

DOI: 10.11779/CJGE201605008

# 双层非均质地基中单桩受扭弹塑性分析

邹新军<sup>1</sup>, 赵灵杰<sup>1</sup>, 徐洞斌<sup>1,2</sup>, 赵明华<sup>1</sup>

(1. 湖南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410082; 2. 建发房地产集团有限公司, 福建 厦门 361008)

**摘要:** 为探讨双层非均质地基中单桩的受扭承载特性, 基于单层土体剪切模量呈幂函数分布的假定, 考虑桩-土接触面上极限摩阻力随深度非线性变化, 建立出桩顶扭矩作用下的桩身扭转控制方程, 进而导得桩顶及桩身的扭矩( $T$ )与扭转角( $\Phi$ )等解答, 并将其退化为单层非均质及双层均质地基后与已有成果进行了对比验证。同时, 桩顶  $T$ - $\Phi$  曲线参数分析结果表明: 增加桩体剪切模量  $G_p$  有利于控制桩顶扭转角; 桩径  $r_0$  增加一倍, 相同扭转角下桩顶能承受的扭矩值增大 4~6 倍; 随地面处土体剪切模量  $\mu_1$  和模量分布函数中非线性系数  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  的增加, 桩身受扭性能得到显著改善。此外, 桩顶扭转影响因子  $I_\phi$  的对比分析表明: 桩身在  $\zeta L < 0.2$  和  $\zeta L > 5.0$  时分别表现为刚性桩和柔性桩, 且后者传至桩底的扭矩极小而可忽略; 当  $\zeta L > 5$  且上下土层顶部剪切模量比  $\mu_1/\mu_2 > 1$  时, 0.2 倍桩长( $L$ )范围内的上部土层对桩身受扭性能影响较大; 当  $\zeta L > 10$  且  $\mu_1/\mu_2 < 1$  时, 桩身受扭能力主要源自  $0.4L$  的表层土。

**关键词:** 桩基础; 双层非均质地基; 扭矩荷载; 弹塑性分析

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2016)05-0828-09

**作者简介:** 邹新军(1975-), 男, 博士, 副教授, 主要从事桩基础及复合地基的理论与应用研究。E-mail: xjzouhd@hnu.edu.cn。

## Elastic-plastic torsional behavior of single pile in double-layered non-homogeneous subsoil

ZOU Xin-jun<sup>1</sup>, ZHAO Ling-jie<sup>1</sup>, XU Dong-bin<sup>1,2</sup>, ZHAO Ming-hua<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China; 2. C & D Realty Co., Ltd., Xiamen 361008, China)

**Abstract:** To discuss the torsional behavior of a single pile in double-layered non-homogeneous subsoil, assuming the shear modulus of each single layer as the power function distribution and considering a nonlinear variation of the limit friction resistance along the pile-soil interface, the governing differential equation for the pile shaft under torque is established. Then, the internal forces (torque  $T$ ) and deformations (torsion angle  $\Phi$ ) at the pile top and along the pile shaft are obtained respectively. By simplifying the solutions to single-layered non-homogeneous or double-layered homogeneous subsoil, good agreements are found between the calculated results and the available achievements. Besides, a parameter analysis of pile top  $T$ - $\Phi$  curve shows that increasing the shear modulus of pile shaft  $G_p$  helps to control the torsional angle at pile top. And a double value of pile radius  $r_0$  will result in an increase of 4~6 times the torsional resistance at pile top. Similarly, the performance of torsional piles can be improved by greater values of the nonlinear coefficients  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  and the surface modulus  $\mu_1$ . Besides, comparative analysis results of torsional influence factors at pile top  $I_\phi$  show that the pile shaft can be seen as a rigid body for  $\zeta L < 0.2$ , while a value of  $\zeta L > 5.0$  will cause a flexible pile with the torque transferred to the pile tip small enough to be ignored. Moreover, for a combined value of  $\zeta L > 5.0$  and shear modulus ratio of upper to lower layers  $\mu_1/\mu_2 > 1.0$ , the main contribution to torque resistance comes from the  $0.2L$  surface subsoil, while the  $0.4L$  surface soil layer will determine the torsional behavior of pile shaft for  $\zeta L > 10$  and  $\mu_1/\mu_2 < 1.0$ .

**Key words:** pile foundation; double-layered non-homogeneous subsoil; torsional load; elastic-plastic analysis

## 0 引言

桩基础因承载力高、沉降小等优点成为近海工程的一种主要基础形式, 如海上钻井平台或风力发电塔的基础。但由于这类工程的特殊受力环境, 桩身除作用有竖向力、水平力及弯矩外, 往往还承受不可忽视

的扭矩作用。若不考虑其影响, 工程设计会偏于不安全, 甚至导致灾难性后果。因此, 研究桩基特别是一般分层非均质地基中的桩基受扭性能, 具有重要的理

基金项目: 国家自然科学基金项目(51378197; 51578231)

收稿日期: 2015-04-21

论与工程实际意义。

国内外已开展了一些受扭桩的研究工作: Stoll<sup>[1]</sup>最早完成了两根大比例钢管桩(桩内回填混凝土)的受扭试验, 获得桩顶扭矩-扭转角曲线, 为后续研究奠定了基础。此后, 许多学者<sup>[2-6]</sup>分别基于极限平衡法、剪切位移法、离散单元法、有限元法等分析了均质、单层非均质及双层均质地基中的单桩受扭性状, 进一步揭示了桩基受扭特性。自21世纪以来, 国内外学者进一步加深了受扭桩研究: 刘云云等<sup>[7]</sup>通过室内小比例模型试验获得扭矩作用下嵌岩桩桩顶内力分布曲线; 陈胜立等<sup>[8-9]</sup>用矩阵传递法导得层状地基中单桩弹性承载变形解; Kong等<sup>[10]</sup>用离心机试验分析了单桩及群桩的扭矩响应; Zhang<sup>[11]</sup>基于桩侧土体剪切模量分层线性模型, 同时引入虚土桩理论由变分原理分别得到桩和土的扭转控制方程, 获得了桩身扭矩-扭转角、桩侧摩阻力和土体径向位移分布特性; 邹新军等<sup>[12]</sup>假定土体分层均质, 通过平衡方程获得桩身微段扭矩递推计算式, 进而获得桩顶及桩身的扭矩-扭转角变化与分布曲线; Basack等<sup>[13]</sup>采用边界元法分析了受扭桩的承载变形特性。

综上所述, 目前受扭桩的研究仍存在如下问题: ①对于常见的分层地基, 已有方法多难以考虑各层土体剪切模量的一般分布特性, 且仅限于弹性分析; ②考虑土体剪切模量一般分布的能量法解答, 计算涉及复杂迭代试算, 难以掌握; ③数值分析法虽可模拟地基的层状非均质特性, 但建模过程复杂, 计算费时, 难以推广应用。为此, 本文针对双层非均质地基中的单桩受扭问题, 假定各土层的剪切模量呈一般幂函数分布, 结合剪切位移法和平衡原理建立桩身扭转控制方程, 由此求解桩顶、桩身的扭矩与扭转角, 进而探讨桩身受扭性能的影响参数及其规律, 以期进一步了解单桩受扭性能, 为下一步多荷载耦合作用下的单桩及群桩受扭分析提供基础。

## 1 双层非均质地基模型及假定

如图1所示, 假定桩周双层非均质地基的剪切模量 $G(z)$ 呈如下幂函数分布:

$$G(z)=\begin{cases} \mu_1(1+m_1z)^{\alpha_1} & (0 \leq z \leq L_1) \\ \mu_2[1+m_2(z-L_1)]^{\alpha_2} & (z \geq L_1) \end{cases} \quad (1)$$

式中  $L_1$  为上层土厚度 (m);  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  分别为上、下土层顶部处的剪切模量 (kPa);  $m_1$ ,  $m_2$  及  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  分别为与上、下层土体剪切模量分布形态相关的系数, 其与  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  的取值均可由实测土体剪切模量值确定。

式(1)可模拟常见双层地基土, 具体可根据实际情况选择: 无实测资料时, 可用线性幂函数模拟 ( $\alpha_1=\alpha_2=1$ ), 即转化成广义 Gibson 地基<sup>[14]</sup>, 结合经验数据, 可换算获取各单层土参数取值范围如表1所示; 若有剪切模量实测值, 则可按幂函数 ( $\alpha_1>0$  或  $\alpha_2>0$ ) 拟合出相应参数。对于特殊的软基上硬层地基, 可用非线性幂函数 ( $\alpha_1<0$  或  $\alpha_2<0$ )<sup>[14]</sup> 模拟。

表1 单层土参数取值范围

Table 1 Parameter values for single soil layer

土类	$m_1 (m_2)/m$	$\mu_1 (\mu_2)/\text{MPa}$	$\mu_{11} (\mu_{12})/\text{kPa}$
粗砂		57.8~80.5	74~116
中砂		56.0~78.1	54~95
细砂	$0 \sim L$	39.4~60.7	48~88
粉砂		16.4~23.0	24~48
粉土		18.0~37.7	26~88
黏土		16.6~42.3	24~105

为获得塑性状态下双层非均质地基中受扭桩的桩顶扭矩与扭转角, 引入类似土体剪切模量分布模式模拟桩-土接触面上切向极限摩阻力  $\tau_f$  的分布:

$$\tau_f = \begin{cases} \mu_{11}(1+m_{11}z)^{\alpha_{11}} & (0 \leq z \leq L_1) \\ \mu_{12}[1+m_{12}(z-L_1)]^{\alpha_{12}} & (z \geq L_1) \end{cases} \quad (2)$$

式中 系数  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$  分别对应式(1)中的  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$ , 一般可取  $\alpha_{11}=\alpha_1$ ,  $\alpha_{12}=\alpha_2$ ;  $\mu_{11}$ ,  $m_{11}$  及  $\mu_{12}$ ,  $m_{12}$  也分别与式(1)中的  $\mu_1$ ,  $m_1$  及  $\mu_2$ ,  $m_2$  相对应。

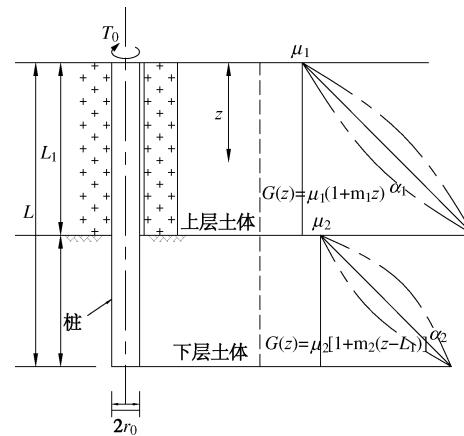


图1 双层非均质地基模型

Fig. 1 Double-layered non-homogeneous subsoil model

为简化问题, 同时为获得双层非均质地基中单桩受扭问题的解析解, 进一步做如下假定: ①仅考虑桩身的弹性受力状态, 且弹性阶段桩-土接触面上位移协调; ②桩侧土中塑性区随扭矩增加从地表往下逐渐开展(不考虑下部土层先出现塑性), 塑性区桩-土接触面上摩阻力达到相应深度处的极限值( $\tau_f$ ); ③桩侧土对桩的作用满足如下弹塑性模型:

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 & (\theta < \theta_u) \\ \tau_f & (\theta \geq \theta_u) \end{cases}, \quad (3)$$

式中,  $\tau$  为侧摩阻力 (MPa),  $\theta$  和  $\theta_u$  分别为桩侧土的扭转角和弹性极限扭转角 (rad),  $\tau_0$  为  $\theta < \theta_u$  时桩-土接触面上的剪应力 (MPa), 按式 (8) 取定;  $\tau_f$  按式 (2) 计算。

## 2 双层非均质地基中单桩扭转控制方程

Randolph<sup>[3]</sup> 基于剪切位移法导得纯受扭桩桩周土体的剪切应变  $\gamma_{r\theta}$  :

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G(z)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right). \quad (4)$$

式中  $u, v$  分别为桩周土径向和环向位移 (m);  $\theta, r$  分别为极坐标下的扭转角 (rad) 和极径 (m);  $\tau_{r\theta}$  为桩周土体的剪应力 (MPa)。

桩周土体径向上任意点  $r$  处的切应力为

$$\tau_{r\theta} = \tau_0 \frac{r_0^2}{r^2}, \quad (5)$$

式中,  $r_0$  为桩径 (m)。

因桩身受扭时桩周土体仅产生环向位移, 则由式 (4) 可导得桩周土体扭矩-扭转角控制方程为

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) = \frac{\tau_0 r_0^2}{G(z) r^2}, \quad (6)$$

由平衡条件可建立桩身的扭转控制方程为

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} = \frac{2\pi r_0^2 \tau_0}{(GJ)_p}, \quad (7)$$

式中,  $(GJ)_p$  和  $\Phi(z)$  分别为桩身扭转刚度 ( $\text{kN}\cdot\text{m}^2$ ) 和扭转角 (rad)。

## 3 双层非均质地基中单桩受扭弹塑性分析

考虑桩侧土处于弹性受力阶段时桩-土接触面上的位移协调, 则桩身扭转角等于接触面处土体的扭转角, 由此对式 (6) 进行积分 ( $r$  从  $r_0$  到无穷, 由式 (5) 得无穷远处  $\tau_{r\theta}=0$ ), 可得任意深度处的桩身扭转角与桩土接触面上的土体剪应力的关系:

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\tau_0 r_0^2}{G(z) r^3} dr = \frac{\tau_0}{2G(z)} = \theta(z) = \Phi(z). \quad (8)$$

联立式 (1)、(7) 及 (8) 可得桩身扭转控制方程:

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} = \frac{2\pi r_0^2 \tau_0}{(GJ)_p} = \frac{2\pi r_0^2}{(GJ)_p} \cdot 2G(z)\Phi(z). \quad (9)$$

### 3.1 桩身受扭弹性分析

双层非均质地基土中的桩身扭转控制方程为

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} = \begin{cases} \frac{4\pi r_0^2 \mu_1}{(GJ)_p} (1+m_1 z)^{\alpha_1} \Phi(z) & (0 \leq z \leq L_1) \\ \frac{4\pi r_0^2 \mu_2}{(GJ)_p} [1+m_2(z-L_1)]^{\alpha_2} \Phi(z) & (z \geq L_1) \end{cases}. \quad (10)$$

式 (10) 变换可得修正后的 Bessel 函数及其解:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \sqrt{1+m_1 z} [A_1 I_{v_1}(\eta_1) + B_1 K_{v_1}(\eta_1)] & (0 \leq z \leq L_1) \\ \sqrt{1+m_2(z-L_1)} [A_2 I_{v_2}(\eta_2) + B_2 K_{v_2}(\eta_2)] & (z \geq L_1) \end{cases}. \quad (11)$$

式中  $I_{v_1}(\cdot)$  和  $I_{v_2}(\cdot)$  为第一类修正 Bessel 函数;  $K_{v_1}(\cdot)$  和  $K_{v_2}(\cdot)$  为第二类修正 Bessel 函数;  $A_1, A_2, B_1$  及  $B_2$  均为待求系数; 变量  $\eta_1, \eta_2$  的值为

$$\begin{cases} \eta_1 = \left[ \frac{4\pi r_0^2}{(GJ)_p} \mu_1 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{m_1 \alpha_1 + 2} (1+m_1 z)^{\frac{\alpha_1+2}{2}}, \\ \eta_2 = \left[ \frac{4\pi r_0^2}{(GJ)_p} \mu_2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{m_2 \alpha_2 + 2} [1+m_2(z-L_1)]^{\frac{\alpha_2+2}{2}}. \end{cases} \quad (12)$$

将式 (11) 对  $z$  求导可得

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \begin{cases} \left[ \frac{4\pi r_0^2}{(GJ)_p} \mu_1 \right]^{\frac{1}{2}} (1+m_1 z)^{\frac{\alpha_1+1}{2}}. \\ \left[ A_1 I_{v_1-1}(\eta_1) - B_1 K_{v_1-1}(\eta_1) \right] & (0 \leq z \leq L_1) \\ \left[ \frac{4\pi r_0^2}{(GJ)_p} \mu_2 \right]^{\frac{1}{2}} [1+m_2(z-L_1)]^{\frac{\alpha_2+1}{2}}. \\ \left[ A_2 I_{v_2-1}(\eta_2) - B_2 K_{v_2-1}(\eta_2) \right] & (z \geq L_1) \end{cases}. \quad (13)$$

为求解各系数, 引入边界及桩身连续性条件:

$$\begin{cases} \Phi_b = \frac{3}{16} \frac{T_b}{G_b r_0^3}, \\ \left( \frac{d\Phi(z)}{dz} \right)_{z=0} = -\frac{T_0}{(GJ)_p}, \\ \left( \frac{d\Phi(z)}{dz} \right)_{z=L} = -\frac{T_b}{(GJ)_p} = -\frac{16}{3} \frac{G_b r_0^3}{(GJ)_p} \Phi_b, \\ \Phi_1(L_1) = \Phi_2(L_1), \\ \left( \frac{d\Phi_1(z)}{dz} \right)_{z=L_1} = \left( \frac{d\Phi_2(z)}{dz} \right)_{z=L_1}. \end{cases}, \quad (14)$$

式中  $\Phi_b$  和  $T_b$  分别为桩底扭转角 (rad) 和扭矩 ( $\text{kN}\cdot\text{m}$ );  $T_0$  为桩顶扭矩 ( $\text{kN}\cdot\text{m}$ );  $G_b$  为桩底处土的剪切模量;  $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$  取自式 (11) 所对应的  $\Phi(z)$ 。

联立式 (11)、(13)、(14), 并令

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{\left( \frac{4\pi r_0^2}{(GJ)_p} \mu_1 \right)^{\frac{1}{2}} (1+m_1 L_1)^{\frac{\alpha_1}{2}}}, \\ \chi_2 &= \frac{1}{\left( \frac{4\pi r_0^2}{(GJ)_p} \mu_2 \right)^{\frac{1}{2}} [1+m_2(L-L_1)]^{\frac{\alpha_2}{2}}}, \\ D_1 &= I_{v_1}(\eta_{1L_1})K_{v_1-1}(\eta_{1L_1}) + I_{v_1-1}(\eta_{1L_1})K_{v_1}(\eta_{1L_1}), \\ D_2 &= I_{v_2}(\eta_{2b})K_{v_2-1}(\eta_{2b}) + I_{v_2-1}(\eta_{2b})K_{v_2}(\eta_{2b}). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

可得系数  $A_1, A_2, B_1, B_2$  的计算式为

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{D_1 \sqrt{1+m_1 L_1}} [\Phi_2(L_1)K_{v_1-1}(\eta_{1L_1}) - \chi_1 T_2(L_1)K_{v_1}(\eta_{1L_1})], \\ B_1 &= \frac{1}{D_1 \sqrt{1+m_1 L_1}} [\Phi_2(L_1)I_{v_1-1}(\eta_{1L_1}) + \chi_1 T_2(L_1)I_{v_1}(\eta_{1L_1})], \\ A_2 &= \frac{1}{D_2 \sqrt{1+m_2(L-L_1)}} [\Phi_b K_{v_2-1}(\eta_{2b}) - \chi_2 T_b K_{v_2}(\eta_{2b})], \\ B_2 &= \frac{1}{D_2 \sqrt{1+m_2(L-L_1)}} [\Phi_b I_{v_2-1}(\eta_{2b}) + \chi_2 T_b I_{v_2}(\eta_{2b})]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

根据式 (13) 可求得桩身扭矩为

$$T(z) = \left\{ \begin{aligned} & -\left( GJ \right)_p \left[ \frac{4\pi r_0^2}{(GJ)_p} \mu_1 \right]^{\frac{1}{2}} (1+m_1 z)^{\frac{\alpha_1+1}{2}}. \\ & \left[ A_1 I_{v_1-1}(\eta_1) - B_1 K_{v_1-1}(\eta_1) \right] \quad (0 \leq z \leq L_1) \\ & -\left( GJ \right)_p \left[ \frac{4\pi r_0^2}{(GJ)_p} \mu_2 \right]^{\frac{1}{2}} [1+m_2(z-L_1)]^{\frac{\alpha_2+1}{2}}. \\ & \left[ A_2 I_{v_2-1}(\eta_2) - B_2 K_{v_2-1}(\eta_2) \right] \quad (L_1 \leq z \leq L) \end{aligned} \right. \quad (17)$$

而任意深度  $z$  处桩身扭矩与扭转角的比值为

$$\frac{T(z)}{\Phi(z)} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\chi_1 (1+m_1 L_1)^{\frac{\alpha_1}{2}}} \cdot \\ & \frac{-[A_1 I_{v_1-1}(\eta_1) - B_1 K_{v_1-1}(\eta_1)]}{A_1 I_{v_1}(\eta_1) + B_1 K_{v_1}(\eta_1)} \quad (0 \leq z \leq L_1) \\ & \frac{1}{\chi_2 [1+m_2(L-L_1)]^{\frac{\alpha_2}{2}}} \cdot \\ & \frac{-[A_2 I_{v_2-1}(\eta_2) - B_2 K_{v_2-1}(\eta_2)]}{A_2 I_{v_2}(\eta_2) + B_2 K_{v_2}(\eta_2)} \quad (L_1 \leq z \leq L) \end{aligned} \right. \quad (18)$$

### 3.2 桩身受扭塑性分析

随桩顶扭矩  $T_0$  增加, 桩-土接触面从地面开始逐渐产生滑移和出现塑性区, 塑性区内接触面上摩阻力

达极限值。假设塑性区深度为  $L_s$  (如图 2), 即该范围内侧摩阻力达  $\tau_f$ ,  $L_s$  至桩底区域内仍处于弹性状态。令  $\lambda=L_s/L$ ,  $L_s$  处桩身扭矩和扭转角分别记为  $T_e$  和  $\Phi_e$ , 则弹性区域可直接采用已导得的弹性解。

对式 (6) 积分可得到  $L_s$  处桩身扭转角  $\Phi_e$ :

当  $0 \leq \lambda L \leq L_1$ , 即塑性区开展至上层地基时,

$$\Phi_e = \frac{\mu_{1l}(1+m_{1l}\lambda L)^{\alpha_{1l}}}{2\mu_1(1+m_1\lambda L)^{\alpha_1}} ; \quad (19)$$

当  $L_1 \leq \lambda L \leq L$ , 即塑性区开展至下层地基时,

$$\Phi_e = \frac{\mu_{2l}[1+m_{2l}(\lambda L-L_1)]^{\alpha_{2l}}}{2\mu_2[1+m_2(\lambda L-L_1)]^{\alpha_2}} . \quad (20)$$

而  $L_s$  处对应的桩身扭矩  $T_e$  可由式 (18) 确定为

$$T_e = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\chi_1 (1+m_1 L_1)^{\frac{\alpha_1}{2}}} \cdot \frac{\mu_{1l}(1+m_{1l}\lambda L)^{\alpha_{1l}}}{2\mu_1(1+m_1\lambda L)^{\alpha_1}} \cdot \\ & \frac{-[A_1 I_{v_1-1}(\eta_{1\lambda L}) - B_1 K_{v_1-1}(\eta_{1\lambda L})]}{A_1 I_{v_1}(\eta_{1\lambda L}) + B_1 K_{v_1}(\eta_{1\lambda L})} \quad (0 \leq \lambda L \leq L_1) \\ & \frac{1}{\chi_2 [1+m_2(L-L_1)]^{\frac{\alpha_2}{2}}} \cdot \frac{\mu_{2l}[1+m_{2l}(\lambda L-L_1)]^{\alpha_{2l}}}{2\mu_2[1+m_2(\lambda L-L_1)]^{\alpha_2}} \cdot \\ & \frac{-[A_2 I_{v_2-1}(\eta_{2\lambda L}) - B_2 K_{v_2-1}(\eta_{2\lambda L})]}{A_2 I_{v_2}(\eta_{2\lambda L}) + B_2 K_{v_2}(\eta_{2\lambda L})} \quad (L_1 \leq \lambda L \leq L) \end{aligned} \right. . \quad (21)$$

桩顶的扭矩荷载可为弹性解答  $T_e$  与塑性段  $L_s$  范围内解答两部分组成:

$$T_t = T_e + \int_0^{L_s} 2\pi r_0^2 \tau_f dz = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\chi_1 (1+m_1 L_1)^{\frac{\alpha_1}{2}}} \cdot \frac{-[A_1 I_{v_1-1}(\eta_{1\lambda L}) - B_1 K_{v_1-1}(\eta_{1\lambda L})]}{A_1 I_{v_1}(\eta_{1\lambda L}) + B_1 K_{v_1}(\eta_{1\lambda L})} \cdot \\ & \frac{\mu_{1l}(1+m_{1l}\lambda L)^{\alpha_{1l}}}{2\mu_1(1+m_1\lambda L)^{\alpha_1}} + \frac{2\pi r_0^2 \mu_{1l}}{(\alpha_{1l}+1)m_{1l}} \cdot \\ & \left[ (1+m_{1l}\lambda L)^{\alpha_{1l}+1} - 1 \right] \quad (0 \leq \lambda L \leq L_1) \\ & \frac{1}{\chi_2 [1+m_2(L-L_1)]^{\frac{\alpha_2}{2}}} \cdot \frac{\mu_{2l}[1+m_{2l}(\lambda L-L_1)]^{\alpha_{2l}}}{2\mu_2[1+m_2(\lambda L-L_1)]^{\alpha_2}} \cdot \\ & \frac{-[A_2 I_{v_2-1}(\eta_{2\lambda L}) - B_2 K_{v_2-1}(\eta_{2\lambda L})]}{A_2 I_{v_2}(\eta_{2\lambda L}) + B_2 K_{v_2}(\eta_{2\lambda L})} + \\ & \frac{2\pi r_0^2 \mu_{2l}}{(\alpha_{2l}+1)m_{2l}} \left[ (1+m_{2l}\lambda L)^{\alpha_{2l}+1} - 1 \right] + \\ & \frac{2\pi r_0^2 \mu_{2l}}{(\alpha_{2l}+1)m_{2l}} \left\{ [1+m_{2l}(\lambda L-L_1)]^{\alpha_{2l}+1} - 1 \right\} \quad (L_1 \leq \lambda L \leq L) \end{aligned} \right. . \quad (22)$$

同理, 桩顶扭转角可表示为

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu_{11}(1+m_{11}\lambda L)^{\alpha_{11}}}{2\mu_1(1+m_1\lambda L)^{\alpha_1}} + \\
 & \frac{T_1\lambda L - \frac{2\pi r_0^2 \mu_{11}}{(\alpha_{11}+1)m_{11}} \left[ \frac{(1+m_{11}\lambda L)^{\alpha_{11}+2}-1}{(\alpha_{11}+2)m_{11}} - \lambda L \right]}{(GJ)_p} \\
 & (0 \leq \lambda L \leq L_1) \\
 & \frac{\mu_{12}[1+m_{12}(\lambda L - L_1)]^{\alpha_{12}}}{2\mu_2[1+m_2(\lambda L - L_1)]^{\alpha_2}} + \\
 & \frac{T_1 L_1 - \frac{2\pi r_0^2 \mu_{11}}{(\alpha_{11}+1)m_{11}} \left[ \frac{(1+m_{11}L_1)^{\alpha_{11}+2}-1}{(\alpha_{11}+2)m_{11}} - L_1 \right]}{(GJ)_p} \\
 & \Phi_{11} = \dots \\
 & \frac{\left\{ T_1 - \frac{2\pi r_0^2 \mu_{11}}{(\alpha_{11}+1)m_{11}} \left[ (1+m_{11}L_1)^{\alpha_{11}+1} - 1 \right] \right\} (L_s - L_1)}{(GJ)_p} \\
 & \frac{2\pi r_0^2 \mu_{12}}{(\alpha_{12}+1)m_{12}} \left\{ \frac{[1+m_{12}(\lambda L - L_1)]^{\alpha_{12}+2}-1}{(\alpha_{12}+2)m_{12}} - (L_s - L_1) \right\} \\
 & (GJ)_p \\
 & (L_1 \leq \lambda L \leq L) \quad (23)
 \end{aligned}$$

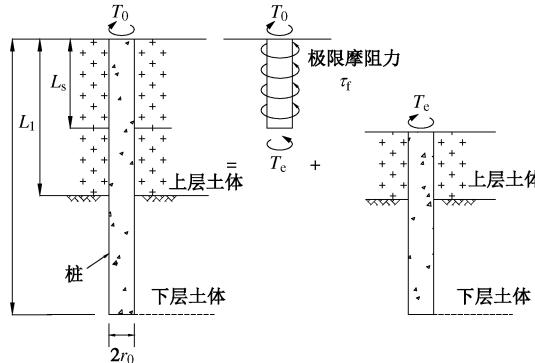


图 2 受扭桩弹塑性分析模型

Fig. 2 Elastic-plastic torsional analysis model of single pile

## 4 方法对比及验证

为验证本文方法, 将本文解答退化为单层非均质及双层均质地基后与已有成果进行对比验证。

### 4.1 单层非均质地基对比分析

文献[6]基于式(1)模式给出了单层非均质地基中单桩受扭的弹性解, 并分析了系数 $\alpha_1$ 的影响。取该文算例进行对比分析, 具体参数为 $r_0=0.85$  m,  $L/r_0=10$ ,  $(GJ)_p=1.6 \times 10^8$  N·m $^2$ ;  $m_1=0.2$  m $^{-1}$ , 地面处 $G_p/\mu_1=500$ ,  $\alpha_1$ 分别取0, 0.5, 2.0;  $T_0=30$  kN·m。然后, 基于前文解答用 MATLAB 编制了计算程序, 并将结果与文献[6]对比如表2, 其表明: 本文解答与文[6]结果吻合较好, 最大相对误差 $R$ 为8.11%, 说明本文方法可简化为单

层非均质地基的分析。

表 2 单层非均质地基中受扭桩对比验证

Table 2 Comparison of torsional responses of single pile in single-layered non-homogeneous subsoil

$\alpha_1$	$z/L$	$\Phi(z)\mu_1 r_0^3/T_0$			$T/(kN\cdot m)$			
		文献[6]	本文	$R/\%$	文献[6]	本文	$R/\%$	
0	0.0112	0.0112	0.24	30.0000	30.0000	0.00		
0	0.5	0.0070	0.0072	2.60	12.9260	12.8151	0.85	
1.0	0.0056	0.0057	3.34	0.9646	0.9293	3.65		
0	0.0096	0.0100	3.63	30.0000	30.0000	0.00		
0.5	0.0051	0.0053	4.63	13.4295	13.6209	-1.42		
1.0	0.0035	0.0037	5.59	1.0288	1.0303	-0.14		
0	0.0068	0.0071	3.93	30.0000	30.0000	0.00		
2.0	0.5	0.0020	0.0022	5.84	14.3730	14.1090	1.83	
1.0	0.0006	0.0006	8.11	0.9646	1.0265	-6.42		

### 4.2 双层均质地基对比分析

文献[4]采用有限元法和离散元法给出了双层均质地基中单桩受扭弹性解, 其参数取值:  $r_0=0.5$  m,  $L=25$  m,  $G_p=8$  GPa;  $\mu_2=8$  MPa,  $\mu_1/\mu_2$  取为4, 2, 0.5, 0.25; 上层土厚 $L_s \in (0, L)$ 。

图3给出的双层均质地基中受扭桩不同方法计算结果( $k=T_0/\Phi \mu_2 r_0^3$ )表明: 上、下土层顶部处的剪切模量比 $\mu_1/\mu_2$  及厚度比均对桩身抗扭性能影响较大, 本文结果与Chow<sup>[4]</sup>及Zhang<sup>[11]</sup>的结果一致性较好, 但本文可用于计算双层非均质地基。

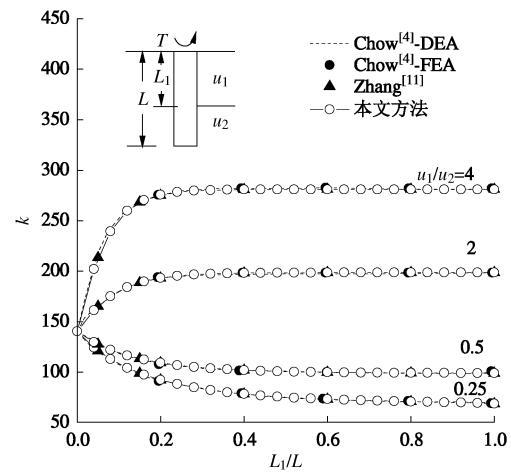


图 3 双层均质地基中桩身受扭对比分析

Fig. 3 Comparative analysis of torsional behaviors of single pile in double-layered homogeneous subsoil

## 5 参数分析

### 5.1 桩顶 $T$ - $\Phi$ 曲线分析

由上述解答及结果可知, 桩身受扭性能影响参数

有  $G_p$ ,  $r_0$  及与土层剪切模量分布形态相关的系数等。下面主要探讨  $G_p$ ,  $r_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  及  $\mu_1/\mu_2$  对桩顶  $T-\Phi$  曲线的影响规律。

### (1) 桩体剪切模量 $G_p$ 的影响

结合工程实际, 取  $G_p=8\sim 16$  GPa 进行对比分析, 其余参数:  $L=30$  m,  $r_0=0.5$  m,  $L_1=15$  m,  $\mu_1=16.6$  MPa,  $\mu_2=18.0$  MPa,  $m_2=m_1=1.0$  m<sup>-1</sup>,  $\mu_{11}=24$  kPa,  $\mu_{12}=26$  kPa,  $m_{11}=1.0$  m<sup>-1</sup>,  $m_{12}=1.0$  m<sup>-1</sup>,  $\alpha_1=\alpha_2=1$ ,  $\alpha_{11}=\alpha_{12}=1$ 。

图 4 中给出的  $G_p$  影响曲线表明: 桩顶扭矩 (小于极限扭矩) 不变时, 其扭转角随  $G_p$  增加而减小。应用时, 如以弹性极限扭矩对应的扭转角为其允许值 (下同), 由式 (19) 可知, 该允许值可取 0.00072 rad。

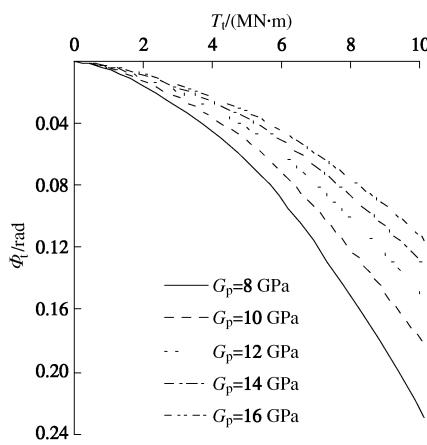


图 4  $G_p$  对桩顶  $T-\Phi$  曲线的影响曲线

Fig. 4 Influence of  $G_p$  on  $T-\Phi$  curves at pile top

### (2) 桩径 $r_0$ 的影响

为探讨  $r_0$  对桩顶  $T-\Phi$  曲线的影响, 取  $r_0=0.5\sim 1.5$  m 进行对比分析,  $G_p=8$  GPa, 其余参数同上。

图 5 中不同  $r_0$  值下的桩顶  $T-\Phi$  曲线表明:  $T$  一定时, 桩顶扭转角随  $r_0$  增加而显著减小;  $r_0$  增加一倍, 相同扭转角下桩顶能承受的扭矩值增加 4~6 倍, 故工程中可适当增加桩径来提高桩身抗扭能力, 且桩顶扭转角可控制在 0.00072 rad 以内。

### (3) $\alpha_1$ , $\alpha_2$ 的影响

为探讨土体剪切模量分布函数中各系数的影响,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  及  $m_{11}$  按表 3 取值,  $\alpha_1=\alpha_{11}$ ,  $\alpha_2=\alpha_{12}$ , 其余参数与本节第 (1) 部分相同。

由此获得不同  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  值对应的桩顶  $T-\Phi$  曲线如图 6 所示, 表明两层土体顶部剪切模量相同时, 增大  $\alpha_1$  有利于控制桩顶扭转角, 而  $\alpha_2$  的增大可提高桩顶极限扭矩值, 这是因为  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  的取值不仅影响剪切模量分布曲线的凹凸性, 且直接决定其大小, 但对桩顶弹性极限扭转角 (0.00072 rad) 影响不大。

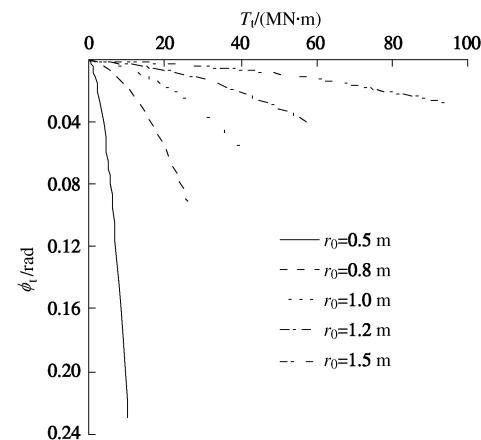


图 5  $r_0$  对桩顶  $T-\Phi$  曲线的影响曲线

Fig. 5 Influence of  $r_0$  on  $T-\Phi$  curves at pile top

表 3 参数  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  和  $m_{11}$  的取值

Table 3 Values of  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  and  $m_{11}$

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$m_{11}$
-0.5	-0.5	1.0020
0.0	-0.5	-0.0667
1.0	-0.5	0.9990
-0.5	0.0	1.0020
0.0	0.0	-0.0667
1.0	0.0	0.9990
-0.5	1.0	1.0020
0.0	1.0	-0.0667
1.0	1.0	0.9990

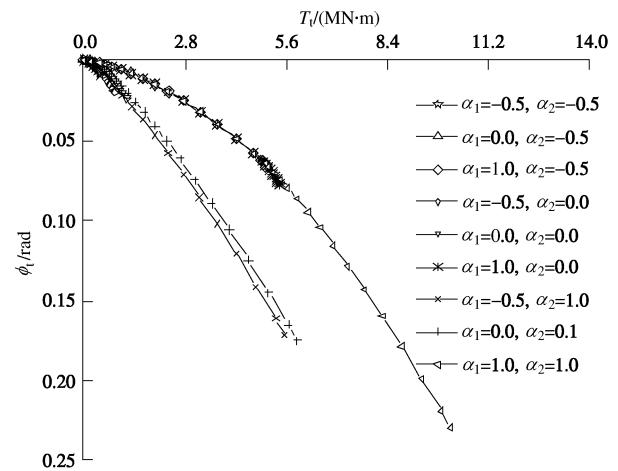


图 6  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  对桩顶  $T-\Phi$  曲线的影响

Fig. 6 Influence of parameters  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  on  $T-\Phi$  curves at pile top

### (4) $\mu_1/\mu_2$ 的影响

为探讨上、下土层顶部处剪切模量比  $\mu_1/\mu_2$  的影响, 仍保持其他参数与本节第 (1) 部分相同,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{12}$ ,  $m_{11}$  可按表 4 取值。

由此获得不同  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  值下的桩顶  $T-\Phi$  曲线, 图 7 结果表明:  $T$  和  $\mu_2$  一定时, 桩顶扭转角随  $\mu_1/\mu_2$  增

加而减小, 故提高地面处土体剪切模量  $\mu_1$  有利于改善桩身受扭性能, 相应的桩顶扭转角控制值范围为 0.00063~0.00107 rad。

表 4 参数  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_{t1}$ ,  $\mu_{t2}$ ,  $m_{t1}$  的取值

Table 4 Values of  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_{t1}$ ,  $\mu_{t2}$  and  $m_{t1}$

$\mu_1$ /MPa	$\mu_2$ /MPa	$\mu_1 / \mu_2$	$\mu_{t1}$ /kPa	$\mu_{t2}$ /kPa	$m_{t1}$ /( $\text{m}^{-1}$ )
20	60	1/3	35	88	0.8273
30	60	1/2	64	88	0.6667
40	60	2/3	50	88	1.1849
60	60	1	86	88	1.0248
80	60	4/3	115	88	1.0216

## 5.2 桩顶扭转影响因子 $I_\phi$ 分析

Randolph<sup>[3]</sup>、Chow<sup>[4]</sup>在分析受扭桩时, 均引入桩顶扭转影响因子  $I_\phi$  反映桩顶的扭转响应:

$$\Phi_t = \frac{T_t L}{(GJ)_p} I_\phi \quad (24)$$

图 8 给出了不同  $L_1/L$  值对  $I_\phi$  的影响曲线。图中参数取值为  $r_0=0.5$  m,  $G_p=8$  GPa,  $m_2=m_1=1.0$   $\text{m}^{-1}$ ,

$$\zeta = \sqrt{\frac{4\pi r_0^2}{(GJ)_p}} \mu_1, \quad \zeta L \text{ 为无量纲数。}$$

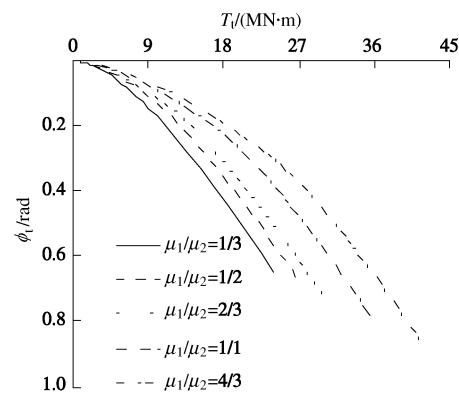
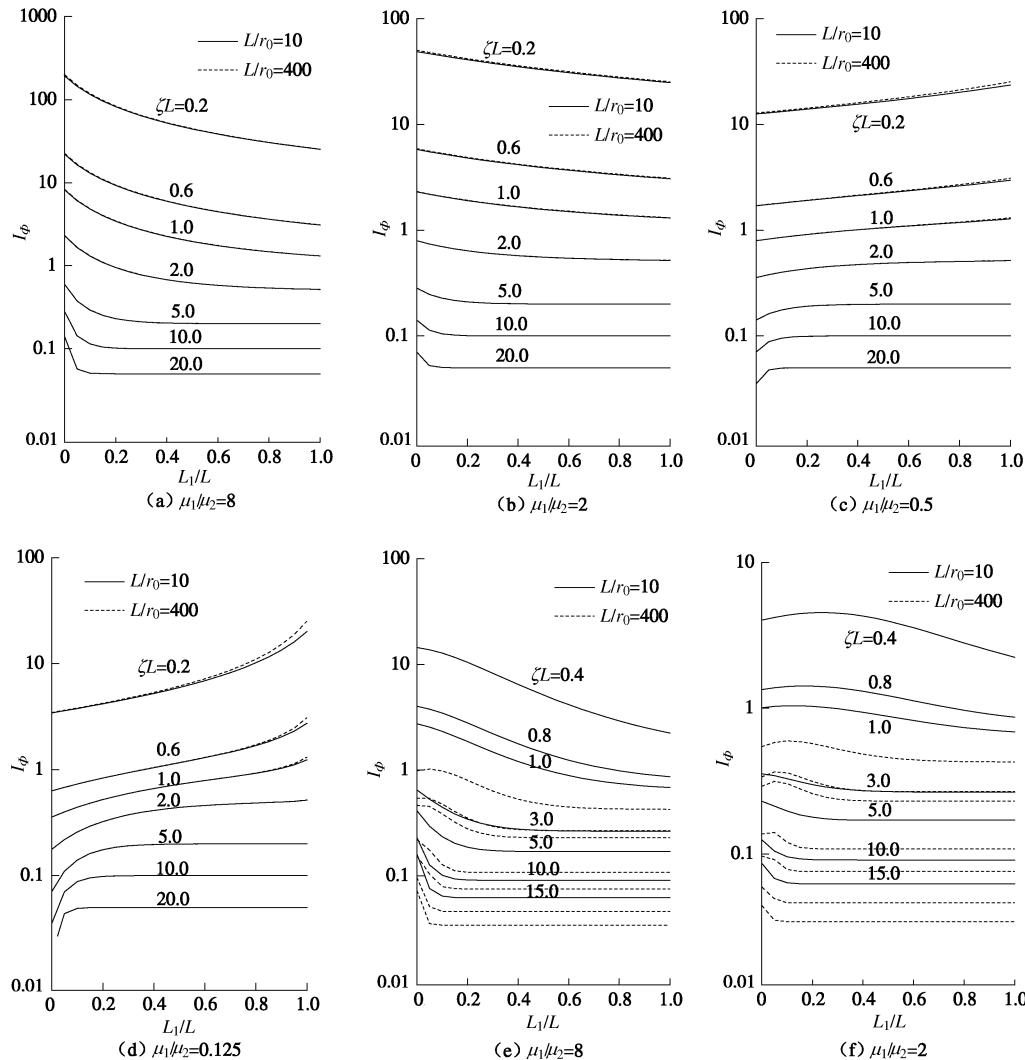


图 7  $\mu_1 / \mu_2$  对桩顶  $T$ - $\Phi$  曲线的影响曲线

Fig. 7 Influence of  $\mu_1 / \mu_2$  on  $T$ - $\Phi$  curves at pile top

图 8 (a)~(d) 表明: 双层均质地基 ( $\alpha_1=\alpha_2=0$ ) 中不同  $L_1/L$  值下  $I_\phi$  的变化规律与文献[3]及[15]结果较为一致, 且桩身在  $\zeta L < 0.2$  时可视为刚性桩, 而  $\zeta L > 5.0$  时则表现为柔性, 传至桩底扭矩极小而可忽略; 当  $\zeta L > 5.0$  且  $\mu_1 / \mu_2 > 1.0$  时, 0.2 倍桩长 (0.2L) 范围内的表层土对桩身受扭性能影响较大; 当  $\zeta L > 10.0$  且  $\mu_1 / \mu_2 < 1.0$  时, 桩身受扭能力主要源自 0.4L 的上部土层, 故工程中应控制桩侧地表土层质量。



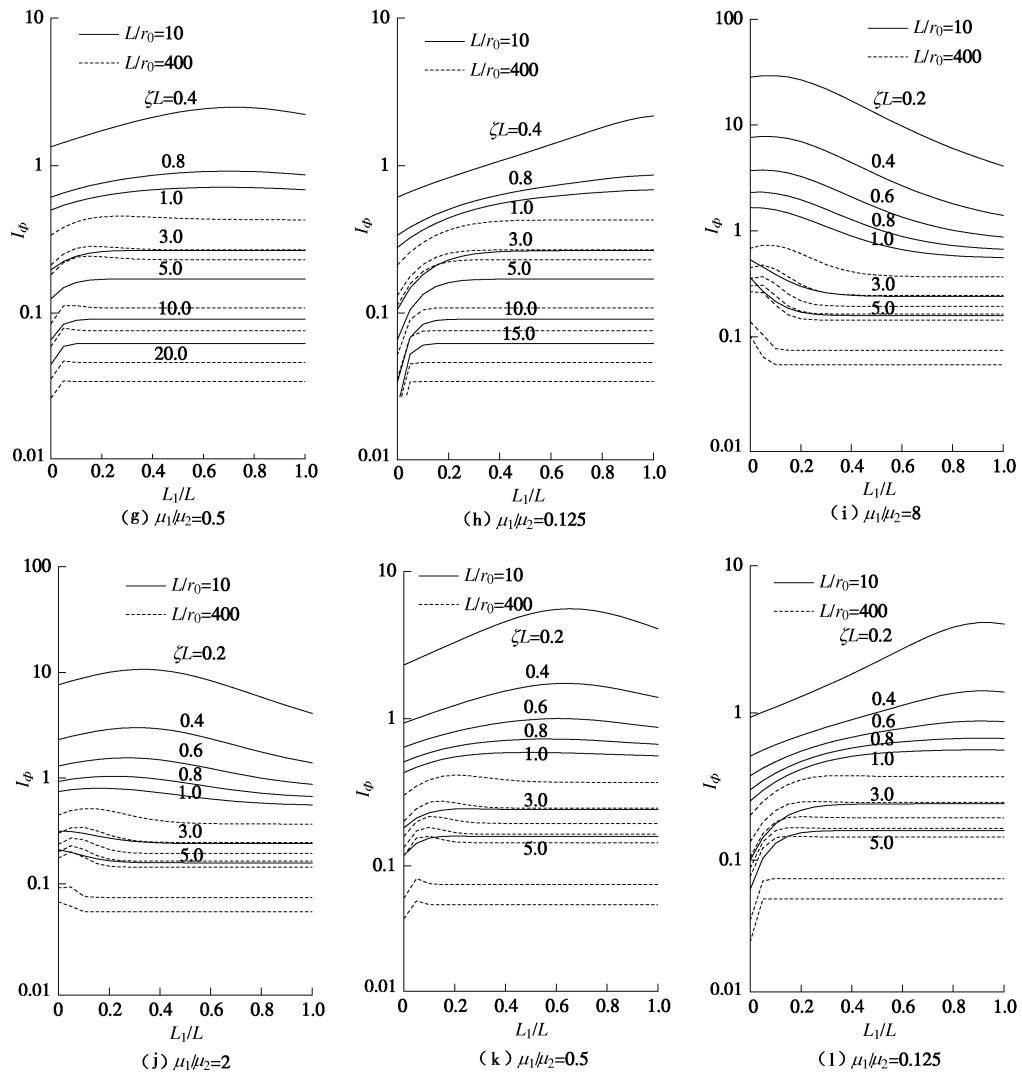
图 8 桩顶扭转影响因子  $I_\phi$  变化曲线Fig. 8 Curves of torsional influence factors  $I_\phi$  at pile top

图 8 (e) ~ (h) 与 (i) ~ (l) 分别为双层广义 Gibson 地基 ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ )、双层一般分布地基 ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$ ) 中  $L_1/L$  对桩顶扭转影响因子  $I_\phi$  的影响曲线, 其规律相似于双层均质地基, 唯一不同的是长径比  $L/r_0$  对  $I_\phi$  影响较大, 其主要原因在于:  $L$  一定时,  $L/r_0$  较小, 桩-土接触面积大幅增加, 且剪切模量与深度相关, 故大大提高了土体对桩身扭转变形的约束作用。

## 6 结 论

假定单层土体剪切模量呈幂函数分布, 考虑桩-土接触面上极限摩阻力随深度非线性变化, 探讨了双层非均质地基中单桩的受扭问题, 得到以下 3 点结论。

(1) 采用修正 Bessel 函数求解获得了桩顶及桩身的扭矩  $T$  及扭转角  $\Phi$  解答, 并将其退化为单层非均质地基及双层均质地基相应解答后与已有成果进行了对比分析, 验证了本文方法的可行性, 但本文解答可

模拟一般分层地基。

(2) 桩顶  $T - \Phi$  曲线参数分析表明: 增大桩体剪切模量  $G_p$  有利于控制桩顶扭转角; 相同扭转角下桩径  $r_0$  增加一倍时桩顶能承受的扭矩增大 4~6 倍; 随地面上土体剪切模量  $\mu_1$  及模量分布函数中系数  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  的增加, 桩身受扭性能也可显著改善。此外, 基于地基基础按变形控制设计的思想及本文的模型与假定, 如以弹性极限 (地基中不出现塑性区) 控制桩顶扭转角, 其允许值建议不大于 0.001 rad。

(3) 桩顶扭转影响因子  $I_\phi$  对比分析表明: 桩身在  $\zeta L < 0.2$  和  $\zeta L > 5.0$  时可分别视为刚性桩和柔性桩, 且后者传至桩底扭矩极小而可忽略; 当  $\zeta L > 5.0$  且上、下土层顶部剪切模量比  $\mu_1 / \mu_2 > 1.0$  时, 0.2 倍桩长 ( $0.2L$ ) 范围内的表层土对桩身受扭性能影响较大; 当  $\zeta L > 10.0$  且  $\mu_1 / \mu_2 < 1.0$  时, 桩身受扭能力则主要源自  $0.4L$  的上部土层, 故工程中应控制桩侧地表土层质量, 以提高桩身抗扭能力。

诚然, 本文解答暂仅针对简化的双层非均质地基中的单桩纯受扭问题, 对于更为复杂的地质情况及多荷载共同作用下的单桩及群桩受扭分析, 有待进一步的理论与试验研究。

### 参考文献:

- [1] STOLL U W. Torque shear test of cylindrical friction piles[J]. *Civil Engineering*, 1972, **42**(4): 63 - 65.
- [2] POULOS H G. Torsional response of piles[J]. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 1975, **101**(10): 1019 - 1035.
- [3] RANDOLPH M F. Piles subjected to torsion[J]. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 1981, **107**(8): 1095 - 1111.
- [4] CHOW Y K. Torsional response of piles in non-homogeneous soil[J]. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 1985, **111**(7): 942 - 947.
- [5] GUO W D, RANDOLPH M F. Torsional piles in non-homogeneous media[J]. *Computers and Geotechnics*, 1996, **19**(4): 265 - 287.
- [6] RAJAPAKSER K N D. A torsion load transfer problem for a class of non-homogeneous elastic solids[J]. *International Journal of Solids Structures*, 1988, **24**(2): 139 - 151.
- [7] 刘云云, 陈竹昌. 扭矩作用下嵌岩桩桩顶内力分布的模型试验[J]. 岩土力学, 2000, **21**(2): 119 - 122. (LIU Yun-yun, CHEN Zhu-chang. Model simulation of internal load distribution in rock-socketed piles subject to torsion[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2000, **21**(2): 119 - 122. (in Chinese))
- [8] 陈胜立, 寿汉平. 传递矩阵法分析层状地基中桩的扭转变形[J]. 岩土力学, 2004, **25**(增刊 2): 178 - 186. (CHEN Sheng-li, SHOU Han-ping. Analysis of torsional response of a single pile embedded in layered soil with transfer matrix method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, **25**(S2): 178 - 186. (in Chinese))
- [9] 陈胜立, 张利民. 层状地基中单桩的扭转变形分析[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(5): 531 - 535. (CHEN Sheng-li, ZHANG Li-min. Torsional response of single pile embedded in layered ground[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2005, **27**(5): 531 - 535. (in Chinese))
- [10] KONG L G, ZHANG L M. Centrifuge modeling of torsionally loaded pile groups[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 2007, **133**(11): 1374 - 1384.
- [11] ZHANG L Y. Nonlinear analysis of torsionally loaded piles in a two-layer soil profile[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2010, **10**(2): 65 - 73.
- [12] 邹新军, 徐洞斌, 王亚雄. 成层地基中单桩受扭弹塑性分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2014, **41**(9): 72 - 78. (ZOU Xin-jun, XU Dong-bin, WANG Ya-xiong. Elastic-plastic analysis of torsional single pile in layered subsoil[J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2014, **41**(9): 72 - 78. (in Chinese))
- [13] BASACK S, SEN S. Numerical solution of single piles subjected to pure torsion[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 2014, **140**(1): 74 - 90.
- [14] 杜秦文. 土体剪切模量随深度连续变化非均质地基解析研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2005. (DU Qin-wen. Analytical study on non-homogeneous subgrade with continuous variation of Shear modulus versus depth[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2005. (in Chinese))
- [15] HACHE R A G, VALSANGKAR A J. Torsional resistance of single pile in layered soil[J]. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 1988, **114**(2): 216 - 220.