

DOI: 10.11779/CJGE201606005

# 基于极限平衡法和有限元法的边坡协同式可靠度分析

李典庆, 肖 特, 曹子君\*, 唐小松, 方国光

(武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072)

**摘 要:** 极限平衡法和有限元法是两种常用的边坡稳定分析方法。基于极限平衡法的边坡可靠度分析计算效率较高, 但需要假定失效模式, 从而导致计算结果不准; 与之相反, 基于有限元法的边坡可靠度分析更为严格, 但计算效率较低。为此, 提出了一种新的基于随机模拟的边坡可靠度分析方法——边坡协同式可靠度分析方法。该方法包括初步可靠度分析和精细可靠度分析两步, 可以同时利用极限平衡法和有限元法的优势, 实现既高效又准确的边坡可靠度分析。通过一个考虑空间变异性的两层土坡算例验证了该方法的有效性, 结果表明: 协同式可靠度分析方法与基于有限元法的蒙特卡洛模拟或子集模拟相比, 不仅具有一致的可靠度分析结果, 而且显著提高了小概率水平下的计算效率, 促进了基于有限元法的边坡可靠度分析在实际工程中的应用。该方法可以将基于极限平衡法的边坡可靠度分析成果合理纳入到基于有限元法的边坡可靠度分析中, 从而获得大量的失效样本, 以制定合理的边坡防治措施。该方法非常适用于高维可靠度问题, 如考虑空间变异性的边坡可靠度问题。

**关键词:** 边坡可靠度分析; 空间变异性; 极限平衡法; 有限元法; 子集模拟; 响应调节法

**中图分类号:** TU43

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-4548(2016)06-1004-10

**作者简介:** 李典庆(1975-), 男, 教授, 主要从事岩土工程可靠度与风险控制方面的研究。E-mail: dianqing@whu.edu.cn。

## Auxiliary slope reliability analysis using limit equilibrium method and finite element method

LI Dian-qing, XIAO Te, CAO Zi-jun, TANG Xiao-song, PHOON Kok-kwang

(State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

**Abstract:** The limit equilibrium method (LEM) and the finite element method (FEM) are two commonly-used slope stability analysis methods. The LEM-based slope reliability analysis is computationally efficient based on the prescribed slip surfaces, while the FEM-based one tends to give more realistic reliability estimates. A new simulation-based reliability method, namely auxiliary slope reliability analysis method, is developed, which includes two major steps (preliminary and target reliability analyses) and makes use of advantages of both LEM and FEM to achieve efficient and consistent slope reliability analysis. A two-layered slope example considering spatial variability is illustrated using the proposed method. The results indicate that the proposed method gives reliability estimates consistent with those obtained by the Monte Carlo simulation or subset simulation based on FEM, and it also significantly reduces the computational efforts at small probability levels. This enhances the application of FEM-based reliability analysis in slope engineering practice. The information generated in the LEM-based reliability analysis can be properly incorporated into the FEM-based reliability analysis, through which a large amount of failure samples can be obtained and used for making slope remedy measures. In addition, the proposed method is very practicable for high-dimensional reliability problems, such as slope reliability problem considering spatial variability.

**Key words:** slope reliability analysis; spatial variability; limit equilibrium method; finite element method; subset simulation; response conditioning method

## 0 引 言

随着计算机技术的高速发展, 基于随机模拟的可靠度分析及风险评估方法日益受到工程师们的青睐。在岩土工程中, 以边坡可靠度问题为例, 常用的随机模拟方法有蒙特卡洛模拟 (Monte Carlo simulation, MCS)<sup>[1-7]</sup>、重要性抽样模拟<sup>[8-9]</sup>、子集模拟 (subset

simulation, SS)<sup>[10-14]</sup>等。这些随机模拟方法具有其它

**基金项目:** 国家杰出青年科学基金项目 (51225903); 湖北省自然科学基金创新群体项目 (2014CFA001); 国家自然科学基金项目 (51409196, 51579190, 51528901); 国家重点基础研究发展计划 (“973” 计划) 项目 (2011CB013502)

**收稿日期:** 2015-05-14

\*通讯作者

可靠度分析方法所无法替代的优势, 如适用于各种形式的功能函数、适用于高维可靠度问题(重要性抽样模拟除外)等。在边坡可靠度分析的随机模拟过程中, 边坡确定性分析被反复地调用以计算边坡稳定的安全系数。其中, 极限平衡法(limit equilibrium method, LEM)<sup>[15]</sup>和有限元法(finite element method, FEM)<sup>[16]</sup>是两种最常用的确定性边坡稳定分析方法。

LEM 在边坡工程实践和边坡可靠度分析中都得到了广泛地应用<sup>[2-4, 8-12]</sup>。与 FEM 相比, LEM 概念简单, 易于掌握, 且计算效率较高, 特别是采用具有显式安全系数表达式的瑞典条分法。然而, LEM 需要事先假定滑面的形状和位置, 这些信息需要依赖工程师的工程经验。当遇到复杂的地层分布和(或)考虑土体参数的空间变异性时, 滑面的真实形状和位置变得复杂, 人为的假定往往存在偏差。不合理的滑面假定可能无法捕捉边坡的真实失效机制, 最终导致其可靠度分析结果与采用其它更严格的方法(如 FEM)所得的结果并不一致。

相比 LEM, FEM 因为无需对边坡滑面做任何假定而更加严格、通用, 因此基于 FEM 的边坡可靠度分析<sup>[1, 5-7, 13-14]</sup>可以得到更合理的可靠度分析结果。然而, 由于 FEM 计算耗时, 基于 FEM 的随机模拟方法(如随机有限元法(RFEM)<sup>[5-6]</sup>)普遍存在计算效率低下的问题。以 MCS 为例, 为解决实际工程中所关心的小失效概率水平( $P_f < 10^{-3}$ )的边坡可靠度问题, 至少需要上万次的边坡有限元分析才能达到可接受的计算精度。即使采用了更为高效的 SS, 上千次的有限元分析仍无法避免<sup>[13]</sup>。面对如此大的计算量, 自然就会产生一个疑问: 能否同时利用 LEM 和 FEM 的优势进行边坡可靠度分析, 在保证高效的同时, 又得到准确的可靠度估计。

针对该问题, 本文提出了一种新的基于随机模拟的边坡可靠度分析方法——边坡协同式可靠度分析方法。该方法同时利用 LEM 和 FEM 进行边坡可靠度分析, 采用 FEM 确保可靠度估计的准确性, 并借助 LEM 大大降低 FEM 的计算量。该方法主要包括两步: ①基于 LEM 和 SS<sup>[17-18]</sup>的初步可靠度分析, 该步可以花很少的计算代价迅速完成; ②基于 FEM 和响应调节法(response conditioning method, RCM)<sup>[19]</sup>的精细可靠度分析, 通过 RCM 将第一步基于 LEM 所得到的边坡稳定信息合理地利用到第二步的有限元分析中。本文首先分初步可靠度分析和精细可靠度分析两步介绍所提的边坡协同式可靠度分析方法, 并探讨了其中几个关键性问题, 然后给出相应的计算流程。最后采用一个考虑空间变异性的两层土坡算例验证了该方法的有效性。

## 1 边坡协同式可靠度分析方法

在边坡工程设计与分析中, 鉴于不同阶段的目的和需求不同, 常采用不同的方法进行边坡稳定性分析。在项目初步设计阶段, 往往先采用简单的极限平衡分析, 而随着项目的进行, 则需要采用更为准确的有限元分析进行进一步校核。基于可靠度理论的边坡工程设计与分析亦是如此。然而目前的现状是, 基于 FEM 的可靠度分析成果难以有效利用基于 LEM 的可靠度分析成果, 造成了计算资源的浪费。协同式可靠度分析方法可以有效地解决这一问题。对应于边坡工程的不同阶段, 该方法主要包括初步可靠度分析和精细可靠度分析两步。

### 1.1 初步可靠度分析

初步可靠度分析的目的在于, 利用 LEM 高效地得到初步可靠度分析结果(如边坡失效概率  $P_{f,LEM}$ )及有用的边坡失稳信息(即随机模拟中的样本空间划分)。为此, 可以根据边坡问题的复杂程度, 选择一个相对简单的 LEM 分析模型, 比如基于单个潜在滑面的瑞典条分法。相对于 MCS, SS 可以更高效地划分样本空间, 故建议采用 SS 进行初步可靠度分析。

SS<sup>[17-18]</sup>是一种高级的 MCS, 其核心是通过乘法定理将一个小概率失效事件  $F$  的发生概率表达为一系列中间失效事件的条件概率的乘积, 并通过马尔科夫链蒙特卡洛模拟(MCMCS)产生中间失效事件的条件样本估计它们所对应的条件概率, 逐步逼近目标失效事件。对于边坡稳定问题, 其失效事件  $F$  定义为边坡安全系数  $F_s$  小于某一个临界阈值  $f_s$  (通常取  $f_s = 1$ )。具体地, 基于 LEM 的边坡失效事件表示为  $F_{LEM} = \{F_{S_{LEM}} < f_s\}$ 。记  $f_{s_m} < f_s < f_{s_{m-1}} < \dots < f_{s_1}$  为  $m$  个中间失效事件  $F_{LEM,k} = \{F_{S_{LEM}} < f_{s_k}, k = 1, 2, \dots, m\}$  的临界阈值, 这些临界阈值可以在 SS 执行中被自动确定。

执行中, SS 先从 MCS 开始(记作第 0 层)生成  $N$  组非条件样本。采用 LEM 计算对应的  $F_{S_{LEM}}$ , 并将其按降序排列, 取第  $(1-p_0)N$  个  $F_{S_{LEM}}$  值作为  $f_{s_1}$ , 所估计的中间失效事件  $F_{LEM,1}$  的发生概率  $P(F_{LEM,1}) = p_0$ 。将这  $p_0N$  组样本作为种子, 在给定  $F_{LEM,1}$  的条件下, 采用 MCMCS 生成  $(1-p_0)N$  组新的条件样本, 因此共有  $N$  组样本属于  $F_{LEM,1}$ 。同理, 将这  $N$  组样本对应的  $F_{S_{LEM}}$  降序排列, 取第  $(1-p_0)N$  个  $F_{S_{LEM}}$  值作为  $f_{s_2}$ , 并用其定义中间失效事件  $F_{LEM,2}$ , 此时  $P(F_{LEM,2}|F_{LEM,1})$  同样也等于  $p_0$ 。以此类推, 重复上述过程  $m-1$  次直至达到失效事件  $F_{LEM,m-1}$ , 将其中  $F_{S_{LEM}}$  最小的  $p_0N$  组样本的发生事件直接定义为最后一个失效事件  $F_{LEM,m}$ 。由于  $f_s$  介于  $f_{s_m}$  和  $f_{s_{m-1}}$  之间, 该过程确保 SS 至少得到

$p_0N$  组失效样本。最终, SS 总共包含了  $m$  层模拟 (1 层 MCS 和  $m-1$  层 MCMCS), 并得到  $m(1-p_0)N+p_0N$  组样本。

值得注意的是, 这些样本分布在由  $m$  个中间阈值  $f_{s_1}, f_{s_2}, \dots, f_{s_m}$  所划分的  $m+1$  个样本空间  $\Omega_k (k=0, 1, \dots, m)$  中。根据全概率公式, 初步失效概率  $P_{f,LEM}$  可以表示为

$$P_{f,LEM} = \sum_{k=0}^m P(F_{LEM}|\Omega_k)P(\Omega_k) \quad (1)$$

式中  $\Omega_0 = \{F_{S_{LEM}} \geq f_{s_1}\}; \Omega_k = F_{LEM,k} - F_{LEM,k+1}, k=1, 2, \dots, m-1$ , 即  $\Omega_k = \{f_{s_{k+1}} \leq F_{S_{LEM}} < f_{s_k}\}; \Omega_m = F_{LEM,m}$ , 即  $\Omega_m = \{F_{S_{LEM}} < f_{s_m}\}; P(F_{LEM}|\Omega_k) = N_{F,k}/N_k$ , 为采用 LEM 计算的  $\Omega_k$  的条件失效概率, 其中  $N_{F,k}$  为  $\Omega_k$  中的失效样本个数,  $N_k$  为  $\Omega_k$  中的总样本个数 ( $N_k = (1-p_0)N, k=0, 1, \dots, m-1; N_m = p_0N$ );  $P(\Omega_k)$  为  $\Omega_k$  的发生概率 ( $P(\Omega_k) = (p_0)^k - (p_0)^{k+1}, k=0, 1, \dots, m-1; P(\Omega_m) = (p_0)^m$ )。

初步可靠度分析只需花很少的计算代价便可完成, 这主要得益于所选的 LEM 分析模型非常简单 (采用的瑞典条分法具有显式安全系数表达式, 且计算的潜在滑面很少)。显然, 采用更严格的 LEM 分析模型 (如摩根斯坦-普赖斯法) 并考虑更多的潜在滑面, 能得到更准确的  $P_{f,LEM}$  值, 但相应的计算量也会有所增加。总体而言, 初步可靠度分析的主要目的在于提供有用的边坡失稳信息, 因此其更注重计算效率而不是计算精度, 准确的可靠度分析结果将通过基于 FEM 的精细可靠度分析得以实现。

## 1.2 精细可靠度分析

基于 FEM 的边坡稳定性分析一般采用强度折减法<sup>[16]</sup>计算边坡安全系数  $F_{S_{FEM}}$ 。如前文所述, FEM 无需像 LEM 一样事先假定滑面的形状和位置, 从这个角度而言,  $F_{S_{FEM}}$  比  $F_{S_{LEM}}$  更能反映边坡真实的安全程度。因此本文将  $F_{S_{FEM}}$  视为边坡的目标响应, 将基于 FEM 所得的失效概率  $P_{f,FEM}$  视为目标失效概率。基于初步可靠度分析中采用 LEM 得到的边坡失稳信息 (即样本空间划分), 本节采用 RCM 估计  $P_{f,FEM}$ 。

RCM<sup>[19]</sup>利用简单的近似解获得的样本信息来达到高效且准确的可靠度估计。对于边坡稳定问题, 其目标失效事件表示为  $F_{FEM} = \{F_{S_{FEM}} < f_s\}$ 。根据初步可靠度分析所划分的样本空间  $\Omega_k (k=0, 1, \dots, m)$ ,  $P_{f,FEM}$  在 RCM 中可以表示为

$$P_{f,FEM} = \sum_{k=0}^m P(F_{FEM}|\Omega_k)P(\Omega_k) \quad (2)$$

式中,  $P(F_{FEM}|\Omega_k)$  为采用 FEM 计算的  $\Omega_k$  的条件失效概率。注意到式 (2) 与式 (1) 非常类似, 其不同之处

仅在于每个样本的  $F_s$  的计算方法是 FEM 而非 LEM。如此一来, 估计  $P_{f,FEM}$  同样需要  $m(1-p_0)N+p_0N$  次边坡有限元分析, 其计算量与直接采用 SS 和 FEM 进行可靠度分析是相当的, 当计算小失效概率问题时, 其计算效率仍然不高。

本文采用 RCM 中的子分区策略<sup>[19]</sup>来提高  $P_{f,FEM}$  的计算效率。该策略将各个样本空间  $\Omega_k (k=0, 1, \dots, m)$  中的样本根据其  $F_{S_{LEM}}$  降序排列, 并进一步将其划分为  $N_s$  个等概率的子样本空间  $\Omega_{kj} (j=1, 2, \dots, N_s)$ 。换言之, 每一个  $\Omega_{kj}$  在  $\Omega_k$  中的权重均为  $P(\Omega_{kj}|\Omega_k) = 1/N_s$ , 且均包含  $N_k/N_s$  组样本。由于  $\Omega_{kj}$  的区间跨度相对很小 (如 0.01), 因此每个  $\Omega_{kj}$  中的样本所提供的  $F_s$  信息非常相近, 可以从中随机选取一组样本作为  $\Omega_{kj}$  的代表性样本, 并根据该样本采用 FEM 所计算的  $F_{S_{FEM}}$  值判断该空间是否失效。根据全概率公式和  $\Omega_{kj} \subset \Omega_k$  的事实,  $P(F_{FEM}|\Omega_k)$  可以表达为

$$P(F_{FEM}|\Omega_k) = \sum_{j=1}^{N_s} P(F_{FEM}|\Omega_{kj})P(\Omega_{kj}|\Omega_k) \approx \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} I(F_{FEM}|\Omega_{kj}) \quad (3)$$

式中,  $I(F_{FEM}|\Omega_{kj})$  为指示函数, 当  $\Omega_{kj}$  的代表性样本的  $F_{S_{FEM}} < f_s$  时取 1, 否则取 0。将式 (3) 代入式 (2) 得到

$$P_{f,FEM} \approx \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^{N_s} I(F_{FEM}|\Omega_{kj}) \frac{P(\Omega_k)}{N_s} \quad (4)$$

采用式 (4) 估计  $P_{f,FEM}$  只需要进行  $(m+1)N_s$  次边坡有限元分析, 大大少于基于 FEM 直接采用 SS 所需的  $m(1-p_0)N+p_0N$  次 ( $N_s \ll N$ )。其计算量之所以可以减少, 是因为合理地采纳了基于 LEM 的初步可靠度分析所得到的  $F_s$  信息。更重要的是, Au<sup>[19]</sup>证明了 RCM 是渐近无偏的。这意味着采用式 (4) 所估计的  $P_{f,FEM}$  可以收敛于基于 FEM 直接进行 MCS 或 SS 所得的  $P_{f,FEM}$ , 即具有一致性估计。

需要指出, 样本空间  $\Omega_k (k=0, 1, \dots, m)$  是根据  $F_{S_{LEM}}$  值进行划分。对于特定的一组样本, 其采用 LEM 计算的  $F_{S_{LEM}}$  和采用 FEM 计算的  $F_{S_{FEM}}$  必然存在一定的差异。但是由于两种方法共用了相同的边坡尺寸、地层信息、材料属性等,  $F_{S_{LEM}}$  和  $F_{S_{FEM}}$  也应该存在一定的相关性。  $F_{S_{LEM}}$  和  $F_{S_{FEM}}$  间的相关性大小将影响式 (4) 所估计的  $P_{f,FEM}$  的变异性, 具体讨论见 2.3 节。

## 2 关键性问题探讨

### 2.1 不确定性建模

从上一节可知, 边坡协同式可靠度分析方法实际

上是通过随机模拟的样本空间将基于 LEM 的初步可靠度分析和基于 FEM 的精细可靠度分析有机地结合起来。因此, 这两步可靠度分析的样本空间必须保持一致, 换言之, 其不确定性建模方式必须保持一致。

在边坡可靠度分析中, 土体参数的空间变异性是其中一个非常重要的不确定性来源, 目前常采用随机场模型<sup>[20]</sup>予以表征。一般而言, 随机场离散后会产生大量的随机变量(高达几千甚至上万), 因此会导致高维可靠度问题。虽然谱展开法(如 K-L 级数展开法)可以在一定程度上减少随机变量的个数, 从而使得代理模型<sup>[21-22]</sup>在考虑空间变异性的边坡可靠度分析中可行, 但这种方法并不能从根本上解决高维问题。因此, 目前考虑空间变异性的边坡可靠度分析大部分都是采用随机模拟方法<sup>[1, 5-7, 12-14, 23-25]</sup>。本文所提的协同式可靠度分析方法同样具备进行高维可靠度分析的优点, 这使得该方法具有极大的适用性。

在基于 FEM 的边坡可靠度分析中, 土体不确定性参数的随机场通过一系列的随机场网格离散到整个土体空间中。而在基于 LEM 的边坡可靠度分析中, 土体不确定性参数的随机场一般有两种离散方式: 第一种只沿着滑面或仅在滑面以上的土体空间离散<sup>[26]</sup>; 第二种同 FEM 一样也在整个土体空间离散<sup>[12, 22-23]</sup>。为了确保初步可靠度分析和精细可靠度分析的样本空间的一致性, 本文在基于 LEM 的初步可靠度分析中, 随机场按第二种方式进行离散, 且采用和基于 FEM 的精细可靠度分析一致的随机场网格。具体的随机场离散方法可以参考文献[14]。

## 2.2 计算量分析

边坡协同式可靠度分析方法的计算量来源于两部分: ①采用 LEM 进行初步可靠度分析, 计算  $m(1-p_0)N+p_0N$  组样本的  $F_{S_{LEM}}$ ; ②采用 FEM 进行精细可靠度分析, 计算  $(m+1)N_s$  组样本的  $F_{S_{FEM}}$ 。用  $\xi$  表示采用 LEM 和 FEM 进行一次确定性分析的计算效率比值, 总计算量可以用等效的边坡有限元分析次数  $N_T$  表示为

$$N_T = (m+1)N_s + \xi[m(1-p_0) + p_0]N \quad (5)$$

由上述分析可以看出, 等效计算量  $N_T$  的大小取决于  $p_0$ ,  $m$ ,  $\xi$ ,  $N$  和  $N_s$  的取值。文献[17, 18]研究表明, 在 SS 中取  $p_0 = 0.1$  能够得到较好的结果, 本文也同样采用该值。 $m$  的确定需要保证  $(p_0)^m < P_{f,FEM}$ <sup>[19]</sup>, 因此该值取决于所研究的具体问题, 一般可以通过试算确定。 $\xi$  根据所采用 LEM 和 FEM 边坡确定性分析模型的计算效率所估计, 随着 LEM 分析模型变简单(如更简化的计算方法、更少的潜在滑面数目等)和 FEM

分析模型变复杂(如更精细的有限元网格、更高级的本构关系),  $\xi$  逐渐减小。 $N$  和  $N_s$  的选择需要权衡实际中所能接受的计算效率和计算精度, 二者取值越大, 其相应的计算精度越高、计算量也越大。在  $\xi$  的取值非常小时(如采用仅考虑单个滑面的瑞典条分法作为 LEM 分析模型), 该方法的计算量主要来源于第二步的  $(m+1)N_s$  次有限元分析, 即取决于  $N_s$ 。此时建议采用一个相对较大的  $N$  值(如 2000~5000)和一个较小的  $N_s$  值(如 20~50), 在保证足够的计算精度的同时, 充分降低计算量, 提高计算效率。其中  $N_s$  对目标失效概率  $P_{f,FEM}$  的影响将在第 4 节算例部分具体讨论。需要指出, 协同式可靠度分析方法很容易实现并行计算, 在计算量不变的基础上进一步提高计算效率, 具体见第 3 节。

## 2.3 变异性来源

显而易见, 边坡协同式可靠度分析方法所估计的  $P_{f,FEM}$  的变异性由 3 个部分组成: ①初步可靠度分析中采用 SS 进行样本空间划分所导致的变异性; ②在 RCM 的子分区策略中, 随机选择代表性样本并以该样本近似代表整个子样本空间所导致的变异性; ③初步可靠度分析的分析模型与精细可靠度分析的分析模型间的相关性(即 LEM 和 FEM 分析模型间的相关性)所导致的变异性。第一部分的变异性可以通过提高 SS 的计算精度(即增大  $N$ )得以控制, 具体的变异性大小可采用近似公式<sup>[17-18]</sup>估计; 第二部分的变异性可以通过加密子样本空间的划分(即增大  $N_s$ )得以控制, 该部分的讨论见第 4.4 节; 第三部分的变异性和分析模型的选择有关, 从理论上讲, 该部分的变异性将随着模型间相关性的增加而减小。本节主要针对第三部分的变异性进行讨论。

虽然很难直接建立相关性和变异性间的联系, 但相关性在一定程度上可以反映初步可靠度分析中所选的 LEM 分析模型的准确性, 进而影响到计算结果的变异性。本文采用皮尔逊线性相关系数  $\rho$  表征分析模型间相关性(即  $F_{S_{LEM}}$  和  $F_{S_{FEM}}$  间相关性)的大小。基于所选的  $(m+1)N_s$  组代表性样本的  $F_{S_{LEM}}$  和  $F_{S_{FEM}}$  值,  $\rho$  表示为:

$$\rho = \frac{E(F_{S_{LEM}} \times F_{S_{FEM}}) - E(F_{S_{LEM}})E(F_{S_{FEM}})}{\sqrt{D(F_{S_{LEM}})}\sqrt{D(F_{S_{FEM}})}} \quad (6)$$

式中,  $E(\cdot)$  和  $D(\cdot)$  分别表示各个量的期望和方差。注意到, 所选的  $(m+1)N_s$  组代表性样本实际上来自不同权重  $P(\Omega_k)$  的样本空间  $\Omega_k (k = 0, 1, \dots, m)$ , 根据全概率公式, 各个量的期望和方差可以采用加权形式进一步表达为

$$\left. \begin{aligned} E(F_{S_{LEM}} \times F_{S_{FEM}}) \\ = \sum_{k=0}^m E(F_{S_{LEM}} \times F_{S_{FEM}})_k P(\Omega_k), \\ E(F_{S_M}) = \sum_{k=0}^m E(F_{S_M})_k P(\Omega_k), \\ D(F_{S_M}) = \sum_{k=0}^m E(F_{S_M}^2)_k P(\Omega_k) - [E(F_{S_M})]^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中  $E(\cdot)_k$  表示各个量在  $\Omega_k$  中的期望;  $M$  表示 LEM 或 FEM。将式 (7) 代入式 (6), 即可根据所选的代表性样本估计  $F_{S_{LEM}}$  和  $F_{S_{FEM}}$  间的相关系数  $\rho$ 。如果  $\rho$  较小, 则对所求的  $P_{f,FEM}$  需要谨慎。因为在该情形下, 初步可靠度分析中 LEM 所提供的  $F_{S_{LEM}}$  信息对精细可靠度分析中采用 FEM 计算的  $F_{S_{FEM}}$  的指导价值非常有限, 这意味着所计算的  $P_{f,FEM}$  可能存在较大的变异性。因此,  $\rho$  可以作为一个参考指标, 用以选择合适的 LEM 分析模型进行初步可靠度分析。

### 3 计算流程

图 1 给出了边坡协同式可靠度分析计算流程, 主要包括以下 5 步: ①确定边坡几何尺寸 (如坡高、坡角、土层分层), 以及土体不确定性参数的统计量 (如均值、标准差、波动范围)、概率分布类型和自相关结构。②进行初步可靠度分析。采用 LEM 建模, 确定采用的极限平衡方法 (如瑞典条分法) 及潜在滑面; 执行 SS, 共生成  $m(1-p_0)N+p_0N$  组随机样本, 进行相应的随机场离散, 并基于 LEM 计算相应的  $F_{S_{LEM}}$ ; 根据式 (1) 计算边坡初步失效概率  $P_{f,LEM}$ , 并输出样本。③将每个样本空间  $\Omega_k$  ( $k=0, 1, \dots, m$ ) 等分成  $N_s$  个子样本空间  $\Omega_{jk}$  ( $j=1, 2, \dots, N_s$ ), 从每个  $\Omega_{jk}$  中随机挑选一组代表性样本, 共有  $(m+1)N_s$  组样本。④进行精细可靠度分析。采用 FEM 建模, 划分有限元网格, 选择合适的本构模型; 执行 RCM, 对选择的  $(m+1)N_s$  组随机样本重新进行随机场离散, 并基于 FEM 计算相应的  $F_{S_{FEM}}$ ; 根据式 (4) 计算边坡目标失效概率  $P_{f,FEM}$ 。⑤根据式 (5) 评估边坡协同式可靠度分析方法的计算量, 根据式 (6) 计算  $F_{S_{LEM}}$  和  $F_{S_{FEM}}$  间的相关系数, 并对初步可靠度分析和精细可靠度分析的结果进行对比。

其中, 第②步和第④步需要反复地调用基于 LEM 或 FEM 的边坡确定性分析, 该过程可以通过非侵入式<sup>[21-23]</sup>的方式调用商业软件 (如 Slope/W 或 Abaqus) 得以实现。这使得岩土参数不确定性的模拟及传递与确定性边坡稳定分析相对独立, 更便于工程师在实际工程中应用。此外, 这两步可靠度分析都可以通过并

行计算进一步提高计算效率。在 SS 中, 虽然每条马尔科夫链必须顺序执行, 但不同的马尔科夫链可以同时产生, 因此其最大并行数为  $p_0N$ 。而在 RCM 中, 所有样本已经在第③步中事先选定, 因此可以全部一起投入分析, 其最大并行数为  $(m+1)N_s$ 。所提的边坡协同式可靠度分析方法及其计算流程将在下一节中通过一个土坡算例进行演示。

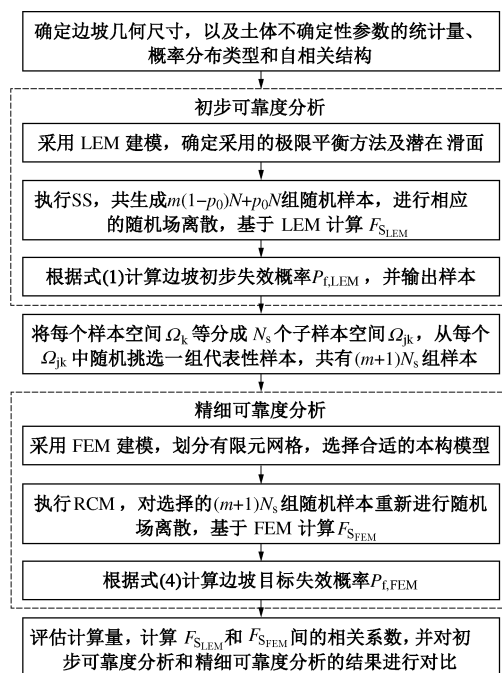


图 1 边坡协同式可靠度分析计算流程

Fig. 1 Implementation procedure of auxiliary slope reliability analysis

### 4 土坡算例分析

本节以一个土坡算例为例验证所提的边坡协同式可靠度分析方法的有效性。如图 2 所示, 该边坡坡高 24 m, 坡角约  $36.9^\circ$ , 共有两层土组成。考虑不排水工况, 上、下两层土的不排水抗剪强度  $S_{u1}$  和  $S_{u2}$  为服从对数正态分布的不确定性参数, 其均值分别为 80 kPa 和 120 kPa, 变异系数 (COV) 均为 0.3。除此之外, 两层土的重度、弹性模量和泊松比均视为确定值, 分别为  $19 \text{ kN/m}^3$ , 100 MPa 和 0.3。本文考虑了  $S_{u1}$  和  $S_{u2}$  的空间变异性, 假定它们均为指数型自相关结构且具有相同的波动范围, 其中水平和竖直波动范围分别为 24 m 和 2.4 m。本文采用中点法离散不确定性参数的随机场, 并考虑了随机场单元的局部平均效应<sup>[14]</sup>, 其中随机场网格划分如图 2 所示, 不确定性参数总共被离散为 1296 个随机变量。

在不确定性参数全取均值的条件下, 分别采用

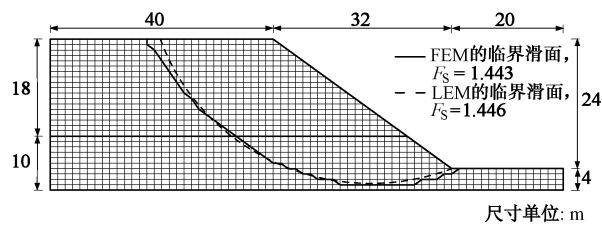


图 2 边坡几何尺寸及其确定性分析结果

Fig. 2 Slope geometry and deterministic analysis results

LEM 和 FEM 对该边坡进行确定性分析。其中, LEM 采用的是搜索 16400 个圆弧形潜在滑面的瑞典条分法, 其临界确定性滑面如图 2 中加粗虚线所示, 对应的最小安全系数为 1.446; 在 FEM 中, 有限元网格与随机场网格一致, 采用莫尔-库仑屈服准则和理想弹塑性本构模型, 基于强度折减法以计算不收敛为判据得到安全系数为 1.443, 其临界滑面通过 K 聚类方法<sup>[7]</sup>进行识别, 如图 2 加粗实线所示。可以看出, 两种方法所计算的安全系数和所确定的临界滑面均较为一致。

4.1 协同式可靠度分析结果

本节采用边坡协同式可靠度分析方法对该边坡进行可靠度分析。其中初步可靠度分析的 LEM 分析模型采用的是只考虑临界确定性滑面(见图 2 加粗虚线)的瑞典条分法。取  $p_0 = 0.1$ ,  $m = 5$ ,  $N = 5000$ , 共得到 23000 组随机样本及相应的  $F_{SLEM}$  值。由于仅考虑单个滑面, 初步可靠度分析可以很快完成, 对本算例而言, 共需要 2 min, 平均一次 LEM 分析耗时 0.005 s (计算机配置: CPU 主频 3.4 GHz、内存 8 GB)。

表 1 第 1~5 列给出了初步可靠度分析的过程及结果。在 SS 执行过程中, 根据  $F_{SLEM}$  共划分了 6 个样本空间  $\Omega_k$  ( $k = 0, 1, \dots, 5$ ) (见表 1 第 2 列), 其相应的权重如表 1 第 3 列所示。根据  $f_s = 1$ , 共得到 3176 组失效样本, 其中 2676 组失效样本属于  $\Omega_4$ , 500 组失效样本属于  $\Omega_5$ 。基于这 23000 组样本, 根据式 (1) 计算的初步失效概率  $P_{fLEM}$  为  $6.35 \times 10^{-5}$ ,  $P_{fLEM}$  随  $f_s$  的变化如图 3 的累积分布函数 (CDF) 曲线中的带十字实线所示。由于本节采用的初步可靠度分析只考虑

了临界确定性滑面, 所得的  $P_{fLEM}$  仅能反映该滑面的失效概率。而实际中由于土体分层和空间变异性的存在, 边坡可靠度应该为系统可靠度<sup>[22]</sup>, 因此该  $P_{fLEM}$  值并不能真实地反映边坡实际的可靠度水平。

与之相反, FEM 对每一次随机场实现都自动搜索边坡最危险滑面, 因此基于 FEM 计算的  $P_{fFEM}$  可以更真实地反映边坡失稳机制。根据初步可靠度分析所得到的样本空间划分, 基于 FEM (有限元模型与确定性分析保持一致) 的精细可靠度分析过程如表 1 第 6, 7 列所示。其中  $N_s$  取 50, 因此共进行了 300 次有限元分析。基于相同的计算机, 平均每一次有限元分析耗时 30 s, 与初步可靠度分析中采用的 LEM 相比, 计算效率比值  $\xi = 0.005/30$ 。根据式 (5), 等效有限元计算量为 304, 总耗时约为 2.5 h。

同样根据  $f_s = 1$ , 共得到 89 个失效样本 (见表 1 第 6 列)。其中,  $\Omega_3$  和  $\Omega_4$  的条件失效概率分别从 0 和 2676/4500 增加到 6/50 和 33/50。这反映了精细可靠度分析对初步可靠度分析结果的修正。根据式 (2), 该边坡的目标失效概率  $P_{fFEM}$  为  $1.77 \times 10^{-4}$ , 大约是  $P_{fLEM}$  的三倍。该结果并不令人意外, 因为初步可靠度分析仅考虑了单一滑面, 由于该滑面并不一定是每次随机实现的最危险滑面, 因此  $P_{fLEM}$  显然会低估系统失效概率。此外, 精确可靠度分析的 CDF 曲线如图 3 中带方形实线所示。同样观察到, 对于任意的  $f_s$  值, 该曲线均高于初步可靠度分析的 CDF 曲线。

4.2 LEM 与 FEM 计算结果的对比

在 2.3 节中提到, 初步可靠度分析的  $F_{SLEM}$  和精细可靠度分析的  $F_{SFEM}$  间的相关性大小将影响所估计的  $P_{fFEM}$  的变异性。在本算例中, 所挑选的 300 组代表性样本的  $F_{SLEM}$  和  $F_{SFEM}$  如图 4 所示。总体上,  $F_{SLEM}$  要大于相应的  $F_{SFEM}$ , 所以导致  $P_{fLEM} < P_{fFEM}$ 。此外, 虽然  $F_{SLEM}$  和  $F_{SFEM}$  在  $\Omega_0$  的离散程度较大且明显偏离 1:1 线, 但随着模拟层数的增加, 二者越来越聚集且保持在 1:1 线附近。根据式 (6), 二者的相关系数为 0.8, 反映出本算例中所选的 LEM 和 FEM 分析模型具有较强的相关性。

表 1 边坡协同式可靠度分析结果

Table 1 Results of auxiliary slope reliability analysis

层数 $k$	$\Omega_k$	$P(\Omega_k)$	$P(F_{LEM} \Omega_k)$	$P_{fLEM}$	$P(F_{FEM} \Omega_k)$	$P_{fFEM}$
0	$1.262 \leq F_{SLEM}$	$9 \times 10^{-1}$	0/4500	$6.35 \times 10^{-5}$	0/50	$1.77 \times 10^{-4}$
1	$1.146 \leq F_{SLEM} < 1.262$	$9 \times 10^{-2}$	0/4500		0/50	
2	$1.069 \leq F_{SLEM} < 1.146$	$9 \times 10^{-3}$	0/4500		0/50	
3	$1.010 \leq F_{SLEM} < 1.069$	$9 \times 10^{-4}$	0/4500		6/50	
4	$0.966 \leq F_{SLEM} < 1.010$	$9 \times 10^{-5}$	2676/4500		33/50	
5	$F_{SLEM} < 0.966$	$1 \times 10^{-5}$	500/500		50/50	

表 2 不同可靠度分析方法的计算结果对比

Table 2 Comparison of reliability analysis results obtained by different methods

可靠度分析方法	计算量		等效计算量 $N_T$	$P_f$	COV( $P_f$ )	单位 COV	耗时/h <sup>(d)</sup>
	LEM	FEM					
基于 FEM 的 MCS	—	60000	60000	$1.83 \times 10^{-4}$	0.30	73.5	500
基于 FEM 的 SS	—	1850	1850	$1.71 \times 10^{-4(a)}$	$0.38^{(a)}$	16.3	15.4
基于 LEM 的 SS <sup>(c)</sup>	1850	—	463	$4.86 \times 10^{-4(a)}$	$0.31^{(a)}$	6.7	3.9
协同式可靠度分析方法 <sup>(b)</sup>	23000	300	304	$1.79 \times 10^{-4(a)}$	$0.45^{(a)}$	7.8	2.5
协同式可靠度分析方法 <sup>(c)</sup>	1850	50	513	$1.78 \times 10^{-4(a)}$	$0.44^{(a)}$	9.7	4.3

注：<sup>(a)</sup> 基于 20 次独立模拟估计；<sup>(b)</sup> LEM 分析模型为仅考虑临界确定性滑面的瑞典条分法， $\zeta = 1/6000$ ；<sup>(c)</sup> LEM 分析模型为考虑 16400 个圆弧形潜在滑面的瑞典条分法， $\zeta = 1/4$ ；<sup>(d)</sup> 计算耗时以顺序计算计。

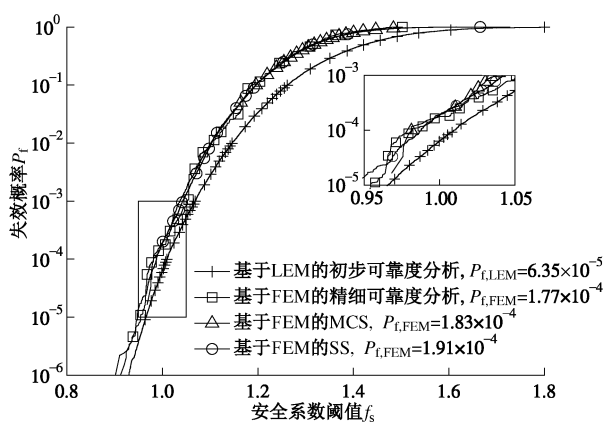


图 3 安全系数的累积分布函数  
Fig. 3 CDF of safety factor

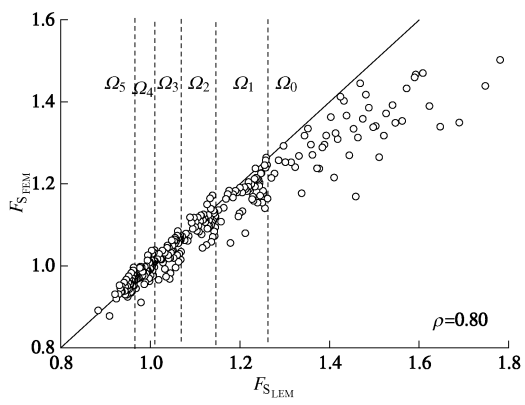


图 4  $F_{S_{LEM}}$  和  $F_{S_{FEM}}$  间相关性  
Fig. 4 Correlation between  $F_{S_{LEM}}$  and  $F_{S_{FEM}}$

为了进一步探索 LEM 和 FEM 的差异，图 5 给出了各样本空间中的样本基于 FEM 所识别的临界滑面（浅色细实线）与基于 LEM 所采用的临界确定性滑面（深色粗虚线）。从图 5 可以看出，二者的滑面有显著差异，因此导致  $F_{S_{FEM}}$  与  $F_{S_{LEM}}$  有一定的差异。此外，与图 4 中  $F_{S_{FEM}}$  与  $F_{S_{LEM}}$  的离散规律相一致，随着模拟层数的增加，FEM 的临界滑面越来越集中，且逐渐收敛于 LEM 的临界确定性滑面。这说明了 LEM 的临界确定性滑面在一定程度上能较好地反映出接近失效时的边坡失效机制。

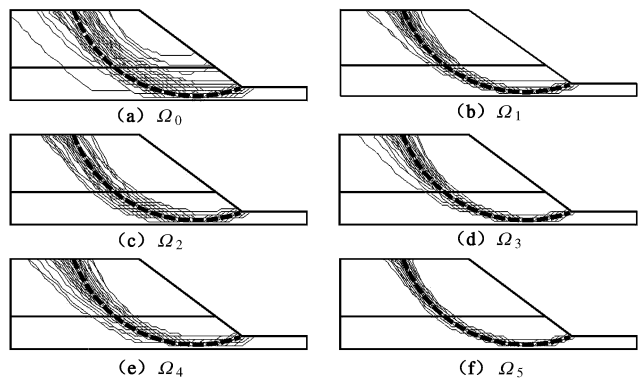


图 5 固定滑面的 LEM 与 FEM 的滑面对比  
Fig. 5 Comparison of slip surfaces obtained by LEM with fixed slip surface and FEM

4.3 不同可靠度分析方法的对比

为了验证本文所提的边坡协同式可靠度分析方法的有效性，本节共进行了 20 次独立的边坡协同式可靠度分析，结果如表 2 第 5 行所示，并分别采用基于 FEM 的随机模拟（包括 1 次 MCS 和 20 次 SS）和基于 LEM 的随机模拟（20 次 SS）进行可靠度分析作为对比。

基于 FEM 的 MCS 共计算 60000 组随机样本，基于 FEM 的 SS 每次计算 1850 组随机样本（ $p_0 = 0.1$ ， $m = 4$ ， $N = 500$ ），它们的 FEM 分析模型与协同式可靠度分析方法中所采用的模型保持一致。由于同样是基于 FEM，因此它们所求的失效概率都视为目标失效概率。如表 2 所示，基于 FEM 的 MCS 所估计的  $P_{f,FEM}$  为  $1.83 \times 10^{-4}$ ，20 次基于 FEM 的 SS 所估计的  $P_{f,FEM}$  均值为  $1.71 \times 10^{-4}$ ，它们均和 20 次的边坡协同式可靠度分析方法所估计的  $P_{f,FEM}$  均值（即  $1.79 \times 10^{-4}$ ）相一致。此外，图 3 还给出了 MCS 和一次典型的 SS 的 CDF 曲线（分别为带三角形和带圆形实线），可以发现它们均和带方形实线（即协同式可靠度分析的精细可靠度分析结果）非常吻合。上述结果表明，所提的同时利用 LEM 和 FEM 的边坡协同式可靠度分析方法与直接基于 FEM 的 MCS 和 SS 的可靠度分析结果是一致的。



如表2所示, 基于FEM的MCS (60000组样本) 的COV大约为0.3 (根据 $[(1-P_f)/(N_T P_f)]^{1/2}$ 估计), 在同一计算机上耗时500 h才完成; 而基于FEM的SS (1850组样本) 耗时15.4 h, 通过20次独立模拟所估计的COV大约为0.38; 相对地, 所提的协同式可靠度分析方法等效计算量为304, 仅需2.5 h即可完成分析, 远远小于MCS和SS的计算量。通过20次独立模拟, 所估计的协同式可靠度分析方法的COV大约为0.45。由于COV的大小与样本量直接相关, 为了更公平地比较计算效率, 本文采用单位COV (定义为 $\text{COV} \times N_T^{1/2}$ ) [19]进行比较。几种方法计算的单位COV分别如表2第7列所示, 协同式可靠度分析方法的单位COV仅为MCS的1/9, SS的1/2, 这表明为了达到相同的计算精度, 协同式可靠度分析方法的计算量分别为MCS和SS的1/81和1/4。所提方法通过RCM将基于LEM的可靠度分析成果合理地纳入基于FEM的可靠度分析中, 从而显著地提高了边坡可靠度分析的计算效率。

此外, 由于有基于LEM的初步可靠度分析的成果作为导向, 基于FEM的可靠度分析可以更高效地逼近目标失效区域, 从而获得更多的失效样本。在本算例中, 边坡协同式可靠度分析方法的平均失效样本产生率为81.1/300, 而该比例在MCS和SS中分别降低了大约1500倍和6倍 (即11/60000和85.7/1850)。大量的失效样本可以更好地对边坡进行失效分析, 从而更好地理解边坡的失效机制, 以制定合理的边坡防治措施。

作为对比, 本文同时也采用了20次1850组样本的基于LEM的SS ( $p_0 = 0.1$ ,  $m = 4$ ,  $N = 500$ ) 对该算例进行可靠度分析。为了更准确地计算边坡系统可靠度, 其LEM分析模型采用考虑16400个圆弧形潜在滑面的瑞典条分法, 单个样本的计算耗时大约为7.5 s, 是FEM计算耗时的1/4, 因此等效计算量为463。如表2第4行所示, 基于LEM的SS的单位COV约为6.7, 这与协同式可靠度分析方法相近; 但是其估计的失效概率为 $4.86 \times 10^{-4}$ , 大约是其它基于FEM的方法的3倍。因此, 如果仅采用LEM进行边坡可靠度分析, 即使考虑了大量的潜在滑面, 其计算结果仍不能与其它更严格的方法 (如FEM) 相一致的。而本文方法不仅效率与之相近, 更重要的是保证了可靠度估计的准确性。

需要指出, 在实际应用中, 有可能前期已经完成了基于考虑大量潜在滑面的LEM分析模型的可靠度分析。为了能够充分利用该结果而不是完全舍弃, 本节采用协同式可靠度分析方法, 将其也作为一种初步可靠度分析, 然后同样采用基于FEM的精细可靠度

分析 ( $N_s = 10$ ) 对该结果进行修正, 结果如表2第6行所示。可以看出, 其 $P_{f,FEM}$ 均值为 $1.78 \times 10^{-4}$ , 仍然与其它基于FEM的可靠度结果保持一致, 且只增加了很少的计算量 (即50次有限元分析)。在本次边坡协同式可靠度分析中,  $F_{S,LEM}$  与  $F_{S,FEM}$  的相关性高达0.99 (与图4相反, 因为采用了不同的LEM分析模型, 此时总体上有  $F_{S,FEM} > F_{S,LEM}$ ), LEM和FEM所识别的临界滑面也基本一致 (图6给出第一层和最后一层样本空间的样本所对应的滑面, 深色实线和浅色虚线分别表示FEM和LEM所识别的临界滑面)。虽然此次协同式可靠度分析的效率稍低于前一次 (其中90%的计算量来自于已经完成的初步可靠度分析), 但仍然要明显高于基于FEM的MCS和SS。此时协同式可靠度分析方法的优点更在于充分利用已有的可靠度分析成果, 尽可能少增加额外的计算量。

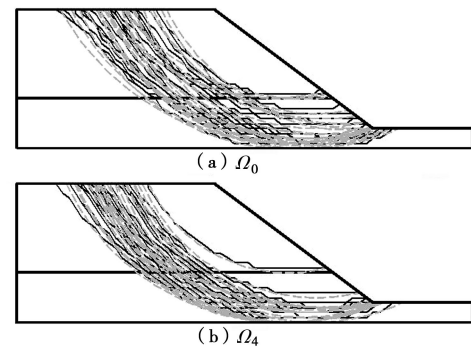


图6 搜索滑面的LEM与FEM的滑面对比

Fig. 6 Comparison of slip surfaces obtained by LEM with searched slip surfaces and FEM

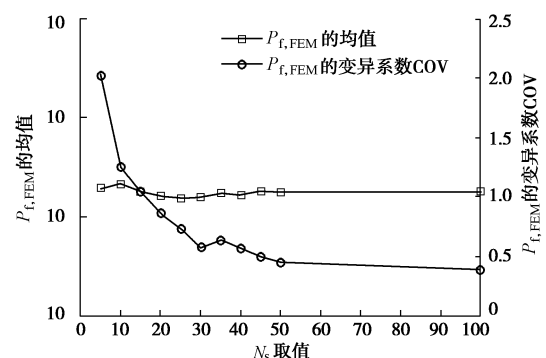


图7  $N_s$  取值对  $P_{f,FEM}$  的影响

Fig. 7 Effects of  $N_s$  on  $P_{f,FEM}$

#### 4.4 $N_s$ 对精细可靠度分析结果的影响

第2.2节中提到,  $P_{f,FEM}$  的变异性与精细可靠度分析中所选的代表性样本个数 (即 $(m+1)N_s$ ) 有很大关系, 即受到  $N_s$  大小的影响。如何选择  $N_s$  是个值得探讨的问题。为了研究  $N_s$  的影响, 本节中分别取  $N_s$  为5~100进行敏感性分析。对于每一个  $N_s$  值, 采用与4.1节相同的分析模型及参数, 分别进行20次独立的边坡协同式可靠度分析, 计算  $P_{f,FEM}$  的均值和COV。

如图7所示, 带方形实线和带圆形实线分别表示



$P_{f,FEM}$  的均值和 COV 随  $N_s$  的变化曲线。随着  $N_s$  从 5 增大到 100,  $P_{f,FEM}$  的均值的变化幅度很小, 而  $P_{f,FEM}$  的 COV 显著降低, 并当  $N_s$  大于一定值时趋于稳定。随着  $N_s$  增加,  $P_{f,FEM}$  变异性的降低是由于更多的初步可靠度分析信息被用于精细可靠度分析中; 而其趋于稳定是因为 LEM 和 FEM 的分析模型差异导致  $P_{f,FEM}$  必然会存在变异性, 二者的相关性越强, 达到稳定时的  $P_{f,FEM}$  变异性就越小。当然, 变异性的减小需要以计算量的增加作为代价, 因此  $N_s$  的选择是平衡计算精度和计算效率后的结果。

在实际执行中, 本文建议采用自适应的方法选择合适的  $N_s$ 。即先取一个较小的  $N_s$  (比如  $N_s = 5$ ) 计算  $P_{f,FEM}$ , 然后逐步增大  $N_s$  直到所计算的  $P_{f,FEM}$  趋于稳定。需要指出, 每次  $N_s$  变化时, 子样本空间进行了重新划分。为了减小计算量, 如果新子样本空间中恰好有一组已经被选择的代表性样本, 则继续保留该样本; 如果新子样本空间中有超过一组的代表性样本, 则从中随机选取一组; 如果新子样本空间中没有任何代表性样本, 则在该空间中随机选取一组样本作为代表性样本。通过上述方法, 尽可能地避免了代表性样本的重复选取, 减小了有限元分析的次数。总体来说, 整个自适应过程的计算量会稍大于直接选用最终确定的  $N_s$  进行计算的计算量 (由于第二种情况的存在), 但自适应过程可以确定一个较为合理的  $N_s$  值。

## 5 结 论

本文提出了一种新的基于随机模拟的边坡协同式可靠度分析方法。该方法主要包括两步: ①基于极限平衡法 (LEM) 和子集模拟 (SS) 的初步可靠度分析; ②基于有限元法 (FEM) 和响应调节法 (RCM) 的精细可靠度分析。采用该方法对一个考虑空间变异性的两层土坡进行了可靠度分析, 得到以下 3 点结论。

(1) 协同式可靠度分析方法与基于 FEM 的 MCS 或基于 FEM 的 SS 相比, 不仅具有一致的可靠度分析结果, 而且显著提高了小失效概率水平下 (如  $P_f < 10^{-3}$ ) 的边坡可靠度计算效率, 使得总计算量降低一到两个数量级。上述两个优点使得该方法可以极大地提高基于 FEM 的边坡可靠度分析方法 (如随机有限元法) 在实际工程中的应用。同时也可以看出, 虽然基于 LEM 的 SS 与所提方法计算效率相当, 但该方法所估计失效概率与基于 FEM 的可靠度分析结果有所偏差。

(2) 协同式可靠度分析方法可以将基于 LEM 的边坡可靠度分析成果合理纳入到基于 FEM 的边坡可靠度分析中, 从而显著提高计算效率, 并获得大量的

失效样本, 以制定合理的边坡防治措施。选用一个相对高效、且与 FEM 分析模型具有较强相关性的 LEM 分析模型对该方法的计算效率至关重要, 该 LEM 分析模型可以根据工程师的工程经验相对容易地得到。

(3) 协同式可靠度分析方法非常适用于高维可靠度问题, 如考虑空间变异性的边坡可靠度问题。该方法要求初步可靠度分析和精细可靠度分析的不确定性建模方式必须保持一致。

## 参考文献:

- [1] 吴振君, 王水林, 葛修润. 约束随机场下的边坡可靠度随机有限元分析方法[J]. 岩土力学, 2009, 30(10): 3086 - 3092. (WU Zhen-jun, WANG Shui-lin, GE Xiu-run. Slope reliability analysis by random FEM under constraint random field[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(10): 3086 - 3092. (in Chinese))
- [2] 吴振君, 王水林, 葛修润. LHS 方法在边坡可靠度分析中的应用[J]. 岩土力学, 2010, 31(4): 1047 - 1054. (WU Zhen-jun, WANG Shui-lin, GE Xiu-run. Application of Latin hypercube sampling technique to slope reliability analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(4): 1047 - 1054. (in Chinese))
- [3] 李典庆, 祁小辉, 周创兵, 等. 考虑参数空间变异性的无限长边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(10): 1799 - 1806. (LI Dian-qing, QI Xiao-hui, ZHOU Chuang-bing, et al. Reliability analysis of infinite soil slopes considering spatial variability of soil parameters[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(10): 1799 - 1806. (in Chinese))
- [4] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 不完备概率信息条件下边坡可靠度分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(6): 1027 - 1034. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Reliability analysis of slopes with incomplete probability information[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(6): 1027 - 1034. (in Chinese))
- [5] GRIFFITHS D V, FENTON G A. Probabilistic slope stability analysis by finite elements[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, 130(5): 507 - 518.
- [6] GRIFFITHS D V, HUANG J, FENTON G A. Influence of spatial variability on slope reliability using 2-D random fields[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2009, 135(10): 1367 - 1378.
- [7] HUANG J, LYAMIN A V, GRIFFITHS D V, et al. Quantitative risk assessment of landslide by limit analysis and random fields[J]. Computers and Geotechnics, 2013, 53: 60 - 67.

- [8] 李典庆, 周创兵. 考虑多失效模式相关的岩质边坡体系可靠度分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(3): 541 - 551. (LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing. System reliability analysis of rock slope considering multiple correlated failure modes[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(3): 541 - 551. (in Chinese))
- [9] CHING J, PHOON K K, HU Y G. Efficient evaluation of reliability for slopes with circular slip surfaces using importance sampling[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2009, **135**(6): 768 - 777.
- [10] 曹子君. 子集模拟在边坡可靠性分析中的应用[D]. 成都: 西南交通大学, 2009. (CAO Zi-jun. Application of subset simulation on reliability analysis of slope stability[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2009. (in Chinese))
- [11] 张曼, 唐小松, 李典庆. 含相关非正态变量边坡可靠度分析的子集模拟方法[J]. 武汉大学学报(工学版), 2012, **45**(1): 41 - 45. (ZHANG Man, TANG Xiao-song, LI Dian-qing. Reliability analysis of slope stability involving correlated non-normal variables using subset simulation method[J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2012, **45**(1): 41 - 45. (in Chinese))
- [12] WANG Y, CAO Z, AU S K. Practical reliability analysis of slope stability by advanced Monte Carlo simulations in a spreadsheet[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2011, **48**(1): 162 - 172.
- [13] LI D Q, XIAO T, CAO Z J, et al. Enhancement of random finite element method in reliability analysis and risk assessment of soil slopes using Subset Simulation[J]. Landslides, 2016, **13**: 293 - 303.
- [14] 李典庆, 肖特, 曹子君, 等. 基于高效随机有限元法的边坡风险评估[J]. 岩土力学, (已录用). (LI Dian-qing, XIAO Te, CAO Zi-jun, et al. Slope risk assessment using efficient random finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, (Accepted). (in Chinese))
- [15] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析——原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003. (CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis—theory, methods, and programs[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2003. (in Chinese))
- [16] 郑颖人, 赵尚毅, 李安红, 等. 有限元极限分析法及其在边坡中的应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2011. (ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi, LI An-hong, et al. FEM limit analysis and its application in slope engineering[M]. Beijing: China Communications Press, 2011. (in Chinese))
- [17] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, **16**(4): 263 - 277.
- [18] AU S K, WANG Y. Engineering risk assessment with subset simulation[M]. Singapore: John Wiley & Sons, 2014.
- [19] AU S K. Augmenting approximate solutions for consistent reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2007, **22**(1): 77 - 87.
- [20] VANMARCKE E H. Random fields analysis and synthesis (revised and expanded new edition)[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2010.
- [21] 肖特, 李典庆, 周创兵, 等. 基于有限元强度折减法的多层边坡非侵入式可靠度分析[J]. 应用基础与工程科学学报, 2014, **22**(4): 718 - 732. (XIAO Te, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Non-intrusive reliability analysis of multi-layered slopes using strength reduction FEM[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2014, **22**(4): 718 - 732. (in Chinese))
- [22] 蒋水华, 李典庆, 曹子君, 等. 考虑参数空间变异性的边坡系统可靠度分析[J]. 应用基础与工程科学学报, 2014, **22**(5): 841 - 855. (JIANG Shui-hua, LI Dian-qing, CAO Zi-jun, et al. System reliability analysis of slopes considering spatial variability of soil properties[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2014, **22**(5): 841 - 855. (in Chinese))
- [23] 蒋水华, 李典庆, 周创兵, 等. 考虑自相关函数影响的边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(3): 508 - 518. (JIANG Shui-hua, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Slope reliability analysis considering effect of autocorrelation functions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(3): 508 - 518. (in Chinese))
- [24] 薛亚东, 方超, 葛嘉诚. 各向异性随机场下的边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(增刊2): 77 - 82. (XUE Ya-dong, FANG Chao, GE Jia-cheng. Slope reliability in anisotropic random fields[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(S2): 77 - 82. (in Chinese))
- [25] 舒苏荀, 龚文惠. 二维随机场下边坡稳定性的径向基函数神经网络分析法[J]. 岩土力学, 2015, **36**(4): 1205 - 1210. (SHU Su-xun, GONG Wen-hui. Radial basis function neural network-based method for slope stability analysis under two-dimensional random field[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(4): 1205 - 1210. (in Chinese))
- [26] CHO S E. Effects of spatial variability of soil properties on slope stability[J]. Engineering Geology, 2007, **92**(3): 97 - 109.