbf{u}'' 和 \mathbf{u}' 分别表示位移向量对坐标 x 的二阶和一阶偏导数, 且

$$\begin{cases} \mathbf{u} = [u, w]^T, \quad \mathbf{K}_{11} = \kappa^2 \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{66} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{21} = -\mathbf{K}_{12}^T = i\kappa \begin{bmatrix} 0 & d_{66} \\ d_{13} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} d_{66} & 0 \\ 0 & d_{33} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (9)$$

引入位移变量 \mathbf{u} 的对偶变量:

$$\mathbf{p} = -\{\tau_{xz} \quad \sigma_z\}^T, \quad (10)$$

根据应力-位移的关系, 可知 \mathbf{p} 满足 $\mathbf{p} = -(\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}' + \mathbf{K}_{21}\mathbf{u})$ 。利用对偶变量 \mathbf{u} 和 \mathbf{p} 可以将基本方程(8)转换为状态方程的形式:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{HV}, \quad (11)$$

式中, $\mathbf{V} = [\mathbf{u} \quad \mathbf{p}]^T$, 并且

$$\left. \begin{cases} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A} = -\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21}, \\ \mathbf{B} = -\mathbf{K}_{22}^{-1}, \\ \mathbf{C} = -\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21} + \rho\omega^2\mathbf{I}, \\ \mathbf{D} = \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}. \end{cases} \right\} \quad (12)$$

可以注意到, 对偶向量的引入使二阶线性常微分方程(8)转化为一阶线性常微分方程(11)。方程(11)的解是指数函数, 矩阵 \mathbf{H} 只与层状地基属性、频率和波数有关, 对于地基厚度较大或者波数较大的情况, 直接求解均容易造成指数溢出。Gao等^[18]采用精细积分算法求解此类方程取得了较好的效果, 在保证数值计算稳定的同时, 得到了较高的精度。基于精细积分算法对一阶线性常微分方程(11)的解(具体求解过程可参见文献[18]), 对于线性保守体系, 任意层状地基上下表面的位移和应力向量存在以下关系(如图2所示):

$$\begin{cases} \mathbf{u}_b = \mathbf{M}_1\mathbf{u}_a - \mathbf{M}_2\mathbf{p}_b, \\ \mathbf{p}_a = \mathbf{M}_3\mathbf{u}_a + \mathbf{M}_4\mathbf{p}_b. \end{cases} \quad (13)$$

式中 \mathbf{u}_a 和 \mathbf{p}_a 分别为层状地基上表面的位移和应力向量; \mathbf{u}_b 和 \mathbf{p}_b 分别为层状地基下表面的位移和应力向量; 系数矩阵 \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 , \mathbf{M}_3 和 \mathbf{M}_4 是矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 的函数。

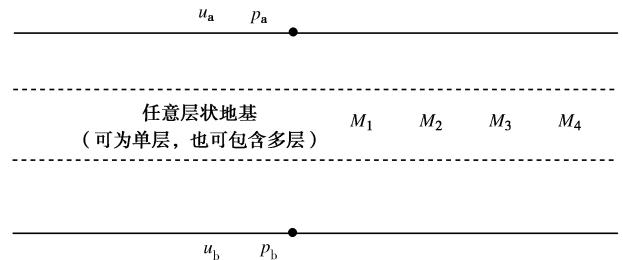


图2 任意层状地基上下表面位移应力向量

Fig. 2 Displacement and stress vectors at upper and lower surface of arbitrary layered soil

对于多层地基, 相邻层的交界面处需满足位移和应力的连续条件, 即

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k^+ = \mathbf{u}_k^-, \\ \mathbf{p}_k^+ = \mathbf{p}_k^- \quad (k = 1, 2, \dots, l-1, l). \end{cases} \quad (14)$$

对于层状地基底部(第 $l+1$ 层)为刚性基岩的情况, 需要满足 l 层底部位移为0的边界条件:

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{0}. \quad (15)$$

而对于多层地基下卧半无限地基的情况, 无限远处的辐射边界条件需要考虑。为了确定在此情况下的边界条件, 需要进行下述处理。首先求解均质半无限地基特征矩阵 \mathbf{H} 的特征值问题

$$\mathbf{H}\Psi = \Psi A , \quad (16)$$

式中, A 为特征值矩阵; Ψ 为特征向量矩阵, 二者写成分块矩阵的形式为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \lambda_i & \\ & -\lambda_i \end{bmatrix}, \\ \Psi &= \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中, λ_i 的实部均为正值。

引入变量 $\mathbf{b} = \Psi^{-1}V$, 方程 (11) 可以写成如下形式

$$\dot{\mathbf{b}} = A\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_i z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{-\lambda_i z} \end{bmatrix} . \quad (18)$$

其中, \mathbf{c}_1 和 \mathbf{c}_2 为积分常数。

从而可得

$$V = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 e^{\lambda_i z} \\ \mathbf{c}_2 e^{-\lambda_i z} \end{bmatrix} , \quad (19)$$

对于均质半无限地基, 位移向量 \mathbf{u} 和应力向量 \mathbf{p} 必须保证为有限值, 因此需要有 $\mathbf{c}_1 = 0$ 。应用方程 (19) 可以得到半无限地基表面的边界条件为

$$\mathbf{p}_l = \mathbf{K}_{\infty} \mathbf{u}_l , \quad (20)$$

式中, $\mathbf{K}_{\infty} = \Psi_{22} \Psi_{12}^{-1}$ 。

2 频率-波数域内动力刚度矩阵

对于层状地基上下表面位移和应力的关系可以通过上一节提出的精细积分算法进行求解, 而对于层状地基体系内任意点的位移和应力关系, 需要同时考虑层状地基和底部半无限空间的共同作用。现将层状地基体系由激励点和接收点所在的平面分为 3 部分 (如图 3 所示)。利用精细积分算法可以求解出任意保守体系内层状地基上下表面位移和应力的关系式, 即式 (13), 现将其进行转化写成如下形式:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_a \\ -\mathbf{p}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} , \quad (21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{aa} &= \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_4 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 , \\ \mathbf{K}_{ab} &= -\mathbf{M}_4 \mathbf{M}_2^{-1} , \\ \mathbf{K}_{ba} &= -\mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{M}_1 , \\ \mathbf{K}_{bb} &= \mathbf{M}_2^{-1} . \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将图 3 中的三部分分别利用式 (21) 可得各部分上下表面应力和位移之间的关系为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^1 \\ -\mathbf{p}_1^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^1 \\ \mathbf{u}_2^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{部分 1}) , \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_2^2 \\ -\mathbf{p}_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^2 & \mathbf{K}_{12}^2 \\ \mathbf{K}_{21}^2 & \mathbf{K}_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2^2 \\ \mathbf{u}_3^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{部分 2}) , \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{p}_3^3 \\ -\mathbf{p}_4^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^3 & \mathbf{K}_{12}^3 \\ \mathbf{K}_{21}^3 & \mathbf{K}_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_3^3 \\ \mathbf{u}_4^3 \end{Bmatrix} \quad (\text{部分 3}) , \quad (25)$$

式中, 上标分别表示对应部分 1、部分 2 和部分 3, 下标 1, 2, 3, 4 分别表示地基表面、激励点平面、接收点平面和半无限地基表面的位移和应力向量。

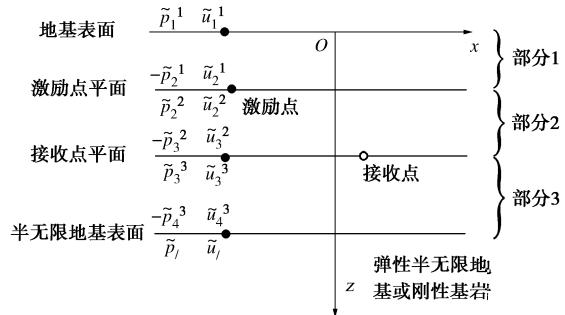


图 3 层状地基内部激励点与接收点体系

Fig. 3 The source and receiver system in multi-layered soil

对于整个层状地基体系, 平衡方程可以表示为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & & \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{11}^2 & \mathbf{K}_{12}^2 & \\ & \mathbf{K}_{21}^2 & \mathbf{K}_{22}^2 + \mathbf{K}_{11}^3 & \mathbf{K}_{12}^3 \\ & & \mathbf{K}_{21}^3 & \mathbf{K}_{22}^3 + \mathbf{K}_{\infty} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{Bmatrix} , \quad (26)$$

或简写为

$$\mathbf{P} = \mathbf{KU} , \quad (27)$$

其中, $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4]^T$ 可看作为外荷载向量, $\mathbf{P}_i (i=1, 2, 3, 4)$ 表示 i 平面的外荷载向量, 且 $\mathbf{P}_1 = \mathbf{p}_1$, $\mathbf{P}_2 = -\mathbf{p}_1^1 + \mathbf{p}_2^2$, $\mathbf{P}_3 = -\mathbf{p}_3^2 + \mathbf{p}_3^3$, $\mathbf{P}_4 = -\mathbf{p}_4^3 + \mathbf{p}_l$; $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4]^T$ 是位移向量, $\mathbf{U}_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是 i 平面的位移向量, 且 $\mathbf{U}_1 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{U}_2 = \mathbf{u}_2^1 = \mathbf{u}_2^2$, $\mathbf{U}_3 = \mathbf{u}_3^1 = \mathbf{u}_3^2$ 以及 $\mathbf{U}_4 = \mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_l$; \mathbf{K} 是层状地基体系频率-波数域内的动力刚度矩阵; \mathbf{K}_{∞} 是式 (20) 中的动力刚度矩阵; 对于层状地基底部为刚性基岩的情况, 需满足底部位移为零的边界条件。值得注意的是此处的动力刚度矩阵是针对 4 个层面点位移和应力的关系, 不需要考虑点水平方向的相对位置。

3 层状地基内部任意点位移响应求解

假设在激励点所在水平面 Δb 范围内施加均布单位水平向和竖直向简谐荷载作用 (如图 4 所示), 求解在接收点处的位移响应, 此处建立以激励点均布荷载中心为坐标原点的坐标系。首先将式 (27) 中的动力刚度矩阵 \mathbf{K} 求逆, 得到频率-波数域内层状地基内动力柔度矩阵方程为

$$\mathbf{U}(\kappa, z, \omega) = \mathbf{F}(\kappa, z, \omega) \mathbf{P}(\kappa, z, \omega) , \quad (28)$$

式中, $\mathbf{F}(\kappa, z, \omega) = \mathbf{K}^{-1}(\kappa, z, \omega)$ 表示频率-波数域内层

状地基内动力柔度矩阵。

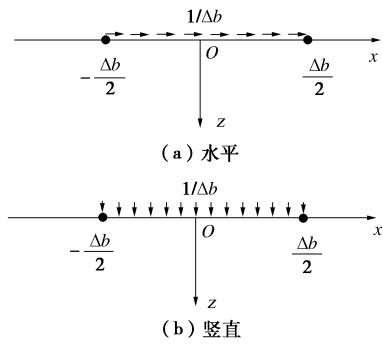


图 4 单位区间作用均布荷载

Fig. 4 Uniform forces between adjacent nodal points

柔度矩阵的每个元素 F_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) 表示在 j 平面上施加单位均布荷载作用下在 i 平面上的位移响应。为方便后续说明, 以激励点层面 2 施加均布荷载, 在接收点层面 3 位移响应为例进行说明, 将对应的的动力柔度矩阵展开写成如下形式:

$$\begin{cases} u(\kappa, z, \omega) \\ w(\kappa, z, \omega) \end{cases} = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xz} \\ F_{zx} & F_{zz} \end{bmatrix} \begin{cases} p_x(\kappa, z, \omega) \\ p_z(\kappa, z, \omega) \end{cases} \quad (29)$$

式中 $u(\kappa, z, \omega)$ 和 $w(\kappa, z, \omega)$ 分别为接收点层面频率 - 波数域内的水平向和竖直向位移; $p_x(\kappa, z, \omega)$ 和 $p_z(\kappa, z, \omega)$ 分别为激励点层面频率 - 波数域内的水平向剪切应力和竖直向正应力。

利用式(1)的下式, 对式(29)进行 Fourier 逆变换后得频率 - 空间域内的位移表达式为

$$\begin{cases} \tilde{u}(x, z, \omega) \\ \tilde{w}(x, z, \omega) \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xz} \\ F_{zx} & F_{zz} \end{bmatrix} \begin{cases} p_x(\kappa, z, \omega) \\ p_z(\kappa, z, \omega) \end{cases} e^{i\kappa x} d\kappa \quad (30)$$

在区间 $x \in (-\Delta b/2, \Delta b/2)$ 内有合力幅度等于 1 的水平 x 向均布简谐荷载作用时, \tilde{p}_x 为频率 - 空间域内的应力强度幅值, 易知 $\tilde{p}_x = 1/\Delta b$, 如图 4 (a) 所示。利用 Fourier 变换可得频率 - 波数域内的均布荷载幅值 $p_x(\kappa, z, \omega)$ 为

$$\begin{aligned} p_x(\kappa, z, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_x(x, z, \omega) e^{-i\kappa x} dx \\ &= \int_{-\Delta b/2}^{\Delta b/2} \frac{1}{\Delta b} e^{-i\kappa x} dx = \frac{2}{\Delta b \kappa} \sin \frac{\Delta b \kappa}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

令 $\Delta b \rightarrow 0$, 则有 $\sin(\Delta b \kappa / 2) = \Delta b \kappa / 2$, 水平向集中荷载幅值为 $p_x(\kappa, z, \omega) = 1$ 。设 \tilde{u}_j^x ($i, j = x$ 或 z) 表示在向施加单位幅值力时在位置处向产生的位移幅值。对于水平向均布荷载, 则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xx}^x(x, z, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_{xx} \left(\frac{2}{\Delta b \kappa} \sin \frac{\Delta b \kappa}{2} \right) \cos(\kappa x) d\kappa, \\ \tilde{u}_{zx}^x(x, z, \omega) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} F_{zx} \left(\frac{2}{\Delta b \kappa} \sin \frac{\Delta b \kappa}{2} \right) \sin(\kappa x) d\kappa. \end{cases} \quad (32)$$

对于水平向集中荷载, 则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xx}^x(x, z, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_{xx} \cos(\kappa x) d\kappa, \\ \tilde{u}_{zx}^x(x, z, \omega) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} F_{zx} \sin(\kappa x) d\kappa. \end{cases} \quad (33)$$

在区间 $x \in (-\Delta b/2, \Delta b/2)$ 内有合力幅度等于 1 的 z 向均布简谐荷载作用时, \tilde{p}_z 为应力强度幅值, 易知 $\tilde{p}_z = 1/\Delta b$, 如图 4 (b) 所示。此时有

$$\begin{aligned} p_z(\kappa, z, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_z(x, z, \omega) e^{-i\kappa x} dx \\ &= \int_{-\Delta b/2}^{\Delta b/2} \frac{1}{\Delta b} e^{-i\kappa x} dx = \frac{2}{\Delta b \kappa} \sin \frac{\Delta b \kappa}{2}. \end{aligned} \quad (34)$$

令 $\Delta b \rightarrow 0$, 则有 $\sin(\Delta b \kappa / 2) = \Delta b \kappa / 2$, 竖直向集中荷载幅值为 $p_z(x, z, \omega) = 1$ 。

对于竖直向均布荷载, 则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xz}^x(x, z, \omega) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} F_{xz} \left(\frac{2}{\Delta b \kappa} \sin \frac{\Delta b \kappa}{2} \right) \sin(\kappa x) d\kappa, \\ \tilde{u}_{zz}^x(x, z, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_{zz} \left(\frac{2}{\Delta b \kappa} \sin \frac{\Delta b \kappa}{2} \right) \cos(\kappa x) d\kappa. \end{cases} \quad (35)$$

对于竖直向集中荷载, 则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xz}^x(x, z, \omega) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} F_{12} \sin(\kappa x) d\kappa, \\ \tilde{u}_{zz}^x(x, z, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_{22} \cos(\kappa x) d\kappa. \end{cases} \quad (36)$$

根据经验, 式(32)、(33)、(35)和(36)中的积分采用五点高斯积分进行求解已足够满足精度要求, 由于被积函数具有良好的收敛性, 对积分的贡献主要集中在低波数段, 对于高波数段贡献可以忽略, 所以本文选用有限积分代替无限积分进行处理。

4 容积法

对于埋置基础, 本文将结合容积法进行求解。容积法的基本理念是将基础与层状地基体系划分为基础部分和开挖地基部分, 而开挖地基部分的动力刚度矩阵又可以看成是回填地基动力刚度矩阵减去回填土动力刚度矩阵, 如图 5 所示, 详情可参考文献[19], 本文给出简要的求解思路:

(1) 去掉埋置基础, 同时回填与层状地基水平对应相同材料属性的回填土, 并对刚性条带基础区域进行离散。竖直向离散为若干层, 每一层离散为相等间距的节点群, 求解离散节点群的格林函数组成功度矩阵为

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{11} & \tilde{\mathbf{F}}_{12} & \cdots & \tilde{\mathbf{F}}_{1N} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{21} & \tilde{\mathbf{F}}_{22} & \cdots & \tilde{\mathbf{F}}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_{N1} & \tilde{\mathbf{F}}_{N2} & \cdots & \tilde{\mathbf{F}}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_1 \\ \tilde{\mathbf{p}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{p}}_N \end{bmatrix} \text{ 或 } \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{P}}. \quad (37)$$

此处将节点群处施加的荷载作为节点荷载, 对 $\tilde{\mathbf{F}}$ 进行求逆, 可得节点群的动刚度矩阵为 $\mathbf{K}(\omega) = \tilde{\mathbf{F}}^{-1}$ 。

(2) 分别求解实际基础和与基础同体积回填土的刚度矩阵 \mathbf{K}_B , \mathbf{K}_B^G 和质量矩阵 \mathbf{M}_B , \mathbf{M}_B^G 。则基础周围地基动力刚度矩阵为

$$\mathbf{S}_B(\omega) = \mathbf{K}_B - \mathbf{K}_B^G + \mathbf{K}(\omega) - \omega^2 (\mathbf{M}_B - \mathbf{M}_B^G) \quad (38)$$

对于刚性基础, 因为不考虑其自身变形, 所以只需将式(38)中的 \mathbf{K}_B 和 \mathbf{K}_B^G 去掉即可。若考虑无质量基础, 只需将公式(38)中的 \mathbf{M}_B 去掉即可。

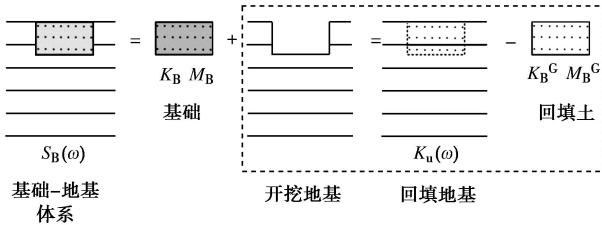


图 5 容积法的叠加原理

Fig. 5 Superposition principle of flexible volume method

5 数值算例

5.1 刚性条带基础埋置于横观各向同性地基之内

宽度为 $2b$ 的刚性条带基础埋置于半无限地基之内, 埋置深度为 $b/3$ 。地基材料参数见表 1 (分别标记为材料 1 和材料 2)。对于地基材料属性有阻尼的情况, 采用复拉梅常数代替实拉梅常数进行计算, 将其定义为

$$\left. \begin{aligned} G^* &= G(1+2i\zeta_s), \\ \lambda^* + 2G^* &= (\lambda + 2G)(1+2i\zeta_p). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$; λ 和 G 为实拉梅常数; ζ_s 和 ζ_p 分别为 S 波和 P 波的阻尼比。

相应的复 S 波和 P 波的波速定义为

$$\left. \begin{aligned} c_s^* &= c_s(1+2i\zeta_s), \\ c_p^* &= c_p(1+2i\zeta_p). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

式中, $c_s = \sqrt{G/\rho}$, $c_p = \sqrt{(\lambda+2G)/\rho}$ 分别为实 S 波和 P 波的波速。

表 1 横观各向同性半无限地基材料属性

Table 1 Material properties of transversely anisotropic half-space soil

材料	E_H	E_V	v_{HH}	v_{VH}	G_{VH}	$\zeta_s = \zeta_p$
1	$1.966G$	$2.406G$	0.170	0.185	$1.0G$	0.05
2	$3.864G$	$2.863G$	0.301	0.185	$1.0G$	0.05

计算得到的条带基础动力刚度矩阵系数按照

$$S_B(a_0) = \pi G \begin{bmatrix} K_{HH} & 0 & K_{HR} \\ 0 & K_{VV} & 0 \\ K_{RH} & 0 & K_{RR} \end{bmatrix} \quad (41)$$

写成无量纲的形式, K_H , K_V 和 K_R 分别为水平、竖直和摇摆动力刚度系数, $a_0 = \omega b / c_s$ 为无量纲频率, $c_s = \sqrt{G_{VH}/\rho}$, 计算结果见图 6。此处将 Wang 等^[12]

的计算结果与本文结果相对比, 由图 6 可见两者结果基本完全拟合, 由此可见本文计算结果的精确性。文献中只能针对半无限地基进行计算, 本文计算方法可以针对任意层状地基进行计算。

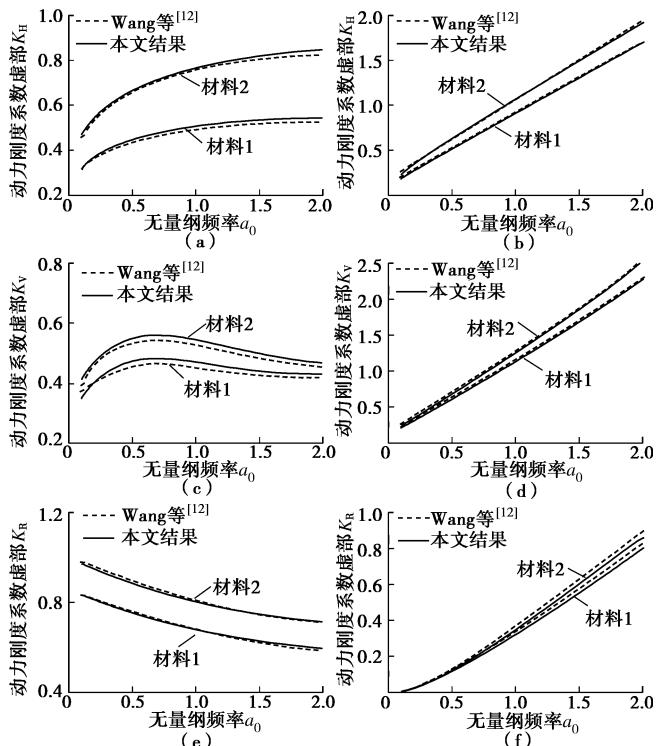
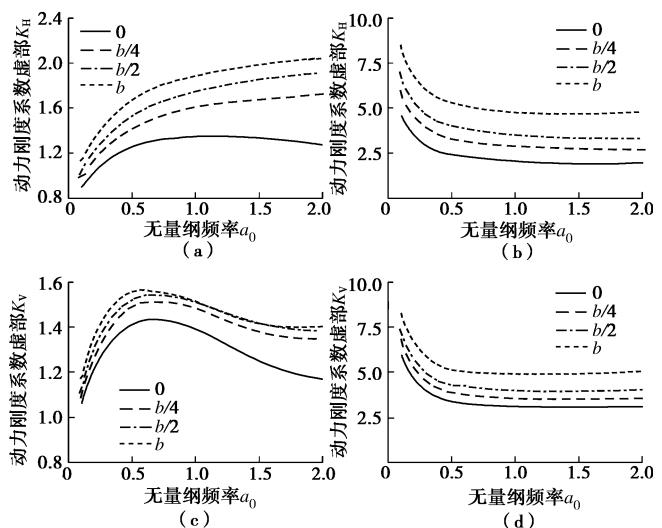


图 6 横观各向同性半无限地基上刚性埋置条带基础动力刚度矩阵系数

Fig. 6 Dynamic stiffness of rigid strip foundation embedded in homogeneous transversely anisotropic half-space soil

为研究条带基础的埋置深度对基础动力刚度矩阵的影响, 选取材料 1 作为均质半无限地基材料, 求解埋置深度在 0 , $b/4$, $b/2$ 和 b 四种情况下的动力刚度矩阵, 计算结果见图 7 所示。由图可见, 基础的埋置对于基础动力刚度矩阵的影响很显著, 埋置深度越大, 动力刚度矩阵系数越大。



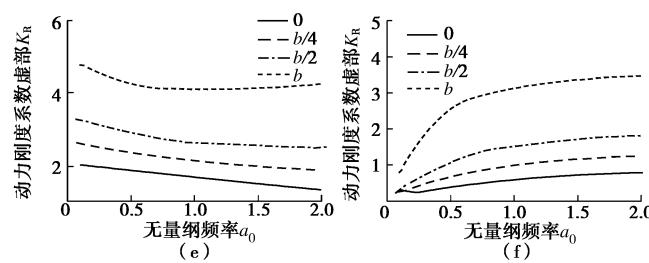


图 7 埋置深度对刚性条带基础动力刚度系数的影响

Fig. 7 Influence of embedded depth on dynamic stiffness coefficients of rigid strip foundation

5.2 刚性条带基础埋置于多层横观各向同性地基之内

宽度为 $2b$ 的刚性条带基础埋置于横观各向同性多层地基之内, 埋置深度为 $0.9b$ (如图 8 所示), 层状地基各层具体材料参数见表 2, 各层的材料密度均取为 1.33ρ , 阻尼比均取为 0.05, G_{VH} 由式 (6) 得到。利用本文算法计算得到的条带基础动力刚度矩阵系数按照公式 (41) 写成无量纲的形式, 其中。 S_{HH} , S_{VV} , S_{MM} 和 S_{HM} 分别为水平、竖直、摇摆和水平与摇摆耦合动力刚度系数, 计算结果见图 9。文献中没有此算例的相关结果进行对比, 所以图 9 中只给出了本文的计算结果, 为相关研究提供数值依据。

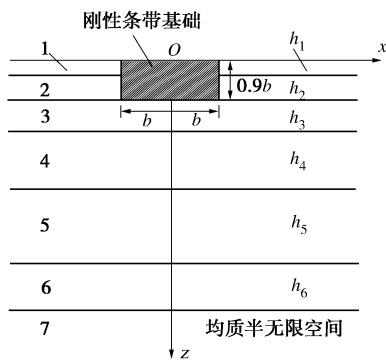


图 8 刚性条带基础埋置于多层横观各向同性地基之内

Fig. 8 Rigid strip foundation embedded in layered transversely isotropic half-space soil

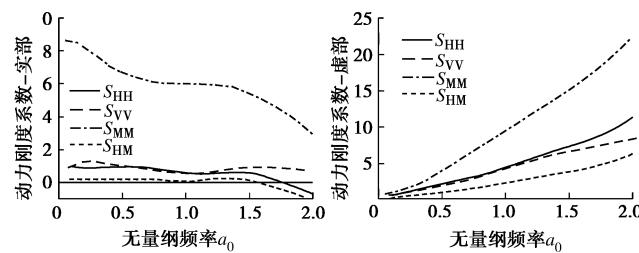


图 9 多层横观各向同性地基上刚性埋置条带基础动力刚度矩阵系数

Fig. 9 Dynamic stiffness of rigid strip foundation embedded in homogeneous transversely anisotropic half-space soil

表 2 横观各向同性层状半无限地基材料属性

Table 2 Material properties of transversely anisotropic layered half-space soil

层号	E_H	E_V	$\nu_{HH}=\nu_{VH}$	h
1	$2.5G$	$1.25G$	0.25	$0.3b$
2	$3.0G$	$2.0G$	0.3	$0.6b$
3	$4.2G$	$3.5G$	0.301	$0.7b$
4	$5.3G$	$5.3G$	1/3	$1.7b$
5	$6.8G$	$8.5G$	0.4	$13.5b$
6	$9.0G$	$10.0G$	0.2	$2.65b$
7	$10.5G$	$21.0G$	0.25	半无限

6 结语

复杂层状地基的动力刚度对于工程抗震设计和安全评价具有重要意义, 但迄今还缺乏有效的算法。本文针对二维横观各向同性层状地基提出了一种求解埋置条带刚性基础动力刚度矩阵的精确算法, 该算法利用傅里叶积分变换结合对偶方程和精细积分法的应用求解层状地基内部点的动力位移响应, 进而利用容积算法求解开挖条带基础动力刚度矩阵。此算法对任意水平层状地基具有广泛适用性, 对地基的厚度、弹性地基材料属性没有任何限制; 计算过程中基于矩阵数值计算, 且矩阵维数较小, 不仅数值求解稳定, 而且有较高的求解效率。数值算例验证了本文算法的精确性, 同时也说明了本文提出的算法在求解横观各向同性层状地基动力响应问题上具有的广泛适用性。

参考文献:

- [1] LUO J E. Linear soil-structure interaction: a review[J]. Earthquake Ground Motion and Its Effects on Structures, ASME, 1982, **53**: 41 - 57.
- [2] GAZETAS G. Analysis of machine foundation vibrations: state of the art[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1983, **2**(1): 2 - 42.
- [3] TSYNKOVS V. Numerical solution of problem on unbounded domain: a review[J]. Applied Numerical Mathematics, 1998, **27**: 465 - 532.
- [4] KAUSEL E. Early history of soil-structure interaction[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010, **30**: 822 - 832.
- [5] GAZETAS G. Strip foundations on a cross-anisotropic soil layer subjected to dynamic loading[J]. Géotechnique, 1981, **31**(2): 161 - 179.
- [6] 廖振鹏, 杨柏坡, 袁一凡. 暂态弹性波分析中人工边界的
研究[J]. 地震工程与工程振动, 1982, **2**(1): 1 - 11. (LIAO
Zhen-peng, YANG Bai-po, YUAN Yi-fan. Artificial boundary
in analysis of transient elastic wave propagation[J].
Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1982,

- 2(1): 1 - 11. (in Chinese))
- [7] ISRAIL ASM, AHMAD S. Dynamic vertical compliance of strip foundations in layered soils[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1989, **18**: 933 - 950.
- [8] 金 峰, 张楚汉, 王光纶. 结构地基相互作用的 FE-BE-IBE 耦合模型[J]. 清华大学学报, 1993, **33**(2): 17 - 24. (JIN Feng, ZHANG Chu-han, WANG Quang-lun. A coupling FE-BE-IBE model for structure-foundation interaction[J]. *Journal of Tsinghua University*, 1993, **33**(2): 17 - 24. (in Chinese))
- [9] 林 崩, 韩泽军, 李伟东, 等. 多层地基条带基础动力刚度矩阵的精细积分算法[J]. 力学学报, 2012(3): 557 - 567. (LIN Gao, HAN Ze-jun, LI Wei-dong, et al. A precise integration approach for the dynamic-stiffness matrix of strip footings on a layered medium[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012(3): 557 - 567. (in Chinese))
- [10] LIN G, HAN Z J, ZHONG H, et al. A precise integration approach for dynamic impedance of rigid strip footing on arbitrary anisotropic layered half-space[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2013, **49**: 96 - 108.
- [11] 艾智勇, 张逸帆. 层状横观各向同性地基与刚性条形基础共同作用分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(4): 752 - 756. (AI Zhi-yong, ZHANG Yi-fan. Interactive analysis of a rigid strip footing on transversely isotropic layered soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, **36**(4): 752 - 756. (in Chinese))
- [12] WANG Y, RAJAPAKSE R K N D. Dynamic of rigid strip foundations embedded in orthotropic elastic soils[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1991, **20**: 927 - 947.
- [13] KAUSEL E, ROESSET J M, WAAS G. Dynamic analysis of footings on layered media[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1975, **101**: 679 - 693.
- [14] PARK J, KAUSEL E. Numerical dispersion in the thin-layer method[J]. *Computers & Structures* 2004, **82**: 607 - 625.
- [15] SPYRAKOS C C, BESKOS D E. Dynamic response of flexible strip-foundations by boundary and finite elements[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1986, **5**(2): 84 - 96.
- [16] SPYRAKOS C C, CHAOJIN X. Dynamic analysis of flexible massive strip-foundations embedded in layered soils by hybrid BEM-FEM[J]. *Computers and Structures*, 2004, **82**: 2541 - 2550.
- [17] 韩泽军, 林 崩, 钟 红. 改进的比例边界有限元法求解层状地基动力刚度矩阵[J]. 水电能源科学, 2012(7): 100 - 104. (HAN Ze-jun, LIN Gao, ZHONG Hong. Modified scaled boundary finite element method solution for dynamic stiffness matrix of laminar foundation[J]. *Water Resources and Power*, 2012(7): 100 - 104. (in Chinese))
- [18] GAO Q, ZHONG W X, HOWSON W P. A precise method for solving wave propagation problems in layered anisotropic media[J]. *Wave Motion*; 2004, **40**: 191 - 207.
- [19] TABATABAIE-RAISSI M. The flexible volume method for dynamic soil structure interaction analysis[D]. Berkeley: University of California, 1982.