

DOI: 10.11779/CJGE201605016

# 基于 SPH 的边坡稳定性计算中失稳判据研究

唐宇峰<sup>1, 2</sup>, 施富强<sup>1, 2</sup>, 廖学燕<sup>2</sup>

(1. 西南交通大学机械工程学院, 四川 成都 610031; 2. 四川省安全科学技术研究院, 四川 成都 610045)

**摘要:** 在用强度折减法进行边坡稳定性分析时, 失稳判据的选择对安全系数有着直接的关系。光滑粒子流体动力学法 (SPH) 是一种新型的无网格法, 由于其在大变形等领域的优势而逐渐发展起来, 并扩展至边坡稳定性分析领域。然而, 目前对于该方法在边坡稳定性分析中失稳判据的研究尚未见报道。首先通过 Fortan 语言编写了基于 SPH 强度折减法的边坡稳定性分析程序, 然后通过一个经典边坡案例, 讨论了不同失稳判据对安全系数的影响, 并提出了一种新的位移变化失稳判定方法。结果表明, 在基于 SPH 的边坡稳定性分析中, 以塑性区贯通或以位移变化为判定准则时各有优劣, 但得到的安全系数均与极限平衡法及有限元法得到的安全系数十分接近, 均可作为失稳判据。而当采用位移变化准则进行分析时, 采用“两步走”的方法即可以减小计算量, 又可以得到较准确的安全系数, 是一种值得推荐的方法。

**关键词:** 光滑粒子流体动力学; SPH; 稳定性分析; 失稳判据; 强度折减法

**中图分类号:** TU431; O319.56      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2016)05-0904-05

**作者简介:** 唐宇峰(1986-), 男, 博士研究生, 主要从事 SPH 数值模拟方法、岩土工程等方面的科研工作。E-mail: flystick1@qq.com。

## Failure criteria based on SPH slope stability analysis

TANG Yu-feng<sup>1, 2</sup>, SHI Fu-qiang<sup>1, 2</sup>, LIAO Xue-yan<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. Sichuan Academy of Safety Science and Technology, Chengdu 610045, China)

**Abstract:** When the strength reduction method is used to solve the problem of slope stability, the failure criteria have direct relationship with the safety factor. The smoothed particle hydrodynamics (SPH) method is a new mesh-less method, which is developed recently due to its advantages in the field of large deformation, is also applied to slope stability analysis. However, no discussions about the failure criteria of slope stability analysis based on SPH are available until now. Firstly, the slope stability analysis procedure based on SPH is written in Fortran language. Then, the influences of different failure criteria on the safety factor are discussed through a typical slope case, and a new displacement change failure criterion is proposed. The case shows that in the slope stability analysis based on SPH method, the plastic zone criterion and the displacement change criterion have their own advantages and disadvantages, but the safety factor obtained by the two criteria are quite close to the safety factor obtained by the limit equilibrium method or finite-element method, and both of the two methods can be failure criteria. When using the displacement change criterion, the two-step method can be used to reduce the computation time and to obtain more accurate safety factor, and it is worth recommending.

**Key words:** smoothed particle hydrodynamics; SPH; stability analysis; failure criterion; strength reduction method

## 0 引言

传统的边坡稳定性分析方法, 如极限平衡法、有限元强度折减法等只能得到边坡的安全稳定性系数和临界滑移面, 而对分析边坡失稳后的运动状态存在一定的困难。近年来, 无网格法由于其在处理大变形、自由表面、运动交界面等方面的优势逐渐引起了人们的关注。其中, 光滑粒子流体动力学法 (SPH) 是一种发展较早的纯拉格朗日无网格法, 目前已推广应用

到天体物理学、爆炸与高速冲击、流体力学、采矿工程、岩土力学等诸多计算领域<sup>[1]</sup>。Maeda 等<sup>[2]</sup>最早采用非线性弹性模型将 SPH 引入到土体变形问题领域, 但由于没有考虑塑性变形使其应用受到一定的限制; 黄雨等<sup>[3]</sup>采用宾汉姆流体模型将滑坡后的土体作为一种流体, 将 SPH 计算结果与土体大变形试验结果及汉

川地震唐家山滑坡等 4 个滑坡案例<sup>[4]</sup>进行了对比并得到了较好的一致性, 但该方法只能针对已知滑移面或滑移体的边坡进行失稳后流动分析, 而没有考虑稳定性分析过程; Ha 等<sup>[5]</sup>将弹塑性模型引入到 SPH 中, 为实现边坡稳定性分析提供了可能, 并随之后提出了 SPH 强度折减法, 从而为边坡稳定性分析增加一种新型的方法<sup>[6]</sup>; Nonoyama Hidet 等通过一系列的算例, 分析了 SPH 在边坡稳定性分析的有效性, 进一步推动了 SPH 在稳定性分析方面的发展<sup>[7]</sup>, 然而基于 SPH 方法进行边坡稳定性分析在国内还鲜见报道。

对于任何边坡稳定性分析方法, 从稳定到失稳的判据一直是讨论的热点之一, 如有限元及有限差分强度折减法通常有 3 种失稳判据: ①以塑性区贯通为判据; ②以特征点位移突变为判据; ③以数值计算不收敛为判据。相关学者对基于有限元的强度折减法等传统方法的判据选取已经进行了广泛的讨论, 这里不再赘述。而对于基于 SPH 的边坡稳定性分析, 由于其无网格拉格朗日特性, 其失稳判据的选择有着自己的特点, 但对于其失稳判据的讨论目前还尚未见报道。本文通过 Fortran 编写了基于 SPH 的强度折减法的边坡稳定性及失稳后滑坡大变形分析程序, 对目前可能适用 SPH 强度折减法的几种判据进行了分析, 并通过一个实例分析了不同失稳判据的优劣及其对安全系数的影响, 填补了该方向的空白, 具有一定的理论及实际意义。

## 1 SPH 理论基础及程序实现

### 1.1 SPH 理论基础

在光滑粒子流体动力学 (SPH) 方法中, 方程的构造主要由两个关键步构成, 即对宏观变量函数进行函数逼近, 以及将一系列不需要网格来连接的离散点进行质点近似, 如:

$$\langle f(x') \rangle = \int_{\Omega} f(x') W(x-x', h) dx' , \quad (1)$$

$$\langle \rho_i(x) \rangle = \sum_{j=1}^N m_j f_j(x') W(x-x', h) , \quad (2)$$

其中,  $W(x-x', h)$  称为光滑核函数, 本文选取的是 Monaghan 在 1985 年提出的三次样条核函数:

$$W(Rh) = \begin{cases} \left( \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2} R^3 \right) \cdot \alpha_d & (0 \leq R < 1) \\ \frac{1}{6} (2-R)^3 \cdot \alpha_d & (1 \leq R < 2) \\ 0 & (R \geq 2) \end{cases} , \quad (3)$$

式中,  $\alpha_d$  在一维、二维、三维空间下分别等于

$$\frac{1}{h}, \frac{15}{7\pi h^2}, \frac{3}{2\pi h^3} .$$

利用式 (1)、(2), SPH 形式下的连续性方程和动量方程可以表示为

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j (v_i^\alpha - v_j^\alpha) \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} , \quad (4)$$

$$\frac{dv_i^\alpha}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \delta^{\alpha\beta} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + g^\alpha , \quad (5)$$

式中,  $\rho$  为密度,  $m$  为质量,  $v$  为速度,  $\sigma^{\alpha\beta}$  为总应力张量,  $g^\alpha$  表示重力加速度,  $\Pi_{ij}$  为 Monaghan 在 1989 年提出的人工黏度<sup>[8]</sup>, 可以防止粒子相互接近时产生的非物理穿透, 其表达式如下:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha_\Pi \bar{c}_{ij} \phi_{ij} + \beta_\Pi \phi_{ij}^2}{\rho_{ij}} & (v_{ij} \cdot x_{ij} < 0) \\ 0 & (v_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0) \end{cases} . \quad (6)$$

根据弹塑性本构模型理论、D-P 屈服准则理论及关联性流动法则理论, SPH 形式的总应力张量可以表示为

$$\frac{d\sigma_i^{\alpha\beta}}{dt} = \sigma_i^{\alpha\beta} \omega_i^{\beta\gamma} + \sigma_i^{\gamma\beta} \omega_i^{\alpha\gamma} + 2G e_i^{\alpha\beta} + K \varepsilon_i^{\gamma\gamma} \delta^{\alpha\beta} - \lambda_i [3\alpha_\phi K \delta^{\alpha\beta} + G / \sqrt{J_2} S_i^{\alpha\beta}] . \quad (7)$$

式中  $\omega^{\alpha\beta}$  为 Jaumann 应力率;  $G$  为剪切模量;  $K$  为体积模量;  $\varepsilon_i^{\gamma\gamma}$  为主应变之和;  $\delta^{\alpha\beta}$  为狄克拉函数;  $S^{\alpha\beta}$  为偏应力张量;  $J_2$  为第二偏应力不变量;  $\lambda$  为塑性乘子, 当模型处于纯弹性状态时  $\lambda=0$ , 当发生塑性变形时  $\lambda>0$ , 在 SPH 形式下其表达式为

$$\lambda_i = \frac{3\alpha_\phi K \varepsilon_i^{\gamma\gamma} + (G / \sqrt{J_2}) S_i^{\alpha\beta} \varepsilon_i^{\alpha\beta}}{9\alpha_\phi^2 K + G} . \quad (8)$$

另外, 为方便后续研究滑坡失稳后的大变形问题, 本模型还加入了 Monaghan 提出的 XSPH 对速度场进行光滑, 从而消除由于粒子分布不均匀引起的曲率计算精度差及粒子非物理聚集<sup>[9]</sup>:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i - \eta \sum_j \frac{m_j}{\rho_{ij}} v_{ij} W_{ij} . \quad (9)$$

上述方程具体推导过程这里不再详述, 有兴趣的读者可以参考文献[5, 8]。

### 1.2 基于 SPH 方法的边坡稳定性分析程序

根据上文所述的基本方程及 SPH 方法的计算流程, 本文基于 Fortran 语言编制了用于边坡稳定性分析的 SPH 计算程序。其中, 质点搜索模块采用链表式搜索方法, 程序基本流程如图 1 所示。

## 2 强度折减法

### 2.1 基本概念

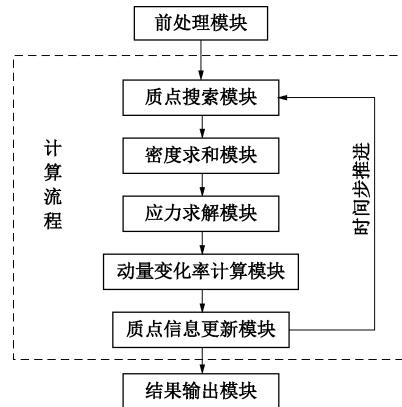


图 1 SPH 边坡稳定性程序流程

Fig. 1 Flow chart of SPH problem

强度折减法是边坡稳定性分析的重要方法之一,该方法通过不断的降低边坡岩土体抗剪强度参数黏聚力  $c$  和内摩擦角  $\varphi$ ,直至达到边坡的极限破坏状态为止,并将此时强度降低的折减系数  $F_s$  定义为边坡的稳定安全系数,强度折减系数可以如下表示<sup>[10]</sup>:

$$c' = \frac{c}{F_s}, \quad (10)$$

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{\tan \varphi}{F_s}\right), \quad (11)$$

式中,  $c$  表示材料的黏聚力,  $\varphi$  为材料的内摩擦角。

## 2.2 失稳判定准则

目前在诸如有限元、有限差分等方法的边坡稳定性分析中常用的失稳判据有以下 3 种:①以塑性区从坡脚到坡顶贯通为判据。然而塑性区贯通只能表示滑动面达到屈服状态,而土体并不一定发生整体破坏,即塑性区贯通是边坡失稳的必要条件,而非充分条件;②以特征点位移突变为判据。该方法选取边坡上某特定位置的点,通过观察其位移变化来判定边坡是否失稳。当土体产生破坏时特征点位移会产生突变时,该突变点的折减系数即为安全系数。该方法与土体破坏直接联系,在特征点选取合适的时候具有较高的准确性,但特征点位置的选取会受到一定人为因素影响,另外在动力作用下,由于位移随载荷时刻变化,不能凭某一时刻的位移变化作为失稳判据;③数值计算不收敛。在诸如有限元与有限差分的方法中,计算不收敛与边坡失稳同时发生,可以将不收敛时的折减系数作为安全系数,然而此判据没有明确的物理意义,且影响有限元计算不收敛的因素很多,还会受所采用的有限元程序、收敛容许值、迭代次数等会受人为影响,其安全系数也可能会有一定的误差,适用性较差。

虽然上述 3 种方法在有限元及有限差分中得到了广泛的应用,但作者在研究中发现很难将上述方法直接应用于基于 SPH 的强度折减法中作为失稳判据。首

先,由于 SPH 中不存在网格变形,很难定义 SPH 的非收敛解。其次,在 SPH 中位移随折减系数的变化规律相对平缓,没有出有限元法等方法中出现的位移突变,故准确的判定安全系数存在一定的困难。目前对基于 SPH 的强度折减法失稳判定准则的相关对比尚未见报道,本文将通过下面的案例从位移变化和塑性区发展两个角度进行探讨。

## 3 算例分析

本文以一个经典二维的匀质土坡为算例进行分析。该算例已被许多方法用于验证有限性,如极限平衡法(安全系数为 1)、有限元法(其安全系数当以位移不收敛为判据时为 0.99,以计算不收敛为判据时为 1.06)等<sup>[10]</sup>。模型总长度 20.0 m,总高度为 13.0 m,其中边坡高 10.0 m,坡底角度为 45°,材料参数:黏聚力  $c$  为 12.38 kPa,内摩擦角  $\varphi$  为 20°,重度  $\gamma$  为 20 kN/m<sup>3</sup>,弹性模量  $E$  为 100 MPa,泊松比  $\nu$  为 0.3。SPH 模型见图 2。

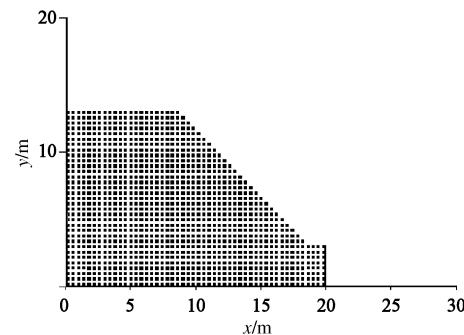


图 2 SPH 分析模型

Fig. 2 Analysis model of SPH

本次模型共 1590 个粒子,其中实粒子为 1250 个,虚粒子(边界粒子)采用 Monaghan (1994) 年提出的边界处理方法,时间积分方法为跳蛙法,时间步长选取为  $1 \times 10^{-4}$  s,光滑长度选取 1.2 倍的粒子初始间距。以平面应变莫尔-库仑匹配 D-P 准则(D-P3)为屈服准则,计算 10000 个时间步,下面从塑性区及位移突变两个方面进行讨论:

首先观察其不同安全系数下塑性区云图,见图 3~5。

如图 3~5 所示:塑性区随着安全系数的增大从底部往顶部平台延伸,并且在安全系数为 0.98 时贯通,按塑性区贯通判定准则,该边坡的安全系数即为 0.98。

其次观察其特征点位移随安全系数的变化情况,本文中特征点选取为斜坡的顶点位置,首先采用与有限元相似的方法,即折减系数随时间步的增加而变大,如图 6 所示。

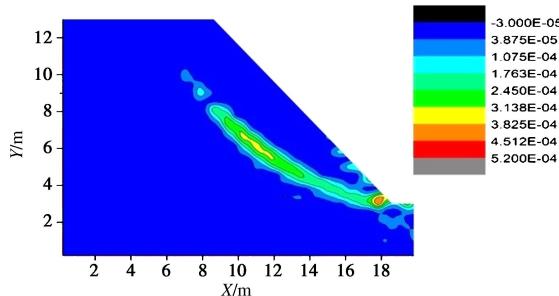
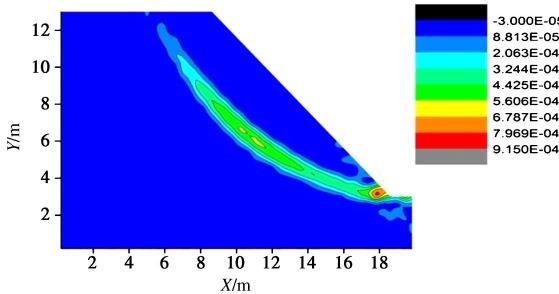
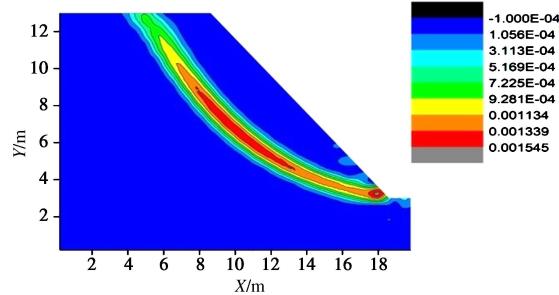
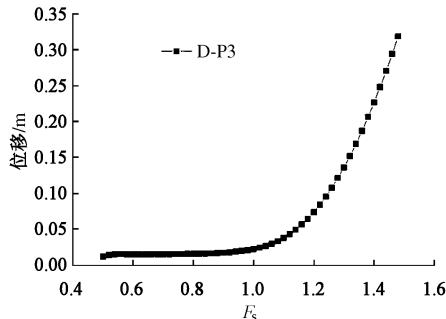
图 3  $F_s=0.96$  时塑性区分布Fig. 3 Distribution of plastic zone when  $F_s=0.96$ 图 4  $F_s=0.97$  时塑性区分布Fig. 4 Distribution of plastic zone when  $F_s=0.97$ 图 5  $F_s=0.98$  时塑性区分布Fig. 5 Distribution of plastic zone when  $F_s=0.98$ 

图 6 特定点位移随安全系数的变化曲线

Fig. 6 Curves of safety factor and displacement

如图 6 所示, 在折减系数较小时, 其位移变化非常平缓, 而当折减系数大于 1.0 后, 其位移变化速度逐渐增大并随折减系数的增大迅速上升, 可以看出其安全系数应在 1.0 附近, 但与有限元强度折减法的位移-折减系数曲线有明显的突变点不同, 基于 SPH 的强度折减法的位移-折减系数关系曲线相对比较平缓, 只能确定一个大体的趋势和范围, 难以准确地判定安全系数。

基于上述方法的缺陷, 本文提出一种新的方法,

即在上述计算的基础上, 再对每个安全系数进行逐个运算, 以折减系数为 0.95 为例, 观察其位移走势, 见图 7, 8。

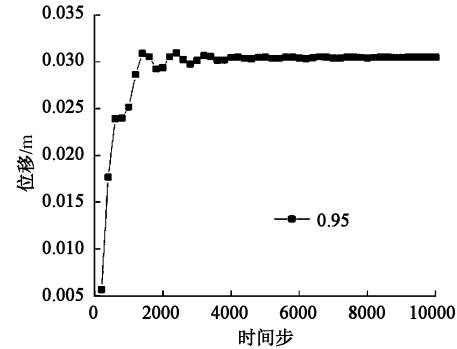


图 7 安全系数为 0.95 时位移随时间步变化

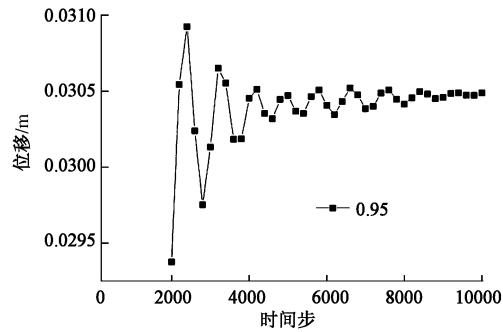
Fig. 7 Curves of displacement when  $F_s=0.95$ 

图 8 2000~10000 时间步位移变化

Fig. 8 Curves of displacement for time step from 2000 to 10000

如图 7 所示, 在计算开始阶段, 模型由于突然受重力作用产生弹性位移, 随后弹性变形在 0.03 m 左右震荡并逐渐减小, 对时间步从 2000~4000 步进行观察

(图 8) 可更清晰地看到特征点位移震荡情况, 可见在折减系数为 0.95 时其位移值最后会趋于稳定并逐步收敛, 属于安全状态。

同理, 将安全系数逐步放大, 观察其安全系数随时间步变化, 见图 9, 10。

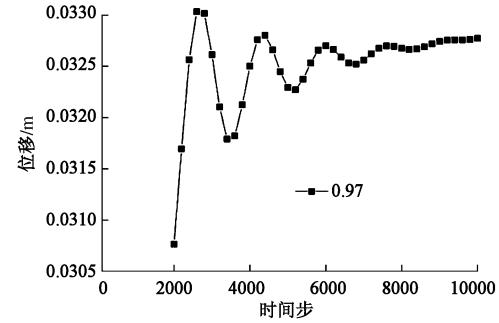


图 9 安全系数为 0.97 时位移随时间步变化

Fig. 9 Curves of displacement when  $F_s=0.97$ 

如图 9, 10 所示, 在折减系数为 0.97 时, 其位移变化仍处于稳定状态, 但当折减系数为 0.99 时, 其特征点的位移将不再稳定在某区域震荡, 而是随着时间步的增加逐渐增大, 属于非收敛或非稳定状态, 此时的折减系数即为所求安全系数, 即此例中安全系数为 0.99。

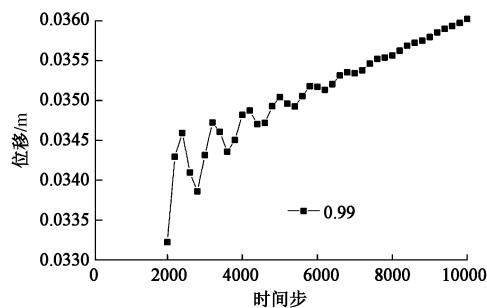


图 10 安全系数为 0.99 时位移随时间步变化

Fig. 10 Curves of displacement when  $F_s=0.99$ 

通过以上分析, 可见以塑性区贯通为失稳准则和以位移变化不稳定为判定准则所得的安全系数十分接近, 但方法各有优劣。对于以塑性区贯通为标准的失稳判据, 其优点是直观明了, 可以较准确地判定其贯通时的折减系数, 缺点是只是边坡失稳的必要条件而非充分条件, 故当塑性区贯通时边坡不一定会发生失稳。而对于以位移变化为标准的失稳判据又可分为两类: 一类是使安全系数随时间步增加而增加, 其优点是计算方便, 可以通过一次计算观察多个折减系数下位移的变化值, 缺点是由于没有突变点, 想要准确地判定安全系数有一定难度; 另一类是对每个安全系数单独计算, 观察其特征点位移随时间步的变化情况是否稳定或收敛于某一值, 其优点是可以较准确地判定失稳时的安全系数, 缺点是由于计算前并不知道安全系数范围, 所以需要进行多次计算才能确定安全系数。本文建议可以先采用第一类位移判定方法判断安全系数所在的大致范围, 再进行第二类位移判定方法计算准确的安全系数, 这样既可以减小计算量, 又可以得到准确值, 是一种较为可行的方法。

## 4 结语

本文采用一种新型的无网格方法——SPH 法对边坡进行了稳定性分析, 并通过一个典型案例讨论了基于 SPH 的强度折减法分析中不同失稳判据对安全系数的影响, 并指出了一种新的判定方法。研究结论表明, 在采用基于 SPH 的强度折减法对边坡进行稳定性分析时, 采用塑性区贯通准则及位移变化准则均能较准确的判定安全系数, 但是其各有优缺点。而当采用位移变化准则进行分析时, 采用“两步走”的方法即可以减小计算量, 又可以得到较准确的安全系数, 是一种值得推荐的方法。

通过文中的典型案例, 证明了本文的 SPH 方法可以较为准确地进行边坡稳定性分析, 而除了获取边坡的稳定性安全系数和滑移面之外, SPH 方法还可以对边坡失稳后的土体滑坡大变形情况进行模拟, 这是诸如极限平衡法及有限元、有限差分等基于网格法的方法难以实现的, 也是 SPH 相对于其他方法的优势, 而

对于失稳后土体滑动情况的验证, 将是本文下一步将要进行的工作。

## 参考文献:

- [1] 黄雨, 郝亮, 野々山宗人. SPH 方法在岩土工程中的研究应用进展[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(2): 256–262. (HUANG Yu, HAO Liang, NONOYAMA Hideo. The state of the art of SPH method applied in geotechnical engineering[J]. Chinese of Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(2): 256–262. (in Chinese))
- [2] MAEDA K, SAKAI M. Development of seepage failure analysis procedure of granular ground with Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method[J]. Journal of Applied Mechanics, JSCE, 2004(7): 775–786.
- [3] 黄雨, 郝亮, 谢攀, 等. 土体流动大变形的 SPH 数值模拟[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(10): 1520–1524. (HUANG Yu, HAO Liang, XIE Pan, et al. Numerical simulation of large deformation of soil flow based on SPH method[J]. Chinese of Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(10): 1520–1524. (in Chinese))
- [4] HUANG Yu, ZHANG Wei-jie, XU Qiang, et al. Run-out analysis of flow-like landslides triggered by the Ms 8.0 2008 Wenchuan earthquake using smoothed particle hydrodynamics[J]. Landslides, 2012, 9: 275–283.
- [5] BUI Ha H, FUKAGAWA R, SAKO K, et al. Lagrangian mesh-free particle method (sph) for large deformation and post-failure of geomaterial using elastic-plastic soil constitutive model[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2008, 32: 1537–1570.
- [6] BUI Ha H, FUKAGAWA R, SAKO K, et al. Slope stability analysis and discontinuous slope failure simulation by elasto-plastic smoothed particle hydrodynamics (SPH)[J]. Géotechnique, 2011, 61(7): 565–574.
- [7] NONOYAMA H, MORIGUCHI S, SAWADA K, et al. Slope stability analysis using smoothed particle hydrodynamics (SPH) method[J]. Solids and Foundations, 2015, 4: 458–470.
- [8] MONAGHAN J J. An introduction to SPH[J]. Computer Physics Communications, 1989, 48: 89–96.
- [9] MONAGHAN J J. Smooth particle hydrodynamics[J]. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 1992, 30: 543–574.
- [10] 费康, 张建伟. ABAQUS 在岩土工程中的应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2009: 394–402. (FEI Kang, ZHANG Jian-wei. Application of ABAQUS in geotechnical engineering[M]. Beijing: China Water Power Press, 2009: 394–402. (in Chinese))