

DOI: 10.11779/CJGE201603018

# 有限元上限分析网格自适应方法及其工程应用

赵明华, 张 锐

(湖南大学岩土工程研究所, 湖南 长沙 410082)

**摘 要:** 网格离散误差是有限元上限分析计算误差的主要来源。为了对计算网格进行优化, 从而有效地降低数值离散误差, 基于前沿推进网格划分技术并以单元内能量耗散率的相对大小为控制指标, 提出了一种有限元上限分析的网格自适应策略。首先, 引入前沿推进网格划分技术, 实现在网格生成过程中对单元尺寸和形状的灵活控制; 其次, 将当前计算网格中各单元能量耗散率的相对大小转化为新计算网格中单元尺寸的分布信息, 并以此指示新计算网格的生成, 成功地实现了有限元上限分析计算网格的自适应优化; 最后, 通过算例分析验证了所提出方法的有效性。

**关键词:** 上限分析; 非线性规划; 有限元法; 网格自适应方法

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2016)03-0537-09

**作者简介:** 赵明华(1956-), 男, 湖南洞口县人, 教授, 博士生导师, 主要从事桩基及软土地基处理研究。E-mail: mhzhaohd@21cn.com。

## Adaptive mesh refinement of upper bound finite element method and its applications in geotechnical engineering

ZHAO Ming-hua, ZHANG Rui

(Geotechnical Engineering Institute of Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract:** The grid discretization error is the main source of calculation error of finite element upper bound limit analysis. To optimize the calculation mesh and reduce the numerical discretization error, an adaptive mesh refinement strategy is proposed based on the advancing front grid generation technique and taking the relative value of elemental energy dissipation as control index. Firstly, the advancing front grid generation technique is introduced to gain a more flexible control of sizes and shapes of elements during the mesh generation process. Secondly, the relative value of elemental energy dissipation in the current mesh is transformed into the distribution information of element sizes in the new mesh, and then this information is used to indicate the new mesh generation, which successfully realizes the optimization of calculation mesh of finite element upper bound limit analysis. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified by example analysis.

**Key words:** upper bound limit analysis; nonlinear programming; finite element method; adaptive mesh refinement

## 0 引 言

传统的极限分析上限法通过人工构造机动许可的速度场并建立功能平衡方程, 来获得极限荷载的上限值, 因概念明确、计算方便, 在许多岩土工程稳定性问题中得到了应用<sup>[1-2]</sup>。然而, 对于复杂边界条件、非均质材料和非线性破坏准则等问题, 人工构造机动许可的速度场存在很大困难, 因此, 上限法的应用受到很大的限制。有限元上限分析方法将上限定理这一连续体变分问题转化为相应的数学规划问题, 由计算机自动搜索出极限状态下的速度场和极限荷载, 成功地克服了人工构造机动许可速度场的困难, 自提出以来, 就受到各国学者的广泛重视, 并已成功应用于许多复杂的岩土工程稳定性问题中<sup>[3]</sup>。

目前, 在理论方面, 有限元上限分析方法的研究

已取得了长足的发展, 由早期的基于线性规划的有限元上限分析方法(如: Anderheggen 等<sup>[4]</sup>、Bottero 等<sup>[5]</sup>、Pastor<sup>[6]</sup>、Sloan 等<sup>[7]</sup>、王均星等<sup>[8]</sup>、杨小礼等<sup>[9]</sup>、杨峰等<sup>[10]</sup>), 逐步发展为基于非线性规划的有限元上限分析方法(如: Lyamin 等<sup>[11]</sup>、Krabbenhoft 等<sup>[12]</sup>、Ciria<sup>[13]</sup>、Makrodimopoulos 等<sup>[14]</sup>)。但是, 上述研究工作主要集中在数值优化模型的建立及其求解方法的改进上, 较少关注网格离散方式对有限元上限分析计算误差的影响。事实上, 同传统的弹-塑性有限元一样, 网格离散误差是有限元上限分析计算误差的重要来源。由于该方法一般采用低阶的线性单元对计算域进行离散, 为模拟复杂的速度场分布并降低数值离散误差, 需要在

速度变化剧烈的区域设置高密度的计算网格。若对计算网格进行均匀地加密,则会使整个计算网格所包含的单元总数大大增加,由此造成数值计算所消耗的计算机内存和计算机时也大大增加。这在很大程度上降低了有限元上限分析的实际求解效率。因此,为了在获得相同计算精度的前提下,尽可能地减少网格内单元总数,进而提高数值计算效率,必须对计算网格内的单元分布形式进行优化。正因如此,在有限元上限分析中引入网格自适应技术就显得十分必要了。

目前,针对极限分析提出的网格自适应优化方法还较少。其中,Christiansen 等<sup>[15]</sup>和李大钟等<sup>[16]</sup>分别针对 Von Mises 材料和 Mohr-Coulomb 材料,以等效应变率和屈服函数残余两种指标来指示塑性区位置,并采用单元剖分的方式对塑性区网格进行加密。该方法的不足在于,仅对刚、塑性区加以区分,而未对塑性区内部网格进行优化。Borges 等<sup>[17]</sup>和 Lyamin 等<sup>[18]</sup>基于有限元插值误差估计理论中的恢复 Hessian 技术,分别对混合极限分析(Mixed Limit Analysis)和上、下限分析的计算网格进行加密和拉伸。然而,恢复 Hessian 技术的理论基础——超收敛现象,在极限分析中并不存在。因此,将该方法引入极限分析领域缺乏严密的理论基础<sup>[16]</sup>。Ciria 等<sup>[19]</sup>将上、下限差值作为总体误差的估计,以单元内差值对总体差值的贡献来判断局部误差并指示网格密度分布;在此基础上,Muñoz 等<sup>[20]</sup>考虑了边界误差对总误差的贡献。基于单元差值贡献的网格自适应方法,具有严密的理论基础,但需要同时进行上、下限分析,处理起来相对复杂。

本文的目的在于,针对现有研究的不足,提出一种新的有限元上限分析网格自适应方法。其基本思想是:根据计算域内各区域速度变化的剧烈程度与其能量耗散率大小直接相关的特点,将当前计算网格中各单元能量耗散率的相对大小转化为新计算网格中单元尺寸分布的信息,并以此指示新计算网格的生成,从而实现有限元上限分析计算网格的自适应优化。此外,为了方便在网格生成过程中对单元的尺寸和形状进行灵活地控制,本文还引入了前沿推进网格划分技术来生成相应的计算网格。为此,下文将首先对有限元上限分析的基本原理进行简要介绍;其次,给出前沿推进网格划分技术的基本算法步骤;然后,详细讨论以单元能量耗散率的相对大小为控制指标的有限元上限分析网格自适应方法;最后,通过应用实例验证本文方法的有效性和实用价值。

## 1 上限分析的数学变分原理

上限分析的目的在于:在计算域内寻找一个使总

能量耗散率最小的机动相容速度场,使得由功能平衡方程计算出来的上限荷载最小<sup>[2]</sup>。因此,上限分析可以等价于求解如下的数学变分问题<sup>[21]</sup>:

$$D(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \inf_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\mathbf{u}}} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega, \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \Delta \dot{\mathbf{u}} \quad \text{in } \Omega, \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\lambda} \nabla f(\boldsymbol{\sigma}), \quad \dot{\lambda} f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (4)$$

$$\Pi(\dot{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \mathbf{F}' \dot{\mathbf{u}} dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}' \dot{\mathbf{u}} dx = 1. \quad (5)$$

式中  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  分别为体积  $\Omega$  内的速度场,应变率场和应力场;  $\mathbf{F}$  与  $\mathbf{f}$  分别为连续体所受体积力与表面力;  $D(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$  为体积  $\Omega$  内的总能量耗散率;  $\Pi(\dot{\mathbf{u}})$  为外荷载的总功率,  $\nabla$  为梯度算子;  $f$  为塑性屈服函数;  $\dot{\lambda}$  为塑性乘子率。

## 2 有限元上限分析方法简介

根据上限分析的数学变分原理,有限元上限分析方法将寻找机动相容速度场的问题,转化为相应的数学规划问题,使得复杂条件下的速度场可以由计算机自动搜索得到,大大地拓宽了上限法在岩土工程稳定性问题中的应用范围。为此,下文将对其基本原理和求解过程进行简单的介绍。

### 2.1 单元离散

如图 1 所示,采用线性速度常应力三角形单元对计算域进行离散。其中,每个单元对应 6 个节点速度分量和 3 个单元应力分量。

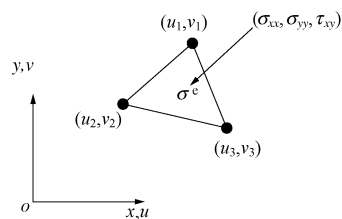


图 1 三角形单元示意图

Fig. 1 Sketch of triangular element

由于线性三角形单元的自由度很小,难以模拟复杂的速度场分布。为此,可在单元间的公共边上设置速度间断线来增加单元间变形自由度<sup>[7]</sup>。Krabbenhøft 等<sup>[13]</sup>提出的基于“退化”单元的速度间断线设置方法,可同时适用于线性和非线性破坏准则,并且“退化”单元可按常规的连续体单元一样处理,其编程求解非常方便。故本文亦采用与该方法相同的速度间断线设置方式进行计算。

如图 2 所示,基于“退化”单元的速度间断线由两个厚度为 0 的单元构成,其中“退化”单元与连续体单元的区别仅在于,其有一对节点坐标重合<sup>[13]</sup>。

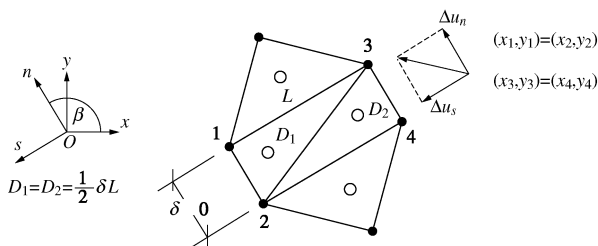


图2 基于退化单元的速度间断线示意图

Fig. 2 Sketch of velocity discontinuity based on degenerated triangular elements

## 2.2 上限分析数学规划模型的建立

单元离散化后, 根据上限定理的相关要求, 建立对单元内应力和节点速度的约束方程, 并以计算域内总的能量耗散率为目标函数, 即可得到上限分析数学规划模型。由于上述过程较为复杂, 本文不作详细讨论, 具体步骤可参考文献[11]的介绍。下文将直接给出上限分析数学规划模型的具体形式<sup>[11]</sup>:

$$\text{Minimize } Q = \sigma^T B u - c^T u, \quad (6)$$

$$\text{Subject to } A u = b, \quad (7)$$

$$B u = \sum_{j=1}^E \lambda_j \nabla f_j(\sigma), \quad (8)$$

$$\lambda_j f_j(\sigma) = 0, \quad j \in J_\sigma, \quad (9)$$

$$f_j(\sigma) \leq 0, \quad j \in J_\sigma, \quad (10)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j \in J_\sigma. \quad (11)$$

$$u \in R^{n_u}, \quad \sigma \in R^{n_\sigma}, \quad \lambda \in R^E.$$

式中  $u$  为全局节点速度列向量;  $\sigma$  为全局应力列向量;  $B$  为全局相容性矩阵;  $c$  为全局已知外荷载系数列向量;  $A$  为线性约束方程系数矩阵,  $b$  为相应的方程组右端项;  $f_j(\sigma)$  为塑性屈服约束函数;  $\lambda_j$  为与  $f_j$  对应的塑性乘子率;  $E$  为单元总数。

## 2.3 上限分析数学规划模型的优化求解

建立了上限分析数学规划模型后, 需要采用合适的数学规划算法对其进行求解。本文基于一种新型的数学规划算法——可行弧内点算法对该模型进行求解, 具体步骤如下: ①将约束凸优化问题(6)~(11)转化为一组 Kuhn-Tucker 条件<sup>[22]</sup>; ②寻找一个初始可行点, 并将 Kuhn-Tucker 条件中的非线性方程组线性化, 得到一个线性方程组; ③对线性方程组的右端项进行扰动, 构造一条在可行域内部且使目标函数值下降的可行弧; ④沿可行弧进行搜索并使目标函数下降相应值; ⑤重复以上过程, 直到优化点满足 Kuhn-Tucker 条件且使优化目标函数值最小。文献[22~24]给出了上述步骤的详细内容, 因篇幅所限, 本文不再赘述。

## 2.4 有限元上限分析的计算机实现

综上所述, 有限元上限分析的求解过程可以归纳

为如下几个方面的内容: ①计算网格的划分; ②优化模型的建构; ③优化模型的求解; ④计算数据的可视化。以上过程必须采用计算机的手段加以实现。为此, 本文将数值分析软件 MATLAB 为平台编制相关计算机程序, 并调用 Tecplot360 软件实现数据信息的可视化。图3中给出了有限元上限分析的实现流程图。

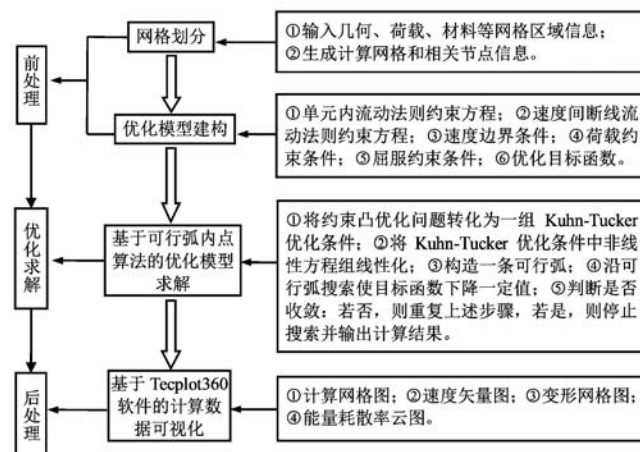


图3 有限元上限分析的计算机实现

Fig. 3 Computer implementation of upper bound finite element mehtod

## 3 前沿推进网格划分技术

前沿推进网格划分技术 (advancing front grid generation technique) 属于非结构化网格划分方法<sup>[25]</sup>。其一大特点是, 网格中单元和节点是同时生成的, 单元的尺寸和形状可以根据需要在空间中灵活地变化。因此, 该方法可以最大限度地按规定的形式获得所需的计算网格。所谓的“前沿” (front), 实际上是一种动态数据结构, 并随网格的生成不断地更新。“前沿”中仅存储与新单元生成相关的网格信息, 其余无关的网格信息将从“前沿”中删除。这样做的好处是, 可以最大限度地节约计算机内存资源, 并且避免大量无关数据的重复读写操作。

一般而言, 前沿推进网格划分技术包括如下的算法步骤<sup>[25]</sup>:

(1) 定义需要离散的计算域边界。

(2) 定义背景网格, 并利用背景网格定义计算域内单元的尺寸和形状在空间的分布情况。

(3) 沿计算域的边界布置边界节点 (节点间距必须与单元尺寸在空间的分布情况相符), 然后将这些边界节点用直线段两两相连, 并将其存储在初始的“前沿”中。

(4) 从当前“前沿”中选择长度最短的直线段作为生成新单元的“基础”, 然后在背景网格中通过插值

得到该直线段中点处的单元网格参数,并利用上述参数确定一个理想的新节点位置。

(5) 将理想的新节点与当前“前沿”中已有节点排列起来,构成一个有序的列表,其中理想节点位于列表的头部,其他节点按与理想节点的距离从小到大依次排列。

(6) 生成新单元,并判断其相容性:

a) 从列表中按顺序取出一个节点与作为“基础”的侧边相连,构成一个新单元。

b) 判断新单元是否具有相容性,即该新单元是否与当前“前沿”中的其他侧边或已有单元相交,若相交则新单元不相容,反之则相容。

c) 若新单元相容,则进行下一步;否则,放弃该单元并返回步骤 a)。

(7) 储存新单元和新节点(若实际连接节点为已有节点则不必储存)。

(8) 更新“前沿”:若新单元的某一侧边已存在于“前沿”中,则将该侧边从“前沿”中删除,若该侧边原本不存在于“前沿”中,则将该侧边添加至“前沿”中。

(9) 判断“前沿”是否为空,若是则停止程序;若否则返回步骤(4),继续进行循环。

图4中给出了上述步骤的简单示意图,可以看出,随着新单元的不断生成,由单元侧边构成的“前沿”随着新单元的生成不断地更新,并不断地向着计算域的内部推进,故称之为前沿推进技术。

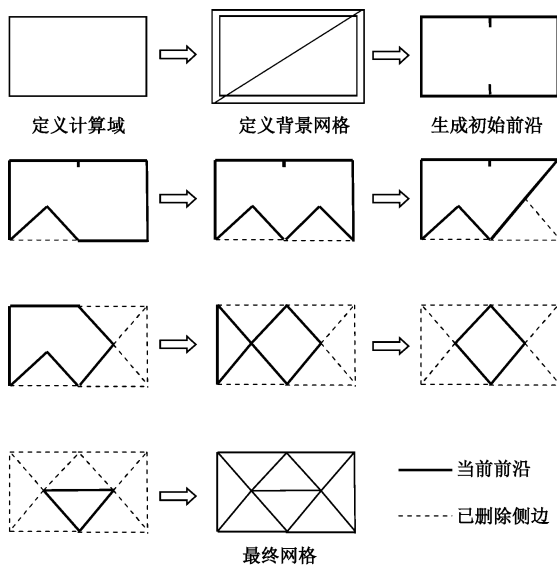


图4 前沿推进网格划分技术

Fig. 4 Advancing front grid generation technique

#### 4 有限元上限分析网格自适应方法

在上限分析中,计算域内各区域速度变化的剧烈

程度与其能量耗散率的大小有直接关系。一般而言,刚性区内没有塑性变形,其内部的能量耗散率和速度变化均为零;而在塑性区内,塑性应变率越高的区域,其能量耗散率和速度变化的剧烈程度也越高,即计算域内各区域速度变化的剧烈程度可以由其能量耗散率的相对大小来衡量。基于这一原理,可以在能量耗散率较大的区域(速度变化较剧烈)适当增加单元密度,以减小数值离散误差;而在能量耗散率较小的区域(速度变化较小)适当减小单元密度,以确保整体计算效率。由此可见,以各区域能量耗散率的相对大小为指标,调整计算域内的单元密度分布形式,是实现有限元上限分析网格自适应优化的有效途径。

为此,下文将基于前沿推进网格划分技术并以单元内能量耗散率的相对大小为控制指标,提出一种有限元上限分析的网格自适应方法,其具体步骤如下:

(1) 给定最大连续体单元数  $E_{\max}$  和初始网格参数,并调用前沿推进网格划分程序生成初始计算网格(可按均匀网格设置)。

(2) 运行有限元上限分析计算机程序,搜索出计算域内全局速度列向量  $\mathbf{u}$ , 全局应力列向量  $\boldsymbol{\sigma}$  和上限荷载  $F_i$ 。

(3) 检验终止条件:若前后两次计算的上限荷载之差与其平均值的比值小于某给定的限值或已达最大连续体单元数  $E_{\max}$ , 则退出计算;否则继续进行下一步。

(4) 给定目标连续体单元数  $E_i$ , 且  $E_i \leq E_{\max}$ 。

(5) 计算单元内能耗散率  $D_i^e$ :

a) 按单元编码  $i$  将单元速度列向量  $\mathbf{u}_i^e$  和单元应力列向量  $\boldsymbol{\sigma}_i^e$  从全局速度列向量  $\mathbf{u}$  和全局应力列向量  $\boldsymbol{\sigma}$  中提取出来。

b) 按式  $D_i^e = \boldsymbol{\sigma}_i^e \mathbf{B}_i^e \mathbf{u}_i^e$  计算各单元能量耗散率(包括连续体单元和速度间断线单元),其中  $\mathbf{B}_i^e$  为单元相容矩阵<sup>[11]</sup>。

c) 将速度间断线单元的能量耗散率,加入与其公共节点最多的连续体单元的能量耗散率  $D_i^e$  中。

(6) 根据各单元能量耗散率  $D_i^e$  的相对大小确定新的单元尺寸:

a) 按式(12)将各单元能量耗散率  $D_i^e$  归一化,即将各单元能量耗散率除以最大能量耗散率,并重新赋值:

$$D_i^e = D_i^e / \max \{ D_i^e | e \in E \}, \quad (12)$$

归一化后,各单元能量耗散率将在 0~1 之间变化。

b) 对于  $D_i^e \leq 10^{-3}$  的单元,将其视为刚性区单元,设定其新单元面积为

$$S_{i,\text{new}}^e = 1 \quad (13)$$

c) 对于  $D_i^e > 10^{-3}$  的单元, 将其视为塑性区单元, 并设定其新单元面积为

$$S_{i,\text{new}}^e = 10^{-3} / D_i^e \quad (14)$$

此时, 刚性区新单元面积为 1, 而塑性区新单元面积与能量耗散率成反比, 在  $(10^{-3}, 1)$  之间变化。

d) 计算当前网格中各单元面积  $S_{i,\text{old}}^e$ , 并将新、旧单元面积分别按式 (15) 和 (16) 归一化

$$S_{i,\text{new}}^e = S_{i,\text{new}}^e / \text{sum}(S_{i,\text{new}}^e) \quad (15)$$

$$S_{i,\text{old}}^e = S_{i,\text{old}}^e / \text{sum}(S_{i,\text{old}}^e) \quad (16)$$

归一化后,  $S_{i,\text{new}}^e$  表示新单元面积占计算域总面积的比例,  $S_{i,\text{old}}^e$  表示旧单元面积占计算域总面积的比例。

e) 按式 (17) 计算各单元尺寸 (边长) 的缩放因子  $\beta_i^e$ ,

$$\beta_i^e = (S_{i,\text{new}}^e / S_{i,\text{old}}^e)^{0.5} \quad (17)$$

式中,  $\beta_i^e > 1$  时, 表示单元  $i$  的尺寸增大,  $\beta_i^e < 1$  时, 表示单元  $i$  的尺寸缩小。为了避免单元尺寸变化太大造成网格尺寸的振荡, 单元尺寸缩放因子控制在  $0.25 \sim 2$  之间, 即令

$$\beta_i^e (< 0.25) = 0.25 \quad (18)$$

$$\beta_i^e (> 2) = 2 \quad (19)$$

f) 设旧的单元尺寸 (边长) 为  $L_{i,\text{old}}^e$ , 由于本文方法不对单元进行拉伸, 即各单元尽量按照等边三角形进行划分, 故旧单元尺寸  $L_{i,\text{old}}^e$  可按式 (20) 计算:

$$L_{i,\text{old}}^e = (4S_{i,\text{old}}^e / \sqrt{3})^{0.5} \quad (20)$$

则新单元尺寸  $L_{i,\text{new}}^e$  可按式 (21) 计算:

$$L_{i,\text{new}}^e = \beta_i^e \cdot L_{i,\text{old}}^e \quad (21)$$

g) 为了保证新网格中的单元数与给定的目标连续体单元数  $E_i$  相匹配, 对新单元尺寸按式 (22)、(23) 进行缩放:

$$L_{i,\text{new}}^e = (\sqrt{E_{\text{new}} / E_i}) L_{i,\text{new}}^e \quad (22)$$

其中,

$$E_{\text{new}} = (4/\sqrt{3}) \sum_i (S_{i,\text{old}}^e / L_{i,\text{new}}^{e2}) \quad (23)$$

(7) 设定当前计算网格为背景网格, 并将各单元定义的新单元尺寸  $L_{i,\text{new}}^e$  按面积加权平均的方式分配到背景网格的节点上 (如图 5 所示)。

(8) 根据背景网格定义的单元尺寸分布形式采用前沿推进技术生成新的计算网格。

(9) 返回第 (2) 步。

## 5 算例分析

光滑刚性条形基础下无重黏性土的地基承载力可以按 Prandtl 公式进行计算, 其解析表达式如下<sup>[26]</sup>:

$$q/c' = (\exp(\pi \tan \varphi') \tan^2(45 + \varphi'/2) - 1) \cot \varphi' \quad (24)$$

式中,  $c'$  和  $\varphi'$  分别为土体的有效黏聚力和有效内摩擦角,  $q$  为地基极限承载力。

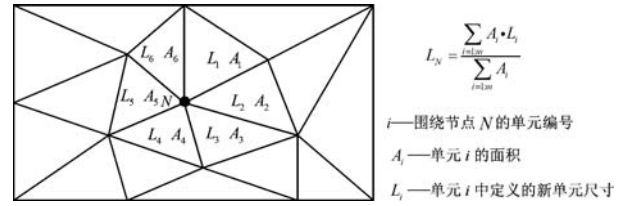


图5 单元尺寸分配至背景网格节点示意图

Fig. 5 Sketch of element sizes distributing to background grid nodes

为了验证本文方法的有效性, 下文将采用自适应有限元上限分析法对上述地基承载力问题进行计算, 并将计算结果进行对比分析。图 6 中给出了计算域及速度边界条件的示意图 (图中  $u_n$  和  $u_t$  分别表示法向和切向的速度)。在进行计算域划分时, 根据对称性, 仅研究基础中心右侧的情况。以下所有数值计算的运行环境为: 操作系统 Windows 7 64-bit; 处理器 Intel Core i5-3210M CPU @2.50 GHz; 内存 8 GB。

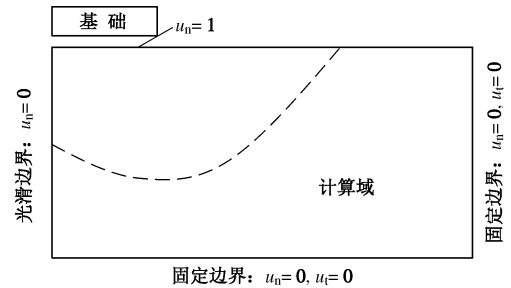


图6 计算域与速度边界条件

Fig. 6 Computational domain and velocity boundary conditions

为了便于对比, 先按给定的目标单元数采用均匀网格进行计算, 然后在保持目标单元数不变的情况下, 采用本文方法对计算网格进行优化。其中, 目标单元数取 1000, 2000, 3000 和 4000, 有效内摩擦角  $\varphi'$  取  $0^\circ$ ,  $15^\circ$  和  $30^\circ$ , 网格优化次数取  $0 \sim 4$  次 (0 次表示初始的均匀网格), 计算结果列于表 1 中。

由表 1 中数据可以看出, 在保持目标单元数不变的情况下, 随着网格优化次数的增加, 地基承载力上限解迅速逼近由式 (24) 计算的精确解, 计算误差明显减小。例如, 对于有效内摩擦角  $\varphi' = 15^\circ$  的情况, 当目标单元数取 1000 时, 均匀网格下的计算误差为 4.7534%; 而经过 4 次网格优化, 计算误差可降低至 0.2663%, 比原误差降低了 17.8 倍之多。这说明本文提出的有限元上限分析网格自适应方法取得了良好的实际应用效果。由表 1 中数据还可看出, 当有效内摩擦角  $\varphi'$  较大时, 有限元上限分析的计算误差也相对越大。但是, 即使对于较大的有效内摩擦角 (如  $\varphi' =$

表 1 自适应有限元上限分析计算结果

Table 1 Calculated results of adaptive finite element upper bound limit analysis

目标单元数	优化次数	$c'=1, \varphi'=0^\circ$ (精确解 $q/c=5.1416$ )			$c'=1, \varphi'=15^\circ$ (精确解 $q/c=10.9765$ )			$c'=1, \varphi'=30^\circ$ (精确解 $q/c=30.1396$ )		
		实际单元数	$q/c'$	误差/%	实际单元数	$q/c'$	误差/%	实际单元数	$q/c'$	误差/%
1000	0	984	5.2293	1.7057	1019	11.4982	4.7534	1017	34.1922	13.4461
	1	1062	5.1738	0.6256	1075	11.1600	1.6723	1035	31.6849	5.1273
	2	1049	5.1570	0.2990	1084	11.0424	0.6013	1061	30.8871	2.4802
	3	1036	5.1508	0.1787	1073	11.0144	0.3461	1105	30.5154	1.2468
	4	1055	5.1483	0.1302	1102	11.0056	0.2663	1046	30.4037	0.8761
2000	0	2045	5.1812	0.7702	2028	11.1945	1.9874	2026	31.9108	5.8765
	1	2057	5.1571	0.3015	2031	11.0678	0.8328	2022	30.8532	2.3678
	2	2094	5.1489	0.1416	2051	11.0211	0.4070	2033	30.5070	1.2189
	3	2088	5.1466	0.0979	2066	11.0081	0.2887	2052	30.3202	0.5993
	4	2012	5.1457	0.0790	2072	11.0028	0.2402	2039	30.2454	0.3511
3000	0	2929	5.1658	0.4701	2931	11.0985	1.1124	2954	31.2046	3.5336
	1	3089	5.1505	0.1739	3087	11.0420	0.5978	3057	30.6552	1.7108
	2	3070	5.1474	0.1129	3161	11.0080	0.2879	3106	30.3694	0.7626
	3	3089	5.1461	0.0872	3111	10.9958	0.1766	3138	30.2561	0.3866
	4	3039	5.1452	0.0698	3106	10.9943	0.1634	3096	30.2206	0.2688
4000	0	4002	5.1533	0.2285	4012	11.0407	0.5854	4004	30.9065	2.5444
	1	4105	5.1484	0.1319	4045	11.0061	0.2704	4011	30.3999	0.8638
	2	4094	5.1463	0.0923	4077	10.9940	0.1606	4049	30.3306	0.6336
	3	4107	5.1460	0.0853	4127	10.9912	0.1344	4090	30.2266	0.2886
	4	4088	5.1450	0.0666	4146	10.9876	0.1017	4178	30.2051	0.2173

30°), 在适当增加目标单元数的基础上, 对计算网格进行优化, 本文方法也可以获得很高的计算精度。例如, 对于有效内摩擦角  $\varphi'=30^\circ$  的情况, 目标单元数为 1000 的均匀网格下的计算误差为 13.4461%; 而将目标单元数增加到 4000 并且进行 4 次网格优化后, 其计算误差可降低为 0.2173%。由此可见, 在常用的土体有效内摩擦角范围内, 本文方法可获得很高的计算精度, 因而可以很好地适应实际工程计算的需要。

前面主要讨论了本文方法的计算精度问题, 下文将对本文方法在实际应用中的计算效率问题进行讨论。需要指出的是, 表 1 中数据是在控制目标单元数不变的情况下对计算网格进行优化而得到的。其目的是为了更加充分地显示出由于网格优化对上限分析计算精度所产生的影响。但在实际应用中, 为了获得更高的计算效率, 可以先采用较少的目标单元数进行计算, 然后随着网格优化次数的增加, 逐步提高目标单元数。这样做的好处是, 前几次计算由于目标单元数较少, 有限元上限分析的优化求解速度很快, 可以节约大量计算机时; 而随着目标单元数和网格优化次数的增加, 上限分析的计算精度也迅速提高, 又可同时满足计算精度方面的要求。

为此, 下文将对有效内摩擦角  $\varphi'=30^\circ$  的情况进行分析, 并且先采用目标单元数为 500 的均匀网格进行计算, 然后在设定目标单元数分别为 500, 1000,

1500 和 2000 的情况下对计算网格进行优化, 最后将上述情况下的计算结果与目标单元数为 8000 的均匀网格下的计算结果进行比较, 相关数据列于表 2 中。

从表 2 中数据可以看出, 随着目标网格单元数和网格优化次数的增加, 自适应网格下的计算误差迅速减小。当目标单元数增加到 1500 个时(此时的网格优化次数为 3 次), 计算误差仅为 0.9005%, 比采用 8000 个单元的均匀网格下的计算误差 0.9636%还要小, 并且其计算的总耗时为  $4.34+4.48+6.77+11.17=26.76$  s, 远少于目标单元数为 8000 的均匀网格下的计算总耗时 91.69 s。由此可见, 采用本文提出的网格自适应方法, 不仅可以有效地提高有限元上限分析的计算精度, 还可以较大程度地改善其实际求解效率。另外, 从程序运行的最大占用内存来看, 采用自适应网格与采用均匀网格相比, 在获得相同计算精度的前提下, 由于前者所需的实际单元数远小于后者, 其最大占用内存也远小于后者。因此, 本文方法在实际应用中可以节约大量的计算机内存资源, 对计算机配置的要求明显减低。需要说明的是, 表 2 中给出的计算时间是有限元上限分析计算程序的实际运行时间, 其中包括了网格划分、优化模型建构和优化模型求解等过程所消耗的全部计算机时; 而最大占用内存是指有限元上限分析计算程序占用的净内存, 不包括 Matlab 软件自身占用的内存。



表 2 均匀网格和自适应网格下的计算效率对比 ( $c'=1$  和  $\varphi'=30^\circ$  时)

Table 2 Comparison of calculation efficiencies under uniform or adaptively refined meshes ( $c'=1$  and  $\varphi'=30^\circ$ )

类型	网格 优化次数	目标 单元数	实际 单元数	最大占用 内存/MB	优化迭代次数	计算 时间/s	$q/c'$	误差 /%
自适应网格	0	500	506	42	24	4.34	41.1842	36.6448
	1	500	514	43	27	4.48	35.4737	17.6980
	2	1000	1056	90	26	6.77	31.1265	3.2743
	3	1500	1516	129	26	11.17	30.4110	0.9005
	4	2000	2020	172	29	14.78	30.2944	0.5136
均匀网格	0	8000	8064	691	36	91.69	30.4300	0.9636

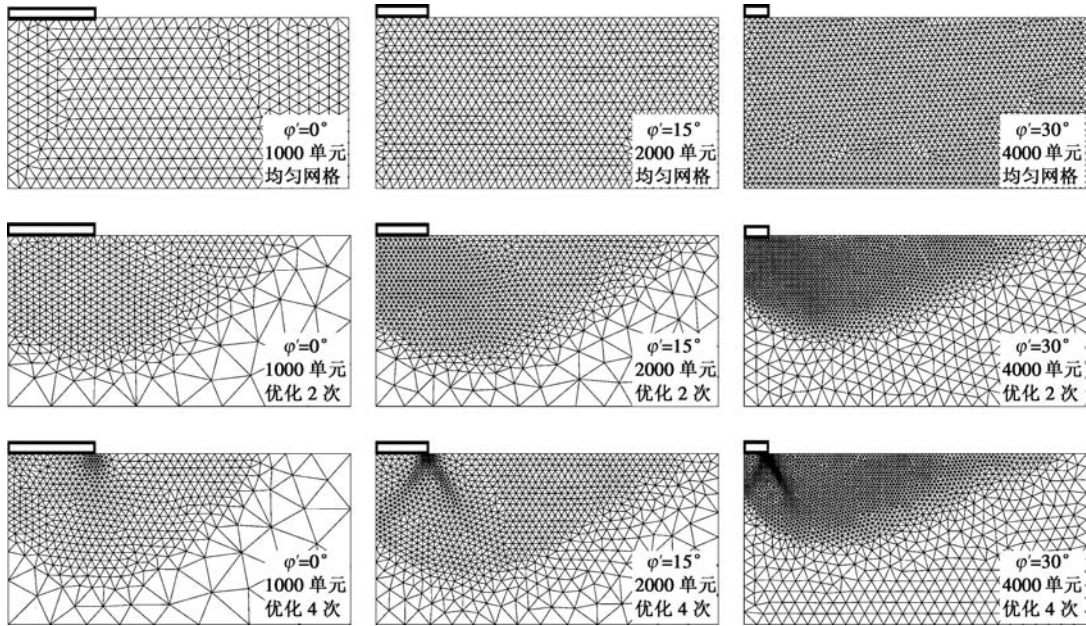


图 7 均匀网格与自适应网格的对比情况

Fig. 7 Comparison between uniform and adaptive refined meshes

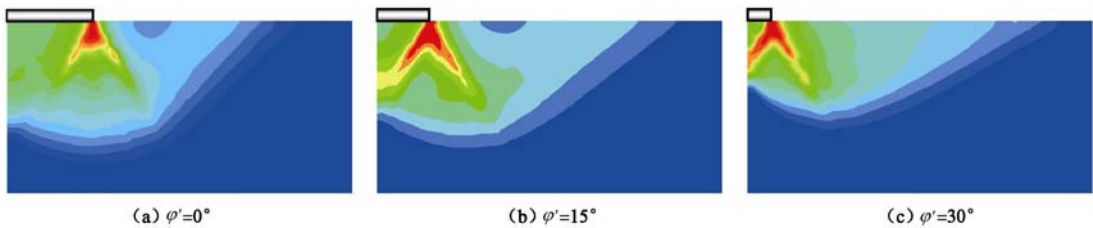


图 8 基础下方塑性区能量耗散图

Fig. 8 Energy dissipation of plastic zone underneath footing

图 7 中给出了不同内摩擦角和不同目标单元数条件下均匀网格与自适应网格的对比情况；而图 8 中给出了不同内摩擦角条件下基础下方塑性区能量耗散的分布情况。对比图 7、8 可以发现，随着网格优化次数的增加，计算域内的单元尺寸的分布发生了明显的变化，即在能量耗散越剧烈的区域，单元尺寸逐渐缩小，而在能量耗散相对较小的区域或刚性区，单元尺寸逐渐增大。这说明，本文方法可以根据塑性区能量耗散率的不同自动地调整计算域内的网格分布形式。通过

这种调整，可以在保持总单元数一定的情况下，使计算域内塑性能耗越剧烈的区域获得更大的变形自由度，从而有效地降低数值离散误差。

6 结 语

本文基于前沿推进网格划分技术并以单元内能量耗散率的相对大小为控制指标，提出了一种有限元上限分析的网格自适应方法。其特点是，可以根据塑性区能量耗散率的不同，自动地调整计算域内的网格分

布形式。通过这种调整,可以在保持总单元数一定的情况下,使计算域内塑性能耗越剧烈的区域获得更大的变形自由度,从而有效地降低数值离散误差。由于数值离散误差得到了有效地控制,在获得相同计算精度的前提下,本文方法所需的总单元数大大减少,故在实际应用中,可以节约大量的计算机时和计算机内存资源,有效地提高了数值计算效率。因此,本文方法可以更好地适应实际工程计算的需要。

## 参考文献:

- [1] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(1): 1 - 11. (CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(1): 1 - 11. (in Chinese))
- [2] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.
- [3] SLOAN S W. Geotechnical stability analysis[J]. Géotechnique, 2013, **63**(7): 531 - 572.
- [4] ANDERHEGGEN E, KNOPFEL H. Finite element limit analysis using linear programming[J]. International Journal of Solids and Structures, 1972, **8**(12): 1413 - 1431.
- [5] BOTTERO A, NEGRE R, PASTOR J, et al. Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1980, **22**(1): 131 - 149.
- [6] PASTOR J, TURGEMAN S. Limit analysis in axisymmetrical problems: numerical determination of complete statical solutions[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1982, **24**(2): 95 - 117.
- [7] SLOAN S W, KLEEMAN P W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, **127**: 293 - 314.
- [8] 王均星, 王汉辉, 吴雅峰. 土坡稳定的有限元塑性极限分析上限法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(11): 1867 - 1873. (WANG Jun-xing, WANG Han-hui, WU Ya-feng. Stability analysis of soil slope by finite element method with plastic limit upper bound[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(11): 1867 - 1873. (in Chinese))
- [9] 杨小礼, 李亮, 刘宝琛. 大规模优化及其在上限定理有限元中的应用[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(5): 602 - 605. (YANG Xiao-li, LI Liang, LIU Bao-chen. Large-scale optimization and its application to upper bound theorem using kinematical element method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(5): 602 - 605. (in Chinese))
- [10] 杨峰, 阳军生, 张学民. 基于线性规划模型的极限分析上限有限元的实现[J]. 岩土力学, 2011, **32**(3): 914 - 921. (YANG Feng, YANG Jun-sheng, ZHANG Xue-min. Implementation of finite element upper bound solution of limit analysis based on linear programming model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(3): 914 - 921. (in Chinese))
- [11] LYAMIN A V, SLOAN S W. Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, **26**: 573 - 611.
- [12] CIRIA H. Computation of upper and lower bounds in limit analysis using second-order cone programming and mesh adaptivity[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2002.
- [13] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V, HAJIAJ M, et al. A new discontinuous upper bound limit analysis formulation[J]. International Journal of Numerical Methods for Engineering, 2005, **63**(7): 1069 - 1083.
- [14] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2007, **31**(6): 835 - 865.
- [15] CHRISTIANSEN E, EDMUND O S. Automatic mesh refinement in limit analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, **50**(6): 1331 - 1346.
- [16] 李大钟, 郑榕明, 王金安, 等. 自适应有限元极限分析及岩土工程中的应用[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(5): 922 - 929. (LI Da-zhong, ZHENG Rong-ming, WANG Jin-an, et al. Application of finite-element-based limit analysis with mesh adaptation in geotechnical engineering[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(5): 922 - 929. (in Chinese))
- [17] BORGES L, ZOUAIN N, COSTA C, et al. An adaptive approach to limit analysis[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, **38**(10/11/12/13): 1707 - 1720.
- [18] LYAMIN A V, SLOAN S W, KRABBENHOFT K, et al. Lower bound limit analysis with adaptive remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, **63**(14): 1961 - 1974.



- [19] CIRIA H, PERAIRE J, BONET J. Mesh adaptive computation of upper and lower bounds in limit analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, **75**(8): 899 - 944.
- [20] MUNOZ J J, BONET J, HUERTA A, et al. Upper and lower bounds in limit analysis: adaptive meshing strategies and discontinuous loading[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, **77**(4): 471 - 501.
- [21] COHN M Z, MAIER G. Engineering plasticity by mathematical programming[M]. New York: Pergamon Press, 1979.
- [22] 赵明华, 张 锐, 雷 勇. 基于可行弧内点算法的上限有限单元法优化求解[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(4): 604 - 611. (ZHAO Ming-hua, ZHANG Rui, LEI Yong. Optimization of upper bound finite element method based on feasible arc interior point algorithm[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(4): 604 - 611. (in Chinese))
- [23] HERSKOVITS J, SANTOS G. Feasible arc interior point algorithm for nonlinear optimization[C]// Computational Mechanics, New Trends and Applications. Barcelona, 1998.
- [24] HERSKOVITS J, MAPPA P, GOULART E, et al. Mathematical programming model and algorithms for engineering design optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, **194**(33): 3244 - 3268.
- [25] THOMPSON J F, SONI B K, WEATHERILL N P. Hand book of Grid Generation[M]. Boca Raton London New York Washington D C: CCR Press, 1998.
- [26] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 2 版. 北京: 中国水利水电出版社, 1996. (QIAN Jia-huan, YIN Zong-ze. Principles of soil engineering and calculation[M]. 2nd ed. Beijing: China Water Power Press, 1996. (in Chinese))

### 《岩土工程学报》征订启事

《岩土工程学报》创办于 1979 年, 是我国水利、土木、力学、建筑、水电、振动等六个全国性学会联合主办的学术性科技期刊。由南京水利科学研究院承办, 国内外公开发刊。主要刊登土力学、岩石力学领域中能代表当今先进理论和实践水平的科学研究和工程实践成果等。报道新理论、新技术、新仪器、新材料的研究和应用。欢迎国家自然科学基金项目及其他重要项目的研究成果向本刊投稿, 倡导和鼓励有实践经验的作者撰稿, 并优先刊用这些稿件。主要栏目有黄文熙讲座、综述、论文、短文、工程实录、焦点论坛、讨论和简讯等。

本刊被《中文核心期刊要目总览》连续多年确认为核心期刊, 并在建筑类核心期刊中位于前列; 本刊被科技部“中国科技论文统计源期刊”(中国科技核心期刊)及“中国科技论文与引文数据库”收录; 本刊被中国科学院“中国科学引文数据库”收录; 本刊被“中国知网”全文收录及“中国学术期刊综合评价数据库”收录; 本刊被“工程索引 Ei Compindex 数据

库”和“日本科学技术振兴机构数据库 JST”等国际数据库收录。本刊网址(www.cgejournal.com)全文发布本刊所有刊载文章。

本刊读者对象为土木建筑、水利电力、交通运输、矿山冶金、工程地质等领域中从事岩土工程及相关专业的科研人员、设计人员、施工人员、监理人员和大专院校师生。

本刊为月刊, A4 开, 双栏排版, 192 页, 每月中旬出版, 每期定价 25 元, 全年 300 元。

本刊国际标准刊号 ISSN 1000 - 4548, 国内统一刊号 CN 32 - 1124/TU, 国内发行代号 28 - 62, 国外发行代号 MO 0520。欢迎广大读者在全国各地邮局订购, 也可在编辑部订购(不另收邮费)。编辑部订购地址: 南京虎踞关 34 号《岩土工程学报》编辑部; 邮编: 210024; 联系电话: 025-85829534, 85829543, 85829553, 85829556; 传真: 025-85829555; E-mail: ge@nhri.cn。

(本刊编辑部)