

DOI: 10.11779/CJGE201606011

水工结构接触问题的多体有限元法

苏 超, 赵业彬*

(河海大学水利水电学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 针对水工结构中的局部接触问题, 提出了一种新的数值分析方法—多体有限元法。基于 DDA 方法的分析思路, 以结构面切割而成的块体作为分析单元, 每一块体均可允许自身有独立的位移和变形, 通过块体间的接触和几何关系形成一个完整的块体系统。块体内部采用有限元法求解, 块体之间通过接触力相互联系, 且在接触界面上引入变形协调条件, 保证了多个块体互相接触作用时块体位移和应力状态的连续性, 从而使得计算更加符合实际情况。该方法接触求解过程中无需指定法向刚度及切向刚度等参数, 避免了 DDA 方法因引入刚性弹簧而出现的嵌入问题, 同时提高了块体内部变形的求解精度。推导了多体有限元法求解接触问题的支配方程, 并给出了其增量形式的定解条件和判定条件。最后通过 3 个数值算例验证了本文方法的正确性和有效性。

关键词: 多体有限元法; 水工结构; 接触问题; 接触判断

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2016)06-1051-06

作者简介: 苏 超 (1960-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事复杂水工结构的计算方法及其应用研究。E-mail: csu@hhu.edu.cn。

Multi-body finite element method for contact problems in hydraulic structure

SU Chao, ZHAO Ye-bin

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Multi-body finite element method (MFEM) is proposed for analysis of local contact problems in hydraulic structure. Based on the block theory of discontinuous deformation analysis (DDA) method, each block can move and deform independently, and blocks contact with each other on their boundary. Each single block is analyzed using the finite element method (FEM) in the corresponding local coordinate system, and all contacting blocks need to satisfy the displacement compatibility requirements between two blocks. In this way, MFEM assures the continuity of the displacement and stress state between blocks. The calculated results of this method are in fairly good agreement with the actual situations. Normal and tangential stiffnesses are not required in algorithm, and thus the overlap problem is successfully avoided. Moreover, the accuracy of the block internal deformation is effectively improved. The theoretical basis and finite element coordinate equations for the proposed method are obtained. Finally, the validity and accuracy of the proposed procedure are demonstrated through three numerical examples.

Key words: multi-body finite element method; hydraulic structure; contact problem; contact judgment

0 引言

非连续变形问题广泛存在于水利水电工程中, 如地下工程中含有结构面的岩体结构, 其变形、应力及稳定问题; 大坝的结构分缝在施工和运行过程中的开裂问题; 岩质高边坡因地质构造所形成的有限块体在外部荷载的扰动下的稳定问题等。目前实际工程中多将非连续变形问题归结为接触问题进行分析求解^[1]。对于接触问题的计算, 传统的数值分析方法如有限元法 (FEM)、边界元法 (BEM) 等均以连续介质模型为主, 不能定性、定量地真实反映不连续面的力学和运动特征; 基于非连续介质的分析方法如离散元法

(DEM)、非连续变形分析 (DDA) 方法等虽然具有强大的处理非连续介质和大变形的能力, 但均存在一定的局限性: DEM^[2-3]需要较细的单元离散才能达到较高的计算精度, 且结构较为复杂时存在计算时间过长或不收敛等问题; DDA 方法^[4]在解决非连续变形问题上得到了一定的推广和应用, 但该方法也存在一些不足之处, 如 DDA 方法中接触块体之间不满足变形

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51279053); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (2014B36514)

收稿日期: 2015-05-26

*通讯作者

协调方程, 块体之间的接触判断采用罚函数来处理(施加或去除刚性弹簧), 但罚函数方法只能近似满足接触限值, 且求解精度高度依赖于罚值的选取, 这将导致块体间相互嵌入和计算收敛问题。此外, DDA 方法中块体的位移和变形是通过全一阶近似线性函数来描述的^[5], 因此只能得到块体内部的常应力场, 无法得到块体内精确的应力状态, 使得 DDA 方法的适用性大大减弱。

水工结构中的接触问题多为有限块体的局部接触问题, 具有接触面相对于整个结构占比较小, 且接触面位置相对明确的特点。本文针对水工结构中的接触问题, 提出了一种分析水工结构中接触问题的新方法—多体有限元法。该方法基于 DDA 方法的分析思路, 以结构面切割而成的块体作为分析单元, 将有限元基本方程相互独立地建立在各块体上, 采用有限元法来计算块体内部的位移场和应力场, 提高了块体内部变形的求解精度; 通过采用向接触界面凝聚的方法, 将复杂的摩擦接触非线性问题凝缩在可能的局部接触面上进行, 块体之间利用块体接触界面的变形协调条件和块体的整体平衡方程, 建立以接触界面节点接触力为未知量的支配方程。接触求解过程中同时进行接触状态和接触内力迭代计算, 无需指定法向刚度及切向刚度等参数, 使得计算更加符合实际情况, 从而避免了 DDA 方法在处理接触问题上因引入刚性弹簧而出现的嵌入问题, 保证了迭代收敛性及正确性。

1 接触问题的支配方程

本文所考虑的问题为水工结构中的拟静态接触问题。基于 DDA 方法中的分析思路, 以结构面切割而成的块体作为分析单元, 每一块体均可允许自身有独立的位移和变形, 通过块体间的接触和几何关系形成一个完整的块体系统。本文在进行接触分析时假定每一接触块体均为理想的弹性体, 且符合小变形假定。同时考虑到弹性接触问题的局部非线性主要是由接触界面上少量的接触点引起的^[6], 故接触界面采用节点参量表示, 且将接触点对视为接触状态判定和接触内力传递的基本单元。此外, 假定在没有外力作用时接触面是连续的, 即初始接触面之间不存在间隙。

经典弹性接触问题的有限元方程为

$$KU = R + F \quad (1)$$

式中, K 为整体刚度矩阵, U 为节点位移列阵, R 为接触边界上的接触力向量, F 为整体外荷载向量。多体有限元法将有限元基本方程相互独立地建立在各接触块体上, 以接触内力为迭代变量。接触块体之间通过接触内力相互联系, 且满足变形协调条件, 使得整

个块体系统满足实际的平衡条件和位移条件。该方法以接触内力作为迭代变量, 因此接触状态的判定较为方便。由式(1)可得

$$U = CR + U_F \quad (2)$$

式中, $C = K^{-1}$ 为块体接触面上的柔度矩阵, $U_F = K^{-1}F$ 为整体外荷载引起的位移列阵。

对于如图 1 所示的两接触块体 Ω_1 和 Ω_2 , 假定 Ω_2 刚性固结。由式(2)可得

$$U_1 = C_1 R_1 + U_{F1} \quad (3)$$

$$U_2 = C_2 R_2 + U_{F2} \quad (4)$$

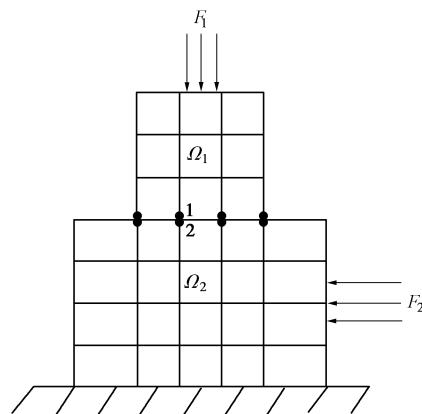


图 1 接触模型示意图

Fig. 1 Schematic of contact problem

因块体 Ω_1 本身没有足够的边界位移约束, 当其出现刚体位移时, 该块体的整体刚度矩阵是奇异的。因此, 须引入附加约束位移以消除刚度矩阵的奇异性。

式(3)经约束处理后可表示为

$$U_1 = C_1 R_1 + U_{F1} - C_e U_e \quad (5)$$

式中, U_e 为引入的约束位移, $C_e = -K^{-1}K_e$ 为整体坐标系下 Ω_1 的刚体位移矩阵。

令接触界面上任一接触点对的相对间距为

$$U^* = U_2 - U_1 \quad (6)$$

由牛顿第三定律可知 $R_2 = -R_1 = R$ 。式(4)减去式(5)可得

$$U^* = C_a R + \Delta_F + C_e U_e \quad (7)$$

式中, $C_a = C_2 + C_1$, $\Delta_F = U_{F2} - U_{F1}$ 。

因假设块体间初始间距为零, 即 $U^* = 0$ 。由式(7)可得

$$C_a R = -\Delta_F - C_e U_e \quad (8)$$

式(8)即为多体有限元法求解接触问题的连续性方程。

为求解附加约束位移 U_e , 引入块体 Ω_1 的整体平衡方程:

$$QR = F_e \quad (9)$$

式中, Q 为 Ω_1 的整体平衡矩阵, F_e 为 Ω_1 上外荷载合力向量。

综上, 多体有限元法求解接触问题的支配方程可表示为

$$\begin{bmatrix} C_a & C_e \\ Q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ U_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_F \\ F_e \end{bmatrix} \quad (10)$$

2 接触求解

2.1 接触条件

接触状态的判断是接触问题求解中的重要环节。如图1所示, 假定点1和2分别为两接触块体 Ω_1 和 Ω_2 可能接触边界上相邻的两个接触点, 并将接触点1和2定义为一个接触点对。接触过程中应满足的接触条件包括:

(1) 接触块体法向不可侵入, 即接触界面上各接触点对的位移满足相容性^[7]

$$g(u) = (u_1 - u_2) \cdot n + g_0 \geq 0 \quad (11)$$

(2) 若接触点对间没有发生相对滑动, 接触面的切向方向应满足位移协调条件^[8]

$$t \cdot (u_1 - u_2) = t \cdot (u_1^0 - u_2^0) \quad (12)$$

(3) 接触界面上的法向应力为压应力, 且法向拉应力首次超过其抗拉强度后, 法向应力只能为压应力, 有

$$r_n \leq \sigma_t \cdot A \quad (13)$$

(4) 切向接触的摩擦条件, 即当接触界面上某一点处的切向力超过该方向的最大抗力时, 接触块体将沿该方向产生滑动。本文采用广义的 Mohr-Coulomb 准则作为界面摩擦模型, 即

$$|r_t| \leq cA + |r_n|\mu \quad (14)$$

当 $|r_t| < cA + |r_n|\mu$ 时, 表示接触面上切向力没有超过该方向的最大抗力, 接触点对处于黏结状态; 当 $|r_t| = cA + |r_n|\mu$ 时, 表示接触面上的切向力已超过该方向的最大抗力, 接触点对处于滑移状态。

式(11)~(14)中, u_1 和 u_2 分别为块体 Ω_1 和 Ω_2 接触界面上点1和点2的位移, r_t 为切向接触力矢量, r_n 为法向接触力; g_0 为接触点对的初始法向间隙; 上标0表示本次迭代的初始量; σ_t 为接触面抗拉强度; A 为接触点对控制面积; c 为接触面黏聚力; μ 为摩擦系数。

2.2 接触求解

接触问题的迭代求解须引入接触条件来判定接触状态。对于有摩擦接触问题, 其求解与加载路径有关, 故采用增量法逐步求解。多体有限元法的连续性方程(8)其增量形式可写为

$$c\Delta r^i = -\Delta u_f^i - c_e u_e^i \quad (15)$$

接触问题的求解是一个迭代过程, 由于接触状态事先未知, 且所引入求解方程中的定解条件是假定的, 所以需要通过判定条件来验证假定的正确性。当接触

点对出现不连续状态时, 应将滑动和自由状态的定解条件作为补充方程引入。在采用多体有限元法求解时, 假设初始状态接触块体的接触点对处于黏结状态, 以接触力增量 Δr^i 为迭代未知量, 根据表1中的定解条件和判定条件进行判定接触点的接触状态, 当求得的接触状态与实际情况不符时, 通过对柔度矩阵 c 和右端项 $(-\Delta u_f^i - c_e u_e^i)$ 进行修改直到满足判定条件, 则求解结束。求出全部荷载对应的接触力后, 便可使用传统的有限单元法求出块体系统的位移场。

表1 接触状态的定解和判定条件

Table 1 Definite and decision conditions for contact states

接触状态	定解条件	判定条件
黏结	$u_N^i = 0, u_T^i = 0$	$\begin{cases} r_N^i > 0, r_T^i < cA + r_N^i\mu \\ -\sigma_t A < r_N^i \leq 0, r_T^i < cA \end{cases}$
自由	$r_N^i \leq -\sigma_t A, r_T^i = 0$	$u_N^i > 0$
滑移	$\begin{cases} u_N^i = 0 \\ r_T^i = cA + r_N^i\mu \quad (r_N^i > 0) \\ r_T^i = cA \quad (r_N^i \leq 0) \end{cases}$	$\begin{cases} r_N^i > -\sigma_t A \\ u_T^i - u_T^{i-1} > 0 \\ (u_T^i - u_T^{i-1}) \cdot r_T^i < 0 \end{cases}$

3 数值算例

根据上述的推导过程, 采用FORTRAN语言编制了多体有限元程序, 通过3个数值算例验证了本文算法的正确性和可靠性。

3.1 算例1

如图2所示轴向平行的两圆柱体的接触问题, 该算例为经典的赫兹接触问题, 曾被诸多学者引用用于验证方法的正确性。上部圆柱体受到铅直向下的荷载 p 和切线方向的荷载 q 的作用, 其加载历程如图3所示。

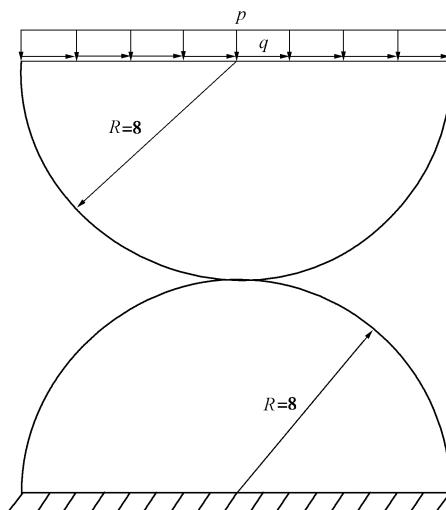


图2 算例1示意图

Fig. 2 Schematic of Example 1

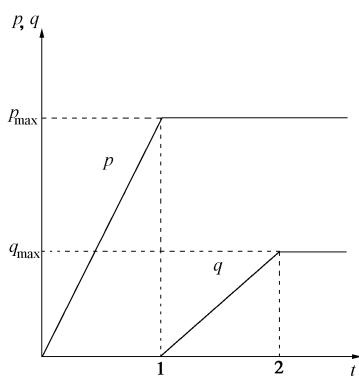


图 3 算例 1 荷载加载历程

Fig. 3 Loading histories of Example 1

取圆柱体半径 $R=8$ mm, 材料参数: 弹性模量 $E=200$ N/mm², 泊松比 $\nu=0.25$, 法向荷载 $p_{\max}=0.625$ N/mm, 切向荷载 $q_{\max}=0.05851$ N/mm。按平面应变问题进行计算, 在可能接触面上布置 36 个接触点对, 其模型网格图见图 4。本文算法解得最大法向接触压 $P_{\max}=9.335$ N/mm², 最大切向接触压力 $Q_{\max}=1.256$ N/mm²。图 5 给出了本文解与解析解^[9]和文献[10]计算结果的对比。可以看出, 本文解与解析解及文献[10]的相差均非常小, 三者吻合较好。

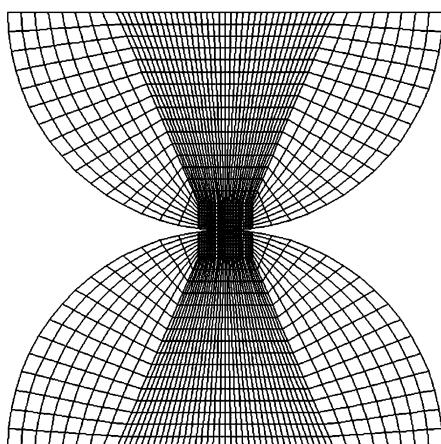
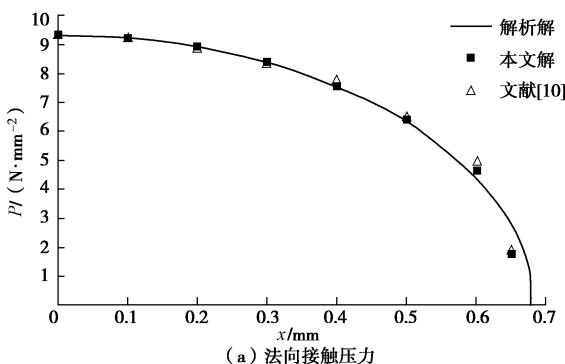


图 4 算例 1 网格图

Fig. 4 Meshes for Example 1



(a) 法向接触压力

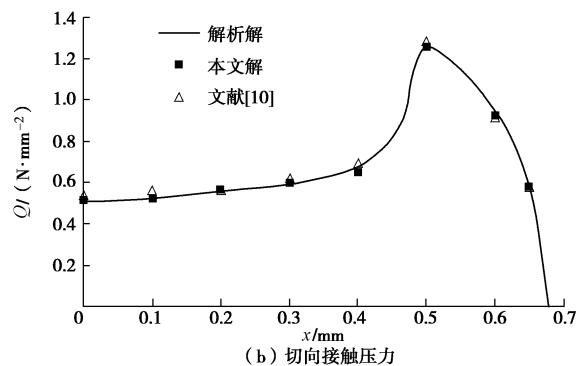


图 5 接触压力分布图

Fig. 5 Distribution of contact pressure

3.2 算例 2

图 6 所示为由两根完全相同的悬臂梁叠加而成的叠梁, 悬臂梁截面尺寸为 10 m×2 m×1 m。取材料参数: 弹性模量 $E=1.5$ GPa, 泊松比 $\nu=0.25$, 黏聚力 $c=0$, 界面摩擦系数 $\mu=0.2$, 在梁端施加如图 6 所示的分布力 $P=1500$ N/m。

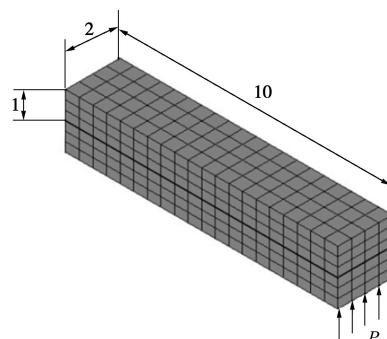


图 6 悬臂梁网格图

Fig. 6 Meshes for superposition cantilevers

计算结果表明, 在初始接触界面所布置的 105 个接触点对, 除了左端固定端 5 个接触点对仍处于固定外, 右端 10 个接触点对处于滑动状态, 其余 90 个接触点对全部处于自由状态, 其中, 最大法向间隙为 5.36×10^{-3} mm。图 7 所示为叠梁接触点对法向间隙分布图, 可以看出, 因摩擦效应作用, 接触点对法向间隙的分布呈明显的非线性特性。拉格朗日乘子法是一种精确的方法, 本文解与拉格朗日乘子法的计算结果进行了对比, 由图 7 可知计算结果吻合较好, 综上, 本文解是正确合理的。

3.3 算例 3

某水电站地下厂房洞室宽 30 m, 高 60 m, 埋深 400 m, 被一条倾角为 30° 的断层所切割, 计算模型范围及边界条件如图 8 所示。取水平侧压力系数 1.5 作为初始地应力条件, 岩体采用理想弹塑性本构模型, 屈服准则采用 Mohr–Coulomb 准则, 摩擦系数 $\mu=$

0.25 岩体力学参数为: 岩体类型为II类, 重度为24 kN/m³, 弹性模量为20 GPa, 泊松比为0.25, 黏聚力为1.8 MPa, 摩擦角为50°。分析过程中, 洞室按全断面开挖模拟, 且因断层厚度较整体模型而言相对较小, 故计算过程中忽略断层厚度。

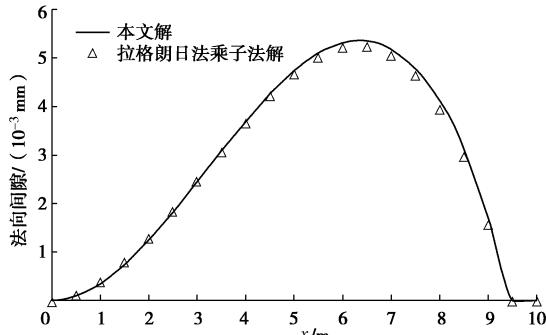


图7 接触点对法向间隙分布图

Fig. 7 Distribution of normal gap between interface node pairs

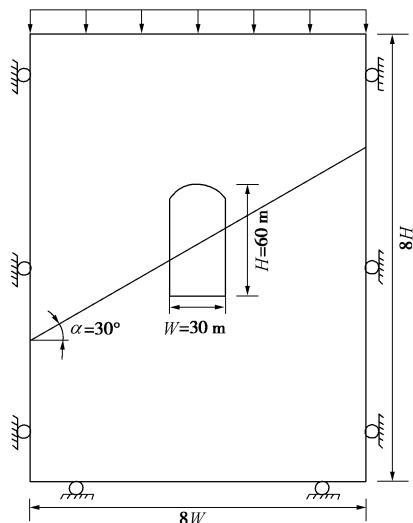


图8 洞室开挖计算模型示意图

Fig. 8 Sketch of model for chambers

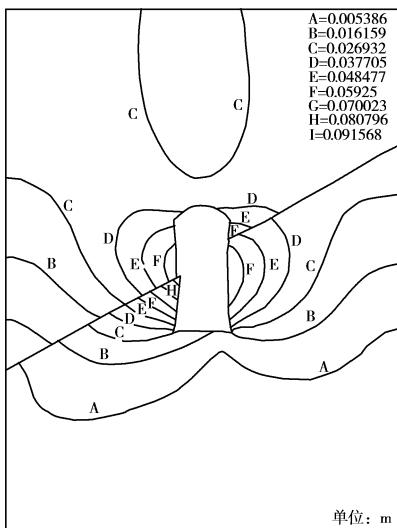


图9 围岩位移等值线图

Fig. 9 Displacement vectors of surrounding rock (unit: m)

可见, 洞室开挖后, 变形主要集中在结构面与洞周之间的影响区域, 其中左边墙沿结构面滑动达40.45 mm, 是洞室稳定性薄弱区。图10为洞室开挖后围岩的第一主应力图, 以拉为正, 压为负。由图10可看出, 应力集区中多发生于洞室各拐角及结构面附近。因岩体开挖使得洞周结构面岩体出现一定范围的拉应力区, 拉应力至约为1~4 MPa, 是洞室稳定性薄弱的地方, 应重点考虑加固支护。

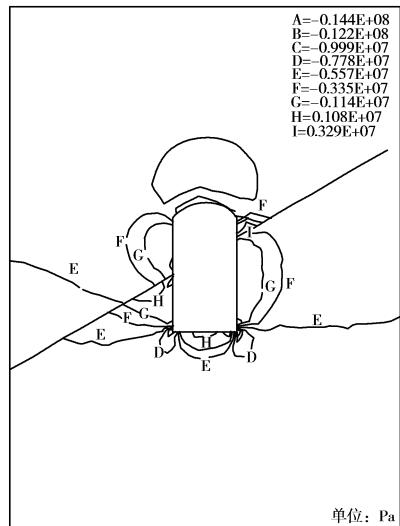


图10 围岩第一主应力等值线图

Fig. 10 Major primary stress vectors of surrounding rock

4 结 论

(1) 针对水工结构中的接触问题, 提出了一种分析接触问题的新方法。该方法基于DDA方法的分析思路, 单个块体内部采用有限元求解, 块体之间通过接触力相互联系, 且在接触面上满足变形协调条件, 保证了多个块体互相接触作用时块体位移和应力状态的连续性。接触求解过程中同时进行接触状态和接触内力迭代计算, 无需指定法向刚度及切向刚度等参数, 使得计算更加符合实际情况。该方法不仅提高了块体内部应力场的求解精度, 而且避免了DDA方法在处理接触问题上因引入刚性弹簧而出现的嵌入问题, 保证了迭代收敛性及正确性。

(2) 从两块体接触问题入手, 推导了多体有限元法求解接触问题的支配方程, 并给出接触状态的判定条件。通过三个数值算例验证了该方法的正确性和有效性。算例一和二表明, 该算法与理论值及现有的接触算法基本吻合, 计算结果正确合理; 水电站地下厂房算例的计算结果与工程经验相符, 验证了其在工程应用中的可靠性。

(3) 本算法目前还有一些局限, 其接触问题的求解采用点一点接触模型, 在实际工程应用中有限元模

型的建立存在一定的困难,因此,该算法尚需进一步发展完善。

参考文献:

- [1] 毛坚强. 接触问题的一种有限元计算方法及其在岩土工程中的应用[D]. 成都: 西南交通大学, 2002. (MAO Jian-qiang. A finite element approach for contact problems and its application in geotechnical engineering[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2002. (in Chinese))
- [2] CUNDALL P A, STRACK O D L. A discrete numerical model for granular assemblies[J]. *Géotechnique*, 1979, **29**(1): 47 - 65.
- [3] CUNDALL P A, HART R D. Numerical modelling of discontinua[J]. *Engineering Computations*, 1992, **9**(2): 101 - 113.
- [4] SHI G, GOODMAN R E. Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modelling[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1989, **13**(4): 359 - 380.
- [5] 刘君, 孔宪京, SHYU K. DDA 与 FEM 耦合法在分缝重力坝非线性分析中的应用[J]. *计算力学学报*, 2004, **21**(5): 585 - 591. (LIU Jun, KONG Xian-jing, SHYU K. DDA coupled FEM and its application in concrete gravity dam s with joints[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2004, **21**(5): 585 - 591. (in Chinese))
- [6] 赵兰浩, 李同春, 牛志伟. 有初始间隙摩擦接触问题的有限元混合法[J]. *岩土工程学报*, 2007, **28**(11): 2015 - 2018. (ZHAO Lan-hao, LI Tong-chun, NIU Zhi-wei. Mixed finite element method for contact problems with friction and initial gaps[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, **28**(11): 2015 - 2018. (in Chinese))
- [7] KWAK B M. Complementarity problem formulation of three-dimensional frictional contact[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1991, **58**(1): 134 - 140.
- [8] 张楚汉, 金峰. 岩石和混凝土离散—接触—断裂分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008: 234 - 235. (ZHANG Chu-han, JIN Feng. Discrete-contact-fracture analysis of rock and concrete[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008: 234 - 235. (in Chinese))
- [9] JOHNSON K L. Contact mechanics[M]. London: Cambridge University Press, 1985.
- [10] YANG B, LAURSEN T A, MENG X. Two-dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **62**(9): 1183 - 1225.

第十四届全国地基处理学术讨论会 (第 1 号通知)

为加强地基处理技术的学术交流,提供新理论、新技术、新理念、新设备的探讨平台,中国土木工程学会土力学及岩土工程分会地基处理学术委员会将于 2016 年 11 月中旬在江西省南昌市举办第十四届全国地基处理学术研讨会,会议旨在展示地基处理领域的最新研究成果和发展趋势。

会议征文内容: ①现有地基处理技术进展;②地基处理新技术的开发和应用;③复合地基理论与实践新发展;④地基处理工程勘察技术、设计计算、施工设备、质量检测等方面的新发展;⑤地基处理其它方面的新发展。

论文格式要求: ①应征论文要求内容具体、明确、严谨、未公开发表过、文责自负且不涉及保密内容。论文字数一般不超过 8000 字(包括图标和公式)。具有创新性以及充分尊重事实的论文将被优先采纳。②论文格式请按《岩土工程学报》论文体例。③请务必注明作者详细通讯地址、邮编、联系电话及

E-mail 地址。④提交电子稿审稿,确认录用后再提交版权转让声明的扫描件。

论文集: 会议论文集将收录大会主题报告及所有被学术委员会录用的论文,并正式出版。

地址: 江西省赣州市红旗大道 86 号江西理工大学建筑与测绘工程学院(341000);或江西省南昌市经济技术开发区双港东大街 808 号华东交通大学土木建筑学院(330013)。

投稿邮箱: cgis2016@163.com。详情见网站:
<http://jc.jxust.edu.cn/jcweb>。

重要时间: 提交全文截止日期 2016 年 7 月 15 日;全文录用截止日期 2016 年 8 月 5 日;修改稿提交截止日期 2016 年 8 月 15 日,会议时间 2016 年 11 月 18 日~20 日。

论文投稿及其他事宜请联系: 邓通发, 13970783208; 胡文韬, 18679135796; 龚良勇, 13870607175。

(大会组委会 供稿)