

DOI: 10.11779/CJGE201603003

# 排水板真重度损耗的排水固结解析解

蒋基安<sup>1, 2</sup>, 陈海英<sup>1, 2</sup>, 陈 越<sup>1</sup>, 叶佳雯<sup>1</sup>

(1. 中交上海航道勘察设计研究院, 上海 200120; 2. 交通行业疏浚技术重点实验室, 上海 200120)

**摘要:** 无砂真空预压吹填软土在国内造地工程中广泛应用, 但实践表明传统固结解析解已不足以预测其加固性状和加固效果。从固结方程出发, 在原有的等应变假设基础上, 在定解条件中增加了吹填土特有的高度欠固结特性和无砂真空预压特别明显的真重度损耗, 重新推导得到径向和竖向完全协调的新的等应变解析解——JJJ 解答, 以解决无砂真空预压吹填软土的排水固结设计理论问题。JJJ 法作为固结方程的原生解答, 兼容以往所有该类解析解的同时, 增加了针对高度欠固结土类和排水板真重度损耗严重的排水固结问题的解决能力。经现场和试验验证, JJJ 解析解可相当精确预测无砂真空预压吹填软土的复杂固结过程和加固土体超孔压分布和孔压消散分布, 该解答同时也适用于堆载和真空预压的工况。

**关键词:** 解析解; 固结; 真空损耗; 超静孔压

中图分类号: TU447 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2016)03-0404-15

作者简介: 蒋基安(1966-), 男, 高级工程师, 主要从事河口航道整治、港口工程、疏浚设备、围海造地、地基处置等工程设计、研究和实施。E-mail: jjiang163@163.com。

## Analytical solutions to drainage consolidation considering vacuum loss in prefabricated vertical drain

JIANG Ji-an<sup>1,2</sup>, CHEN Hai-ying<sup>1,2</sup>, CHEN Yue<sup>1</sup>, YE Jia-wen<sup>1</sup>

(1. Shanghai Waterway Engineering Design & Consulting Company, Shanghai 200120, China; 2. MOT Key Laboratory of Dredging Tech, Shanghai 2000120, China)

**Abstract:** The non-sand-cover (NS) vacuum preloading (VP) has been widely used in China. Based on the equal-strain assumption, a new set of analytical solutions to consolidation drainage under VP and NS-VP, called JJJ-solution, are developed from original equations by Terzaghi and Barron for vertical and radial drainage, by introducing the original definite conditions, that is, highly under-consolidated initial state of soil and severe vacuum loss along PVD drain boundary. The JJJ-solution is consistent with all the existing equal-strain solutions and verified through experiments. It is capable of accurately predicting the unusual dissipation and distribution of the excess pore-water pressure in consolidation under NS-VP on soft-muddy foundation. In addition, the JJJ-solution is suitable for simulating soil consolidation in general vacuum, surcharge and vacuum-surcharge preloading.

**Key words:** analytical solution; consolidation; vacuum loss; excess pore water pressure

## 0 引言

无砂真空预压在造地工程中已广泛应用, 是一种用土工织物替代砂垫层的简化真空预压工艺。真空预压法最早由杰尔曼于 1952 年提出, 当时称为“利用大气压力进行地基处理的方法”, 属于排水固结法的一种, 其原理是利用真空降低土体在排水边界的压力, 形成内外压差迫使孔隙水排出, 从而降低土体孔隙率, 地基得到加固。

真空预压采用的设计理论普遍为等效于堆载的固结解答, 其中竖向采用 Terzaghi 的竖向固结解, 径向采用 Barron 理想砂井解析解<sup>[1]</sup>、Hansbo 的非理想井解析解<sup>[2]</sup>。目前还有改进 Hansbo 解答的谢康和非理想井

解答<sup>[3]</sup>, 以及在此基础上董志良推出真空联合堆载预压解答<sup>[4-5]</sup>。

2007 年以来, 国内在吹填软土造地工程中广泛采用了无砂真空预压, 固结特点独特, 表现为表层最好、表下浅层最差, 底层和中下部稍好等特点。其真空传递也十分独特, 唐彤芝等温州现场试验研究发现 3~3.5 m 板至底部衰减了 40% 左右<sup>[6]</sup>, 折算衰减率约 10~20 kPa/m, 中交疏浚技术重点实验室室内原型试验发现 3.3 m 长板底部仅余不足 50%<sup>[7]</sup>, 折算衰减率达到 8~15 kPa/m。但这一板真空严重衰减并不等同于渗流

压降梯度也很大, 实际固结极其缓慢, 经常能见到设计工期 3.5 个月, 实际需要甚至超过 5~7 个月, 且加固效果不佳。

即便是常规有砂真空预压, 20世纪 80 年代以来一直有比较大衰减率的报道。沈珠江等根据天津新港四港池后方Ⅱ区地基处理情况, 采用了 20 m 排水板真空负压沿深度线性递减至底部仅余 1/3 的分布<sup>[8]</sup> (3 kPa/m), 彭勘等根据杭金衢高速路娄下陈段实测真空度情况, 采用了至 25 m 深度递减为 15 kPa 的线性分布<sup>[9]</sup> (2.5 kPa/m), 张泽鹏等根据现场试验测得 10 m 长排水板底部仍有 68%<sup>[10]</sup> (2.56 kPa/m)。以上衰减梯度 3%就算很大, 但与无砂真空预压动辄每米 10%~15%的衰减梯度是无法比拟的。

传统的 Hansbo、谢康和及董志良非理想井解答板内渗流压降梯度一般为 0.5%~1.5%, 主要是因为排水板井阻较小。如采用经典解答反演无砂真空预压板内高压降梯度的固结过程, 必须强制提高井阻, 将排水板渗透系数减少到类似出现排水板堵塞的程度, 但提高井阻的结果是固结度预测完全偏离实际。分析认为, 这是板内真空不等于渗流压力的问题, 真空压强与实际渗流压力之间的差值, 就是真空损耗。但传统解答通常仅是把真空直接等同于渗流压力, 真空压降等同于渗流压降, 成为问题所在。

鉴于发生的较大衰减的实际情况, Indraratna 假设真空沿深度线性损耗, 总水头直接扣除损耗后推演出真空线性损减的非理想井径向固结解析解<sup>[11]</sup>, 较传统解答改善了对各类高衰减工况的适应性, 但该处理显然过于简单化。

通过试验数据分析对比表明, 真空的高衰减率并未全部转化为渗流动力, 衰减量还包括了损耗, 损耗还直接影响渗流梯度和固结进程, 最终影响加固效果。根据以上情况, 本文从 Terzaghi 和 Barron 推导的固结基本方程出发, 沿用等应变假设, 在定解条件下加入排水板真空度损耗的边界条件, 给出了这类问题的通解, 考虑到吹填软土真空预压完全欠固结的工况, 进一步加入了欠固结因素, 得到竖向和径向协调的 JJJ 解答, 可较好地解决无砂真空预压吹填软土的加固效果和固结进程预测问题, 并经试验数据验证。

## 1 竖向固结基本方程及解答

### 1.1 竖向解答

太沙基竖向固结方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

式中,  $C_v$  竖向固结系数,  $u$  为土中竖向超孔压,  $t$  为固结时间。为了便于与径向区分, 以下竖向超孔压采用  $u_z$  代表, 径向超孔压采用  $u_r$  代表。

仍然满足太沙基解答的假设条件, 上述方程的定解条件为

$$\begin{aligned} \text{初始条件 } u_z|_{t=0} &= u_0(z); \text{ 荷载条件 } u_z|_{z=0} = p_0; \\ \text{单面排水条件 } \frac{\partial u_z}{\partial z}|_{z=l} &= 0. \end{aligned}$$

式(1)用变量分离法求解如下: 设  $u_z = X(z)T(t)$ , 则式(1)改写为

$$\begin{aligned} X(z) \cdot T'(t) &= C_v T(t) X''(z), \\ \frac{X''(z)}{X(z)} &= \frac{1}{C_v} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\eta^2. \end{aligned}$$

$\eta$  为解系特征值,  $\eta=0$ , 可解得与时间无关的特解①为

$$u_z = \phi(z) = k_p z + p_0. \quad (2)$$

$\phi(z)$  为与时间无关的解, 可理解为固结最终时刻超孔压强制边界条件。

如  $\eta \neq 0$ , 结果与太沙基解答相同, 得到特解②,

$$\left. \begin{aligned} V_n &= \frac{2}{l} \int_0^l u_0(z) \sin \frac{Mz}{l} dz, M = \frac{(2m+1)\pi}{2}, m \in [0, N], \\ u_z(z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ V_n \sin \frac{Mz}{l} e^{-\beta_z t} \right], \\ \beta_z &= M^2 \frac{C_v}{l^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

该方程仅有两个特解, 组合后为方程通解为

$$\left. \begin{aligned} V_n &= \frac{2}{l} \int_0^l (u_z(z)|_{t=0} - \phi(z)) \sin \frac{Mz}{l} dz, \\ u_z(z, t) &= \phi(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \left[ V_n \sin \frac{Mz}{l} e^{-\beta_z t} \right], \\ \phi(z) &= p_0 + k_p z, \\ \beta_z &= M^2 \frac{C_v}{l^2}, \\ M &= \frac{(2m+1)\pi}{2}, m \in [0, N]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)组合系数已简化,  $V_n$  称为通项,  $u_z(z, t)$  为通解。不同的初始条件和边界条件项代入在域内积分, 可得到不同的通项式, 代入  $u_z(z, t)$  后得到具体的解答。

根据竖向等应变假设, 仅考虑竖向排水时, 排水板边界和土体超孔压相同,  $u_w(z, t) = u_z(z, t)$ , 则, 当  $t=\infty$ , 由式(4),  $u_z|_{t=\infty} = u_{w\infty}(z) = \phi(z) = p_0 + k_p z$ , 即  $\phi(z)$  的物理意义为  $t=\infty$  排水板最终的超孔压分布, 实际上就是不参与渗流的那部分压力, 称之为真空损耗,  $\phi(z)$  为真空损耗的超孔压表达式,  $k_p$  称为损耗率。可见,  $\phi(z)$  形式上是不满足全部初边界条件的特解, 实际是满足终止时刻边界条件的特征解。通常单个特征解不能满足所有的定解条件, 只有组合后的解系才完备。本例如无解①, 仅采用解②是无法满足终止边界条件的, 只有①②组合的通解系能完全满足相关的工况和定解条件。

以上式(4)为考虑了排水板损耗及一般欠固结超孔压分布的 JJJ 坚向通解。通解中包括了  $V_n = f(\phi(z))$ ,  $u_z(z)|_{t=0}$ , 仍需进一步解答。

### (1) $\phi(z)$ 的确定

如为堆载预压, 最终超孔压为 0,  $k_p=0$  即损耗为 0, 这就是太沙基解答。当为真空预压, 初始时刻,  $z=0$  时,  $u_w(z)|_{t=0}=-P_0$ ,  $P_0=-P_0$ 。如最终超孔压为  $\phi(z)=-P_0$ , 表明无损耗  $k_p=0$ , 如有损耗, 则  $\phi(z)=-P_0+k_p z$ ,  $k_p$  为损耗率 (kPa/m)。通常不会等到完全固结就结束了, 最后时刻的分布几乎是无从得到的, 因此看上去  $k_p$  无法解答, 后面分析会根据实际孔压过程得到真空度分布的情况, 结合经验可确定排水板内真空度损耗率  $k_p$  后就得到了  $\phi(z)$  的解。

### (2) 初始超孔压 $u_z(z)|_{t=0}$

在真空联合堆载时, 设堆载荷载  $P_1$ , 真空荷载  $P_0$ , 则初始条件为,  $u_z|_{t=0}=P_1+u_0(z)$ 。

对于吹填土, 欠固结情况无法忽略, 对于自重固结, 根据经验假设加载前初始超孔压为线性分布  $u_0(z)=u_0+k_u z$ , 堆载  $P_1$  后  $u_0(z)=u_0+k_u z+P_1$ , 其中  $k_u$  为欠固结孔压斜率 (kPa/m)。

根据以上损耗和欠固结定解条件代入式(4)求得通项  $V_n$ ,

$$V_n=\left(u_0+P_0+P_1+(-1)^m \frac{(k_u-k_p)}{2M} l\right) \frac{2}{M}, \quad (5)$$

进而代入通解求得考虑欠固结和损耗的数理解析解, 并整理出孔压消散过程和最终孔压消散  $\Delta u$  分布。

$$\left. \begin{aligned} u_z &= -P_0+k_p z+\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(u_0+P_0+P_1+(-1)^m \frac{(k_u-k_p)}{2M} l\right) \frac{2}{M} \sin \frac{M z}{l} e^{-\beta_z t}\right], \\ \Delta u_z(z, t) &= u_0+P_0+P_1+(k_u-k_p) z-\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(u_0+P_0+P_1+(-1)^m \frac{(k_u-k_p)}{2M} l\right) \frac{2}{M} \sin \frac{M z}{l} e^{-\beta_z t}\right], \\ \Delta u_z(z, \infty) &= u_0+P_0+P_1+\frac{(k_u-k_p)}{2} l, \\ U_z(z, t) &= 1-\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(u_0+P_0+P_1+(-1)^m \frac{(k_u-k_p)}{2M} l\right) \frac{2}{M} \sin \frac{M z}{l} e^{-\beta_z t}\right]}{u_0+P_0+P_1+(k_u-k_p) z}, \\ U_z(t) &= 1-\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(u_0+P_0+P_1+(-1)^m \frac{(k_u-k_p)}{2M} l\right) \frac{2}{M} \sin \frac{M z}{l} e^{-\beta_z t}\right]}{u_0+P_0+P_1+\frac{(k_u-k_p)}{2} l} . \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在数学上不难反证式(6)解完全满足定解条件。式(6)与传统解答主要不同之处是增加了欠固结和排水板真空损耗因素。该坚向数理方程解——解析解, 本文之后简称为 JJJ 坚向解答。

### 1.2 与其他坚向解答的关系

堆载预压坚向解析解, 目前最常用的是太沙基坚向解答。在正常固结土堆载  $P_1$ ,  $u_0=0$ ,  $k_u=0$ , 真空荷

载  $P_0=0$ ,  $k_p=0$ , 单面排水, 代入式(4)、(5)得到堆载预压的解答为

$$V_n=\frac{2}{M} P_1, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} u_z(z, t) &= P_1 \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{2}{M} \sin \frac{M z}{l} e^{-\beta_z t}\right], \\ \Delta u_z(z, t) &= P_1\left[1-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{M} \sin \frac{M z}{l} e^{-\beta_z t}\right)\right], \\ U_z(z, t) &= 1-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{M} \sin \frac{M z}{l} e^{-\beta_z t}\right), \\ U_z(t) &= 1-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{M^2} e^{-\beta_z t}\right) . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(8)即为太沙基解答。

在真空联合堆载时, 不考虑欠固结和排水板真空度的损耗, 则得到如下解答:

$$\left. \begin{aligned} u_z(z, t) &= -P_0+(P_0+P_1) \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{2}{M} \sin \frac{M z}{l} e^{-\beta_z t}\right], \\ \Delta u_z(z, t) &= (P_0+P_1)\left[1-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{M} \sin \frac{M z}{l} e^{-\beta_z t}\right)\right], \\ U_z(z, t) &= 1-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{M} \sin \frac{M z}{l} e^{-\beta_z t}\right), \\ U_z(t) &= 1-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{M^2} e^{-\beta_z t}\right) . \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

这就是董志良真空联合堆载预压的坚向解答。

以上推演可见, JJJ 兼容现有的等应变坚向解答。

## 2 径向固结基本方程及解答

### 2.1 考虑欠固结及排水板真空度损耗的等应变径向解析解

在柱坐标系中, 砂井轴对称的固结控制方程为

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}=-\frac{1}{E_s} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}, \quad (10)$$

$$\frac{k_s}{\gamma_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (r_w \leqslant r \leqslant r_s), \quad (11)$$

$$\frac{k_h}{\gamma_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (r_s \leqslant r \leqslant r_e), \quad (11)$$

$$2 \pi r_w d z \frac{k_s}{\gamma_w} \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=r_w}=\pi r_w^2 \frac{k_w}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2}, \quad (12)$$

式中,  $u$  为土中超孔压,  $u_w$  排水板中超静孔压,  $u_r$  径向超静孔压,  $r_w$  水的重度,  $k_w$  砂井渗透系数,  $k_h$  土的渗透系数,  $k_s$  涂抹层的渗透系数;  $E_s$  体积压缩模量,  $\varepsilon_v$  是体积应变,  $r$  为离竖井中心的半径,  $t$  为固结时间。

仍采用 Barron 的所有基本假设, 与坚向固结解答类似增加欠固结超孔压同坚向固结条件, 方程的定解条件见表 1。

表 1 固结方程的初始条件和边界条件

Table 1 Initial and boundary conditions

条件	真空联合堆载	堆载
荷载	真空荷载 $P_0$ , 堆载荷载: $P_1$	真空荷载 $P_0=0$ , 堆载荷载: $P_1$
排水板	$A_{1-1} \cdot u_w _{z=0} = -P_0$ $A_{1-2} \cdot \frac{\partial u_w}{\partial z} _{z=l} = 0$	$A_{2-1} \cdot u_w _{z=0} = 0$ $A_{2-2} \cdot \frac{\partial u_w}{\partial z} _{z=l} = 0$
地基	$u_0(z) = u_0 + k_u z$ $B_{1-1} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} _{r=r_e} = 0$ $B_{1-2} \cdot u_r _{l=0} = -P_0 + P_1 + u_0(z)$ $B_{1-3} \cdot u_r _{r=r_w} = u_w$ $B_{1-4} \cdot u_r _{r=r_s} = u_s$	$u_0(z) = u_0 + k_u z$ $B_{2-1} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} _{r=r_e} = 0$ $B_{2-2} \cdot u_r _{l=0} = u_0(z) + P_1$ $B_{2-3} \cdot u_r _{r=r_w} = u_w$ $B_{2-4} \cdot u_r _{r=r_s} = u_s$

通过繁琐推导得到以下式(13)为JJJ径向通解,与竖向通解式(4)组成JJJ通解,可作为各类非线性边界解答的基础。

$$\left. \begin{aligned} \phi_p(z) &= p_0 + k_p z, \\ A_n &= \frac{2}{l^2} \frac{\rho^2}{\rho^2 + \eta^2} \int_0^l (u_0(z) - \phi_p(z)) \sin(\eta z) dz, \\ u_w &= \phi_p(z) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}, \\ u_s &= u_s(z, t) = u_w + \frac{\gamma_w}{2k_s} \left( r_e^2 \ln s - \frac{r_s^2 - r_w^2}{2} \right), \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\lambda \eta^2}{\rho^2 E_s} \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}, \\ u_r &= u_w + \frac{\gamma_w}{2k_s} \left( r_e^2 \ln \frac{r}{r_w} - \frac{r^2 - r_w^2}{2} \right), \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\lambda \eta^2}{\rho^2 E_s} \sin(\eta z) e^{-\beta_r t} \quad (r_w \leq r \leq r_s), \\ u_r &= u_s + \frac{\gamma_w}{2k_h} \left( r_e^2 \ln \frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2} \right), \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\lambda \eta^2}{\rho^2 E_s} \sin(\eta z) e^{-\beta_r t} \quad (r_s \leq r \leq r_e), \\ \beta_r &= \frac{\lambda \eta^2}{(\rho^2 + \eta^2)}, \quad \lambda = \frac{8C_h}{d_e^2 F_{av}}, \quad \rho^2 = \frac{8K_h(n^2 - 1)}{K_w d_e^2 F_{av}}, \\ C_h &= \frac{k_h(1+e)}{\gamma_w * a_v}, \quad n = \frac{r_e}{r_w}, \\ F_{av} &= \left( \ln \frac{n}{s} + \frac{k_h}{k_s} \ln s - \frac{3}{4} \right) \frac{n^2}{n^2 - 1} + \frac{s^2}{n^2 - 1} \left( 1 - \frac{k_h}{k_s} \right), \\ &\quad \left( 1 - \frac{s^2}{4n^2} \right) - \frac{k_h}{k_s} \frac{1}{n^2 - 1} \frac{4n^2 - 1}{4n^2}, \\ \eta &= \frac{2m+1}{2l} \pi, \quad (m \in (0, N)). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中,与竖向解答相同,  $\phi_p(z)$  也是板心超孔压方程分离变量法解答时设  $\eta=0$  的特解。径向平均  $\bar{u}_r(t)$  和整体平均超孔压  $\bar{u}_r(t)$  为

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_r(t) &= \phi_p(z) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\rho^2 + \eta^2}{\rho^2} \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}, \\ \bar{u}_r(t) &= p_0 + \frac{k_p l}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\rho^2 + \eta^2}{\rho^2} \frac{1}{M} e^{-\beta_r t}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

代入初始条件求通项  $A_n$  为

$$A_n = \left( P_1 + P_0 + \frac{(k_u - k_p)l}{M} (-1)^m \right) \frac{2}{M} \frac{\rho^2}{\rho^2 + \eta^2}. \quad (15)$$

根据式(13),  $\beta_r = \frac{\lambda \eta^2}{(\rho^2 + \eta^2)}$ , 从而得到

$$\frac{\eta^2}{(\rho^2 + \eta^2)} = \frac{\lambda - \beta_r}{\lambda}, \quad , \quad (16)$$

令  $\xi_s = k_u - k_p$ ,  $(17)$

将式(15)、(16)代入式(13)、(14)得到考虑欠固结和排水板真空损耗的完整解析解为

$$\left. \begin{aligned} u_w(z, t) &= -P_0 + k_p z + \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{M} (-1)^m \right) \cdot \\ &\quad \frac{2}{M} \frac{\lambda - \beta_r}{\lambda} \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}, \\ u_s(r_s, z, t) &= u_w + \frac{\gamma_w}{2k_{sm}} \frac{1}{E_s} \left( r_e^2 \ln s - \frac{r_s^2 - r_w^2}{2} \right), \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{M} (-1)^m \right) \frac{2}{M} \beta_r \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}, \\ u_r &= u_r(r, z, t) \quad (r_w \leq r \leq r_s), \\ u_r &= u_w + \frac{\gamma_w}{2k_{sm}} \frac{1}{E_s} \left( r_e^2 \ln \frac{r}{r_w} - \frac{r^2 - r_w^2}{2} \right), \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{M} (-1)^m \right) \frac{2}{M} \beta_r \sin(\eta z) e^{-\beta_r t} \\ &\quad (r_s \leq r \leq r_e), \\ u_r &= u_s + \left\{ \frac{\gamma_w}{2k_h} \frac{1}{E_s} \left( r_e^2 \ln \frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2} \right) \right\}, \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{M} (-1)^m \right) \frac{2}{M} \beta_r \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式(18)、(19)是在欠固结和考虑损耗的边界条件下通过求通项  $A_n$  代入到通解求得的解析解,是严格的数理解答,且不难验证完全符合定解条件。式(18)、(19)就是JJJ径向解答,与传统等应变解答不同之处是增加了欠固结和排水板真空损耗的因素。JJJ竖向解答和JJJ径向解答共同构成了欠固结和排水板真空损耗的JJJ解析解。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_r(z,t) &= -P_0 + k_p z + \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{M} (-1)^m \right) \frac{2}{M} \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}, \\ \Delta \bar{u}_r(z,t) &= P_1 + P_0 + \xi_s z - \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{M} (-1)^m \right) \frac{2}{M} \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}, \\ \bar{u}_r(z,t) &= 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left( P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{M} (-1)^m \right) \frac{2}{M} \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}}{P_1 + P_0 + \xi_s z}, \\ \bar{u}_r(t) &= -P_0 + \frac{k_p l}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{M} (-1)^m \right) \frac{2}{M^2} e^{-\beta_r t}, \\ \Delta \bar{u}_r(t) &= P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{2} - \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{M} (-1)^m \right) \frac{2}{M^2} e^{-\beta_r t}, \\ \bar{U}_r(t) &= 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left( P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{M} (-1)^m \right) \frac{2}{M^2} e^{-\beta_r t}}{P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

JJJ 解析解满足所有定解条件, 是径、竖向协调的。这是区别以往众多解答的另外一个方面。常见在排水板边界考虑了损耗的解析解仅在径向考虑, 而忽略了竖向也存在同样的损耗。相似地, 在考虑欠固结的解答上出现的单径向或竖向欠固结的问题都存在, 都是不协调的, 理论上不合理的。

## 2.2 JJJ 径向解答与现有解答的关系

### (1) 与谢康和堆载预压的径向解析解的关系

Hansbo 提出的非理想井解答改进了 Barron 的理想井解答, 谢康和改进了 Hansbo 解答, 同时还与吉国洋的自由应变解答对比, 证实其解答精度良好。下面首先与谢康和解答进行对比。

对于正常固结土堆载预压,  $k_u=0$ ,  $P_0=0$ ,  $k_p=0$ , 则代入式 (18), 得到堆载预压的解答为

$$\left. \begin{aligned} u_w &= P_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \frac{\lambda - \beta_r}{\lambda} \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}, \\ u_s &= u_w + \frac{\gamma_w}{2k_s} \frac{P_1}{E_s} \left( r_e^2 \ln s - \frac{r_s^2 - r_w^2}{2} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \beta_r \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}, \\ u_r &= u_w + \frac{\gamma_w}{2k_s} \frac{P_1}{E_s} \left( r_e^2 \ln \frac{r}{r_w} - \frac{r^2 - r_w^2}{2} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \beta_r \sin(\eta z) e^{-\beta_r t} \quad (r_w \leq r \leq r_s), \\ u_r &= u_s + \left\{ \frac{\gamma_w}{2k_h} \frac{P_1}{E_s} \left( r_e^2 \ln \frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2} \right) \right\} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \beta_r \sin(\eta z) e^{-\beta_r t} \quad (r_s \leq r \leq r_e). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式 (20) 就是谢康和径向固结解答, 说明 JJJ 解答完全兼容谢康和解答。

### (2) 与董志良解答的关系

对于正常固结土 ( $k_u=0$ ) 的真空预压, 不考虑真空度沿排水板的损耗 ( $k_p=0$ ) 则  $\xi_s = k_u - k_p = 0$ , 代入 JJJ 解答化简后得到考虑正负压的真空联合堆载的解析解为

$$\left. \begin{aligned} u_w &= -P_0 + (P_0 + P_1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \frac{\lambda - \beta_r}{\lambda} \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}, \\ u_s &= u_w + \frac{P_0 + P_1}{E_s} \frac{\gamma_w}{2k_s} \left( r_e^2 \ln s - \frac{r_s^2 - r_w^2}{2} \right), \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \beta_r \sin(\eta z) e^{-\beta_r t}, \\ u_r &= u_w + \frac{P_0 + P_1}{E_s} \frac{\gamma_w}{2k_s} \left( r_e^2 \ln \frac{r}{r_w} - \frac{r^2 - r_w^2}{2} \right), \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \beta_r \sin(\eta z) e^{-\beta_r t} \quad (r_w \leq r \leq r_s), \\ u_r &= u_s + \left\{ \frac{P_0 + P_1}{E_s} \frac{\gamma_w}{2k_h} \left( r_e^2 \ln \frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2} \right) \right\}, \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \beta_r \sin(\eta z) e^{-\beta_r t} \quad (r_s \leq r \leq r_e). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

这个化简结果就是董志良解答。可见 JJJ 径向解答完全兼容董志良解答。

### (3) 与 Indraratna 解答的关系

Indraratna 提出的排水板真空间度损耗的真空联合堆载预压径向排水固结解析解为

$$\bar{u} = \left[ \sigma_1 + \frac{(1+k_l)p_{0ax}}{2} \right] e^{\left( \frac{-8T_h}{\mu_{ax}} \right)} - \frac{(1+k_l)p_{0ax}}{2}, \quad (22)$$

式中,

$$\mu_{ax} = \frac{n^2}{n^2 - 1} \left( \ln \left( \frac{n}{s} \right) + \frac{K_h}{K_s} \ln(s) - 0.75 \right) + \frac{s^2}{n^2 - 1} \left( 1 - \frac{s^2}{4n^2} \right) + \frac{K_h}{K_s} \frac{1}{n^2 - 1} \left( \frac{s^4 - 1}{4n^2} - s^2 + 1 \right) + \frac{2\pi K_h}{3q_w} l^2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$\text{因为 } q_w = k_w \frac{\pi d_w^2}{4}, \quad G = \frac{K_h}{k_w} \frac{l^2}{d_w^2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad T_h = \frac{C_h}{d_e^2} \cdot t, \quad \text{则}$$

$$\Rightarrow \frac{8T_h}{\mu_{ax}} = \frac{8C_h}{d_e^2} \frac{1}{F_{av} + \frac{8}{3}G} t.$$

对照 JJJ 径向解答过程式 (16) 有

$$\beta_r = \frac{\lambda \eta^2}{(\rho^2 + \eta^2)} = \frac{\lambda M^2}{\rho^2 l^2 + M^2} = \frac{8C_h}{d_e^2} \frac{1}{F_{av} + \frac{8}{M^2} \frac{n^2 - 1}{n^2} G}.$$

$$\text{取式 (19) 中级数的第一项, } M^2 = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 = 2.4674,$$

而井径比  $n$  通常大于 10,  $\frac{n^2 - 1}{n^2} \approx 1$ ,  $G$  为井阻因子通常都小于 0.1,  $F_{av}$  通常较  $G$  大得多, 井阻项在分母中

占比不大, 因此

$$\beta_{r_0} t \approx \frac{8C_h}{d_e^2} \frac{1}{F_{av} + \frac{8}{2.467} G} t \approx \frac{8C_h}{d_e^2} \frac{1}{F_{av} + \frac{8}{3} G} t \approx -\frac{8T_h}{\mu_{ax}}.$$

可见 Indraratna 解答系数接近 JJJ 法解答级数的第一项。取式(19) 土体平均解答,

$$\bar{u}_r(t) = -P_0 + \frac{k_p l}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \left( P_1 + P_0 + \frac{\xi_s l}{M} (-1)^m \right) \frac{2}{M^2} e^{-\beta_r t}.$$

去除 Fourier 级数内  $\frac{\xi_s l}{M} (-1)^m$  项后取 Fourier 级数

第一项就是 Indraratna 解答, 因此该解答是被严重简化的 JJJ 径向解析解首项。该法近似于 JJJ 解答中不考虑损耗对于固结渗流的影响、且忽略  $\xi_s l$  的级数首项, 故该解答对损耗较小且不考虑欠固结的场合适用。

#### (4) 与自由应变解答的对比

谢康和曾经将其堆载解与吉国洋的自由应变解进行过对比验证。在固结土的堆载预压工况下, JJJ 解答与谢康和解答相同, 这说明本解答在同等情况下与自由应变解答也是接近的。

(5) 对比小结: 由以上推演对比可见, 同等条件下, JJJ 解答与现有的径向等应变解答是一致的, 不同在于 JJJ 解答是理论上考虑更多因素的解决方案。

### 2.3 $\varphi(z) = p_0 + k_p z$ 和级数项系数 $\frac{\xi_s l}{M} (-1)^m$ 的解析

径向解析解中较传统解析解增加了两项, 其中一项在级数外,  $\varphi(z) = p_0 + k_p z$ , 代表渗流外的其他损耗的函数, 为线性函数, 是固结方程的解的组成部分。容易证明  $\varphi(z)$  也完全可采用非线性函数来模拟, 与线性初始孔压一样可以得到通项的解答, 只是相对比较复杂, 而线性函数求得通项较为简单直观, 且精度足够, 利于工程计算和判断, 故采用线性衰减和欠固结的边界条件。

负压、损耗和负压水头是相关的。负压引起内外压差总应力, 土骨架有效应力就是负压总应力损耗, 并没有消失, 总应力模型的孔隙压力相当于参与固结的负压水头, 当真空负压值不变, 如损耗越多, 固结渗流的水头差越小。

在试验<sup>[7]</sup>和现场<sup>[6]</sup>均发现的排水板真空严重衰减, 数值可达 8~30 kPa/m<sup>[6]</sup>, 实际包括了损耗和渗流阻力损失。如果是渗流损耗, 则排水板内阻力巨大, 已经堵塞严重, 工后开挖检查表明, 事实上只有极少数板弯折, 板内比较清洁, 不存在堵塞问题, 因此这是额外损耗的证据, 但是占据多少份额, 暂无法解答。

由于损耗存在, 实际参与排水的负压水头减少, 因此, 改变了渗流进程和最终孔压消散数值。在级数项中出现的  $\frac{\xi_s l}{M} (-1)^m$ , 是三角分布超孔压解答的

Fourier 级数系数, 其中, 综合衰减系数  $\xi_s = k_u - k_p$ , 表明是欠固结正压斜率减去损耗率, 物理意义上代表损耗率和欠固结的三角超孔压综合梯度。当  $\xi_s = 0$ , 就会出现与经典解答一样的固结度过程, 但是, 排水板负压仍然按  $k_p$  的斜率衰减, 本质上是完全不同的。

综合衰减系数  $\xi_s$  非常重要, 影响到固结过程、孔压消散总量和最终加固效果。

## 3 综合固结度和超孔压

对于土体而言, 坚向固结和径向固结是同时发生的。Carrillo 等<sup>[5]</sup>证明了土的二维固结方程可以分解为坚向和径向解答, 并给出了土体实际固结度与径坚向固结度的关系为

$$U_{rz} = 1 - (1 - U_z)(1 - U_r). \quad (23)$$

根据式(23)和以上解答式可以计算土体的综合固结度  $U_{rz}$  及超孔压  $u_{rz}$ 。

由坚向解答式(6)和径向解答式(19),  $t=\infty$  时径坚向完全固结, 整理的  $z$  深度和土体平均的消散总孔压为

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{u}_{z_\infty}(z) &= \Delta \bar{u}_{r_\infty}(z) = u_0 + P_0 + P_1 + (k_u - k_p)z, \\ \Delta \bar{u}_{z_\infty} &= \Delta \bar{u}_{r_\infty} = u_0 + P_0 + P_1 + \frac{(k_u - k_p)}{2}l. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

代回式(23)得到

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Delta u}_{z_\infty} &= \overline{\Delta u}_{r_\infty} = \overline{\Delta u}_{z_\infty} = u_0 + P_0 + P_1 + (k_u - k_p)z, \\ \overline{\Delta u}_{z_\infty} &= \overline{\Delta u}_{z_\infty} = \overline{\Delta u}_{r_\infty} = u_0 + P_0 + P_1 + \frac{(k_u - k_p)}{2}l. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

结合式(25), 根据固结度定义, 整理得到平均超孔压及其消散值分布的计算式:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Delta u}_{rz}(z, t) &= [u_0 + P_0 + P_1 + (k_u - k_p)z] U_{rz}(z, t), \\ \overline{\Delta u}_{rz}(t) &= \left( u_0 + P_0 + P_1 + \frac{(k_u - k_p)}{2}l \right) U_{rz}(t), \\ \overline{u}_{rz}(z, t) &= [u_0 + P_0 + P_1 + (k_u - k_p)z] (1 - U_{rz}(z, t)), \\ \overline{u}_{rz}(t) &= \left( u_0 + P_0 + P_1 + \frac{(k_u - k_p)}{2}l \right) (1 - U_{rz}(t)). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式(24)~(26)是 JJJ 解析解的综合解答, 结合土体参数可预测加固的效果。如需对域内各点进行预测, 则可结合前面三维的径坚向解答可得超孔压分布和加固效果的全域解答。至此, 传统解答未涵盖的损耗因素和欠固结因素已包括在解答中, 较为完整解决了无砂真空预压吹填软土的排水固结设计理论和实用计算方法问题。

## 4 吹填软土自重固结

完全未固结是吹填软土重要的特点, 天然自重固

结是极为缓慢的。打设排水板后，将发生快速的径向排水固结。

在完全欠固结条件下，根据有效应力原理，软土自重超孔压为  $u_0(z) = \gamma'z$ ，其中  $\gamma'$  为浮重度，代入式(6), (18), (19) 得到吹填土打板后的径向固结解式(27)、(28)，代入(26)得到合成解答式(29)。

$$\left. \begin{aligned} u_z(z, t) &= \gamma'l \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (-1)^m \frac{2}{M^2} \sin \frac{Mz}{l} e^{-\beta_z t} \right], \\ \Delta u_z(z, t) &= \gamma'z \left[ 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left( (-1)^m \frac{2}{M^2} \frac{l}{z} \sin \frac{Mz}{l} e^{-\beta_z t} \right) \right], \\ \overline{\Delta u_z}(t) &= \frac{\gamma'l}{2} \left[ 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left( (-1)^m \frac{4}{M^3} e^{-\beta_z t} \right) \right], \\ \overline{U_z}(z, t) &= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left( (-1)^m \frac{2}{M^2} \frac{l}{z} \sin \frac{Mz}{l} e^{-\beta_z t} \right), \\ \overline{\overline{U_z}}(t) &= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left( (-1)^m \frac{4}{M^3} e^{-\beta_z t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_r}(z, t) &= \gamma'l \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (-1)^m \frac{2}{M^2} \sin \frac{Mz}{l} e^{-\beta_z t} \right], \\ \overline{\Delta u_r}(z, t) &= \gamma'z \left[ 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left( (-1)^m \frac{2}{M^2} \frac{l}{z} \sin \frac{Mz}{l} e^{-\beta_z t} \right) \right], \\ \overline{U_r}(z, t) &= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left( (-1)^m \frac{2}{M^2} \frac{l}{z} \sin \frac{Mz}{l} e^{-\beta_z t} \right), \\ \overline{\overline{U_r}}(t) &= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left( (-1)^m \frac{4}{M^3} e^{-\beta_z t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Delta u_{rz}}(z, t) &= \gamma'z U_{rz}(z, t), \\ \overline{\overline{\Delta u_{rz}}}(t) &= \frac{\gamma'l}{2} U_{rz}(t), \\ \overline{u_{rz}}(z, t) &= \gamma'z [1 - U_{rz}(z, t)], \\ \overline{\overline{u_{rz}}}(t) &= \frac{\gamma'l}{2} [1 - U_{rz}(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

自重固结其实代表了正三角分布超孔压荷载的作用规律。对本文第5节的试验案例，采用式(27)~(29) 解答求得打设排水板后静置期内自重预压结果如图1~3。

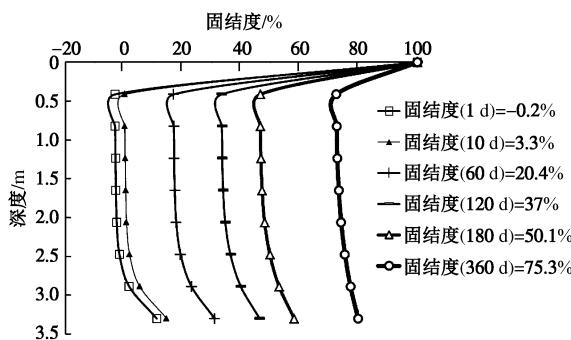


图 1 试验案例自重固结过程

Fig. 1 Degree of consolidation under gravity load in experiment

由图1可见：①自重固结初期10 d内，在加固土

体中部0.5~2.5 m之间有一个负固结度区域，表明出现了局域超孔压增大；②表层0.5 m和底部0.5 m两头固结度最好；③0.5 m处固结度极小值始终存在。沿深度非单调且始终存在极小值固结度的自重固结是与经典解析解单调递减的固结性状最突出的不同。

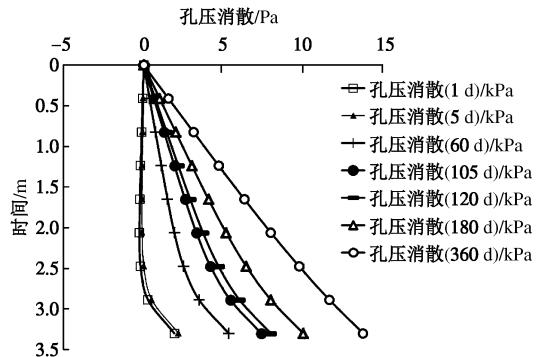


图 2 试验案例自重固结孔压消散

Fig. 2 Dissipation of excess pore pressure under gravity load

由图2可见，孔压消散沿深度单调增长，底部消散相对最快最多，消散速率分布与均匀堆载正好完全相反。

由图3可见，尽管在底部0.5 m范围孔压消散相对较多，上部2.8 m深度内超孔压仍然近似线性分布。可见，对于自重欠固结，固结一定时间后，剩余欠固结超孔压按线性假设精度损失不大。

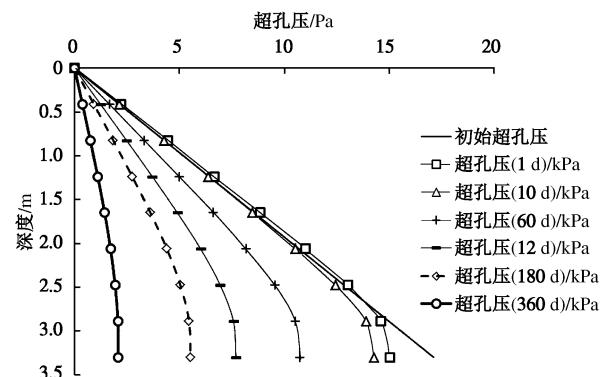


图 3 试验案例超孔压分布

Fig. 3 Distribution of excess pore pressure under gravity load

综上可见，吹填软土自重固结：①以固结度而言，始终在0.5 m附近存在一个极小值；②孔压消散底部快而中上部慢；③除底部小范围外，超孔压仍接近线性分布，因此本文第2, 3节解答对自重固结超孔压概化为沿深度线性分布是基本合理可行的。

## 5 JJJ 解答与传统解异同点分析

### 5.1 固结度沿深度分布特征

均匀荷载作用下平均超孔压分布沿深度[0, l]是单调函数，极小值在底部，但在试验案例和自重固结解答分析时发现，沿深度的固结度分布不再单调，极值

点也不在底部, 本节从数学特征分析包括混合分布的解析解固结度沿深度分布规律性。

### (1) 三角分布超孔压

第4节讨论的自重固结, 是完全欠固结的案例, 为纯粹正三角超孔压分布。式(27)  $U_z(z,t)$  对深度求导整理后, 求解非零正根可的固结度最小值的深度位置:

$$\tan\left(\frac{Mz}{l}\right) = \frac{Mz}{l} \quad . \quad (30)$$

$M=\frac{\pi}{2}$ , 解得  $\frac{z}{l} \approx 0.15$ , 本例  $l=3.3$  m, 则  $z \approx 0.5$  m。

这就是图1计算得到自重固结始终在0.5 m位置出现极小值的道理, 实际上应该是  $\frac{z}{l} \approx 0.15$  时为极小值点。

### (2) 混合分布问题

现将三角形超孔压均值与矩形三角荷载比称为三角荷载比, 用  $k_\sigma$  表示, 则

$$k_\sigma = \frac{\overline{\sigma}_\Delta}{\sigma_0} = \frac{1}{2} \frac{(k_u - k_p)l}{u_0 + P_0 + P_1} , \quad (31)$$

$k_\sigma$  为正, 表示超孔压为随深度增长, 成为正三角分布, 反之为负三角分布,  $k_\sigma=0$ , 为矩形分布。 $k_\sigma$  越大, 对固结和孔压消散的影响越大。

取式(6)、(19) 平均固结度式变换得

$$\left. \begin{aligned} U_z(z,t) &= 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \left( 1 + (-1)^m k_\sigma \frac{1}{M} \right) \frac{2}{M} \sin \eta z e^{-\beta_z t} \right]}{1 + k_\sigma \frac{2z}{l}}, \\ \overline{U}_r(z,t) &= 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \left( 1 + (-1)^m k_\sigma \frac{1}{M} \right) \frac{2}{M} \sin \eta z e^{-\beta_r t} \right]}{1 + k_\sigma \frac{2z}{l}}. \end{aligned} \right\} (32)$$

由式(32)可见: ①总固结度是以各荷载均值为权重的固结度的叠加; ②固结度分布受  $k_\sigma$  控制, 当  $k_\sigma$  足够大, 出现三角形分布主导的特征,  $k_\sigma$  比较小时, 呈现均布荷载主导的固结度分布特征, 总体为混合型; ③在固结度收敛的过程中, 由于均布荷载固结度函数在  $[0, l]$  单调无驻点, 而三角函数为单驻点, 因此, 混合问题如有极小值点, 则仅有一个, 位置受  $k_\sigma$  控制。

对固结度式(32)按Carrillo定理求  $U_{rz}$ :

$$\begin{aligned} U_{rz} &= 1 - (1 - U_z)(1 - U_r) = U_z(z,t) + U_r(z,t) - \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \left( 1 + (-1)^m \frac{k_\sigma}{M} \right) \sin \eta z \frac{2}{M} e^{-\beta_z t} \right] \\ U_z(z,t) \cdot U_r(z,t) &= 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \left( 1 + (-1)^m \frac{k_\sigma}{M} \right) \sin \eta z \frac{2}{M} e^{-\beta_z t} \right]}{1 + k_\sigma \frac{2z}{l}}. \\ &\quad \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \left( 1 + (-1)^m \frac{k_\sigma}{M} \right) \sin \eta z \frac{2}{M} e^{-\beta_r t} \right] \\ &\quad 1 + k_\sigma \frac{2z}{l} \end{aligned}$$

取级数首项为代表,  $M=\pi/2$ , 对深度求导解极值点, 整理得到以下隐式方程(33)可求得主项极值点的位置。

$$\tan\left(\frac{Mz}{l}\right) = \frac{M}{2k_\sigma} + \frac{Mz}{l} \quad \left( M = \frac{\pi}{2} \right) \quad . \quad (33)$$

正切曲线和直线一定有交点, 因此, 驻点一定存在。当  $k_\sigma < 0$ , 驻点在  $[0, l]$  域外, 固结度曲线沿深度单调下降;  $k_\sigma > 0$ , 域内存在极小值解。

根据固结度分布极值特点和固结度单调性正负三角超孔压的存在。利用极值位置, 甚至可判断损耗率与欠固结超孔压斜率的大小关系。

进一步分析式(33), 对正三角分布, 随  $k_\sigma$  增大, 右侧直线截距下移, 因而驻点深度就越浅, 但不会浅于三角荷载极值点位; 同理, 随  $k_\sigma$  减小, 极值点向底部移动; 当  $k_\sigma$  趋近于零,  $\frac{z}{l}=1$ , 也就是极小值在底部,  $k_\sigma=0$  回到经典单调下降的解答。将式(33)绘出如图4所示。 $k_\sigma=1$ , 在  $z/l=0.5$  位置出现极小值,  $k_\sigma \in [0, 10]$ , 查图4即可,  $k_\sigma > 10$ ,  $\frac{z}{l} \approx 0.15$ 。 $k_\sigma > 0$ , 将出现且只出现一个极值点, 从而预先判断加固过程中是否出现软弱层, 进而对此进行预防性设计。在现场反演中, 如果发现固结度分布的极小值点, 那么也说明固结过程是  $k_\sigma > 0$  固结。

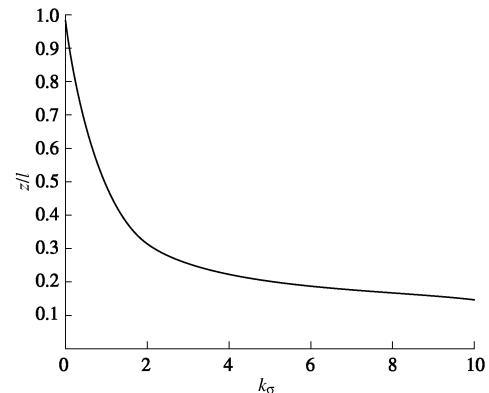


图4  $k_\sigma - z/l$  关系曲线

Fig. 4  $k_\sigma - z/l$  curves

## 5.2 土体平均固结度的特征

对径向固结, 设  $U_{r0}$  代表均布荷载的平均固结度,  $U_{r0} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{M^2} e^{-\beta_r t} \right]$ ,  $U_{r\Delta}$  是三角形分布的固结度, 则  $U_{r\Delta} = 1 - k_\sigma \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (-1)^m \frac{4}{M^3} e^{-\beta_r t} \right]$ , 且显然  $U_{r0} \geq U_{r\Delta}$ 。

$$\overline{U}_r(t) = 1 - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left[ \left( 1 + (-1)^m k_\sigma \frac{1}{M} \right) \frac{2}{M^2} e^{-\beta_r t} \right]}{1 + k_\sigma}$$

$$\frac{\left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-\beta_r t}\right) + k_\sigma (1 - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{4}{M^3} e^{-\beta_r t})}{1+k_\sigma} = \frac{U_{r0} + k_\sigma U_{r\Delta}}{1+k_\sigma}$$

$= U_r(k_\sigma, t)$ 。径向平均固结度  $U_r(k_\sigma, t)$  对  $k_\sigma$  求导,

$$\frac{\partial U_r(k_\sigma, t)}{\partial k_\sigma} = \frac{\partial}{\partial k_\sigma} \left( \frac{U_{r0} + k_\sigma U_{r\Delta}}{1+k_\sigma} \right) = \frac{U_{r\Delta} - U_{r0}}{(1+k_\sigma)^2} \leqslant 0 \quad (34)$$

因此, 径向平均固结度的排序为

$$\overline{\overline{U}_r}(k_\sigma < 0) > \overline{\overline{U}_r}(k_\sigma = 0) > \overline{\overline{U}_r}(k_\sigma > 0) \quad (35)$$

同理,

$$\overline{\overline{U}_{rz}}(k_\sigma < 0) > \overline{\overline{U}_{rz}}(k_\sigma = 0) > \overline{\overline{U}_{rz}}(k_\sigma > 0) \quad (36)$$

利用式 (34), 考虑到

$$\Delta \overline{\overline{U}_r} = \frac{d \overline{\overline{U}_r}}{ds} k_\sigma = \frac{k_\sigma (U_{r0} - U_{r\Delta})}{(1+k_\sigma)^2} \quad (37)$$

因  $(1+k_\sigma)^2 \geq 2k_\sigma, k_\sigma \geq 0, (1+k_\sigma)^2 \leq 2|k_\sigma|$ , 得

$$|\Delta \overline{\overline{U}_r}| \leq \frac{(U_{r0} - U_{r\Delta})}{2} \quad (38)$$

由式 (38) 同理可得

$$|\Delta \overline{\overline{U}_{rz}}| \leq \frac{(U_{rz0} - U_{rz\Delta})}{2} \quad (39)$$

均布分布固结度和三角分布的固结度绝对值之差一般都不超过 10%, 由式 (39) 说明, 即使不考虑三角分布, 利用均布分布的固结度绝对误差很小。

传统等应变固结解计算的就是均布分布荷载作用的固结, 因此传统解的固结度计算基本接近非均布工况。

### 5.3 超孔压消散值特征分析

孔压消散的意义比固结度更重要, 因为这就是土体获得的有效应力增量, 直接和加固效果相关。

根据 (25), 固结完成的超孔压消散值为

$$\Delta u_{rz\infty} = u_0 + P_0 + P_1 + (k_u - k_p)z = \sigma_0 \left(1 + 2k_\sigma \frac{z}{l}\right) \quad (40)$$

可见, 最终的超孔压消散是沿深度线性分布的。但实际工程中永远不会等到最终一刻。由于  $\Delta u_{rz\infty}$  是线性函数, 而  $\Delta u_{rz}(z, t) = \Delta u_{rz\infty} U_{rz}(z, t)$ , 经整理发现, 其极值特征与时间有关, 且与固结度函数明显不同。

消散值曲线在收敛为最终消散直线过程中, 是时刻变化的, 形成一系列函数族, 这是一个泛函逼近的问题, 如图 5 示意。

图 5 为  $k_\sigma = 0.25$  时, 孔压消散分布向最终消散直线收敛过程示意图。消散函数一个明显特点是以地表为不动点, 中下部向最终直线逼近。不难看出,  $k_\sigma > 0$  必然有极小值点; 如  $k_\sigma < 0$ , 由于最终的逼近线向左下倾斜, 沿深度消散分布也将左偏, 为单调递减函数, 极小值点在底部,  $k_\sigma < 0$  固结效果最差。

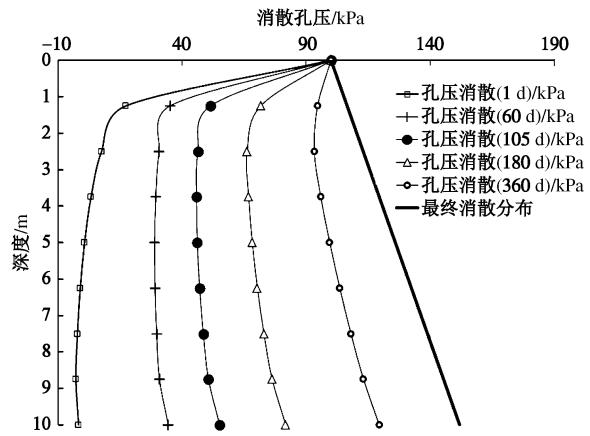


图 5 孔压消散过程函数族和最终消散孔压线

Fig. 5 Family functions of excess pore pressure approaching to ultimate dissipation line

固结度和孔压消散值极小点的工程意义在于, 当欠固结正三角超孔压具有普遍性时, 尤其软基加固较厚的情况下,  $k_\sigma > 0$  且较大时, 加固过程中可出现消散极小值分布在中上部的现象, 即加固结果出现中间软弱层, 因此需引起关注, 应防止平均固结度达标而实际不达标的现状。

判断是否出现消散极小值, 关注检测强度的分布即可。但一般先关注含水率分布, 土质相似时, 含水率最大位置就是强度最小的部位。

### 5.4 试算分析

取第 6 节试验的土体参数和厚度, 对以下 4 个组合用 JJJ 法进行固结计算: ①不考虑欠固结和损耗,  $k_\sigma = 0$  为传统单调解答; ②仅考虑欠固结( $q$ )  $k_\sigma = 0.12 > 0$ ; ③仅考虑损耗( $j$ ),  $k_\sigma = -0.07 < 0$ ; ④同时考虑( $q+j$ ),  $k_\sigma = 0.05 > 0$ 。计算 105 d 加固结束时的固结和消散情况如图 6 所示。由图可见, 当  $k_\sigma > 0$ , 无论固结度还是孔压消散, 在 1.5 m 附近出现极小值点; 当  $k_\sigma \leq 0$ , 单调下降, 这个计算结果和前面两节分析完全一致。

②组合仅考虑欠固结工况, 为加固最有利组合, 但加固 105 d 就结束的话, 1.5 m 附近中上部将出现软弱层。③组合仅考虑损耗, 为最不利组合, 固结度和孔压消散都小于  $k_\sigma = 0$  固结。对比②、③: 加固结束时在总体固结度相差无几的情况下, 两者在底部孔压消散相差近 1/3。经典组合①与考虑损耗的组合③对比, 固结度仍然基本相同, 孔压消散量相差约 1/6。

以上试验案例试算表明, 无论正负三角分布, 固结度与  $k_\sigma = 0$  的固结度分布基本相同, 但孔压消散量分布差异巨大, 必须关注消散沿深度的分布, 而不是仅关注固结度。

同时这里的计算表明: ①试验案例的 1.5 m 附近可能发生软弱层现象; ②1.0 m 上下分层化明显, 上

部固结好而下部基本均匀且软弱。

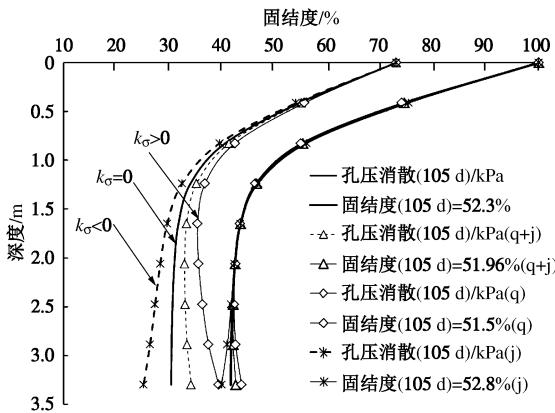


图 6 不同因素组合的固结度和孔压消散分布

Fig. 6 Predicted distributions of degree and dissipation of consolidation under different combinations of effects

## 6 新解析解的验证

对于欠固结和排水板真空损耗, 目前没有同等解答可供验证, 因此以实测数据进行验证为准。

### 6.1 验证试验方案

实验室承担了交通部重点平台项目<sup>[7]</sup>, 进行无砂真空预压吹填软土的准原型试验, 测试数据丰富完整, 作为本次解析解的验证案例。试验主装置长、宽、高尺寸为  $3\text{ m} \times 3\text{ m} \times 4.5\text{ m}$ , 装吹填土  $>3.3\text{ m}$ 。试验土取自温州吹填工程现场内的泥塘吹填土, 装箱时为均匀浆状, 完全欠固结, 强度基本为 0, 完全重塑, 土体完全无结构性。试验打设  $3 \times 3$  共 9 根 B 型排水板( $100\text{ mm} \times 4\text{ mm}$ ),  $0.8\text{ m}$  间距正方形布置, 打设深度  $l=3.3\text{ m}$ , 模拟现场实况进行无砂垫层真空预压试验。

试验布设了各类监测设施和仪器进行数据采集。表层膜下布置 2 个真空表, 用于分析表面真空分布。排水板心  $0\text{ m}$  (滤管),  $1.0$ ,  $2.0$ ,  $3.0\text{ m}$  深处布置了真空探头, 用于分析排水板内真空度的传递和分布。试验共布置了 9 条孔压测线, 在各深度处布置孔压计测量孔隙压力。布置了两个表层沉降板, 两个分层沉降孔, 一个浮环式地下水位仪和两个土压力盒, 可用于固结度过程分析。

在打排水板前, 采集初始土样, 室内试验结果其物理参数: 含水率为 83.5%, 重度为  $14.99\text{ kN/m}^3$ , 比重为 2.74, 液限为 51.4%, 塑限为 27.4%。打排水板后安装监测仪器间还是发生了部分自重沉降, 并发生沉降, 但并未记录, 由于自由水多, 仍应视为完全欠固结。

### 6.2 试验结果

#### (1) 试验过程和加固结果

试验共加载 110 d, 满载期 105 d, 平均膜下真空

度  $73\text{ kPa}$ 。加压开始, 启动所有监测测量, 试验结束一个礼拜后揭膜, 进行加固效果检测, 包括 6 条垂线的十字板测试, 3 垂线静力触探, 多垂线每  $20\text{ cm}$  取样进行相关的物理力学室内试验。

#### (2) 沉降过程

根据测量, 两个表层沉降板的沉降过程曲线如下图 7 所示。试验结束总沉降量  $S_{105d}=0.68\text{ m}$  (不含排水板打设后至测试开始的沉降), 根据<sup>#1</sup>点沉降过程, 采用双曲线法推得最终沉降量  $S_\infty=1.37\text{ m}$ , 初步确定试验结束时固结度  $U_{105d}=49.7\%$ , 考虑到抽真空前有一定先期沉降, 实际固结度会略高些。

#### (3) 含水率和十字板检测情况

分层平均含水率和十字板强度如图 8。十字板在  $0.5\text{ m}$  以上平均  $15.2\text{ kPa}$ ,  $0.5\text{ m}$  以下十字板强度平均  $11.1\text{ kPa}$ , 上好下差, 分层明显。

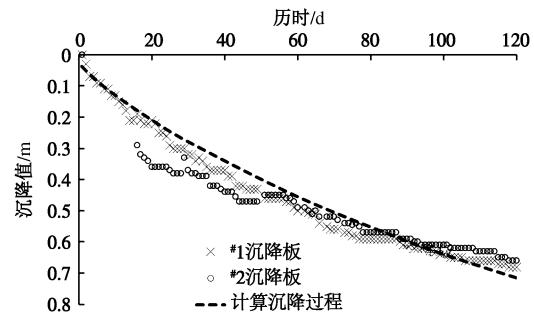


图 7 实测表层沉降过程与计算沉降过程

Fig. 7 Measured and JJJ-predicted process of surface settlement

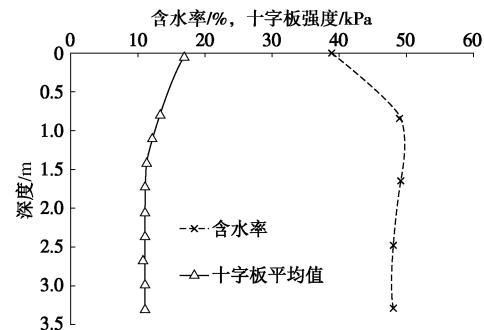


图 8 试验结束十字板和含水率沿深度分布

Fig. 8 Distribution of undrained shear strength and water content of soil at the end of tests

土体原平均含水率为 83.5%, 试验结束下降为平均 48.5%, 加固效果明显。分层平均含水率分布如下图 8。由图 8 可见: ①  $1.0\text{ m}$  处 49.2% 的平均含水率为全局最大值,  $0.5\text{ m}$  以上平均含水率 39%, 低于液限 12.7%, 低于平均值约 9%, 形成致密硬盖层, 固结良好; ②  $0.5\text{ m}$  以下, 含水率接近液限, 固结效果较差; 径向排水板周边  $20\text{ cm}$  内含水率平均 39.1%, 明显低于外侧平均 48.5% 的含水率。

#### (4) 真空度

试验满载期平均膜下真空度 73 kPa, 第一个月膜下真空度仅 60 kPa 出头, 中期保持在 65~75 kPa, 最后维持在 80 kPa 左右。

A2 板芯真空度测量结果数据如图 9, 虽然是非线性分布, 但沿深度近似直线分布; 随膜下真空度变动分布线跟随平移, 各时刻平均斜率基本稳定, 平均衰减率 12.4 kPa/m, 真空度后期整体变大。

#### (5) 孔压测量

初始孔压较大, 基本超过水压, 接近甚至超过总应力, 低压力测试可能精度不足。不同位置的孔压差别不小, 与相对位置有关。

#### (6) 试验小结

①试验土初期为浆状, 完全欠固结; ②加固后出现排水板周边和表层致密层; ③含水率 1.0 m 附近出现极大值, 十字板和静力触探极小值在中底部; ④对比常规真空预压, 沿板心真空度衰减严重; ⑤根据检测排水板侧形成 0.15~0.2 m 致密土柱的情况, 涂抹比可取  $S=3\sim 4$ 。

根据试验的情况, 固结荷载的参数: 真空荷载  $P_0=73$  kPa, 堆载荷载  $P_1=0$  kPa, 排水板真空损耗率  $k_p=7\sim 9.5$  kPa/m, 欠固结  $k_u=5.18$  kPa/m, 质量密度为  $14.99$  kN/m<sup>3</sup>, 干重度  $\gamma_d=8.17$  kN/m<sup>3</sup>。根据土体的室内试验, 固结参数: 竖向固结系数  $C_v=2.16\times 10^{-8}$  m<sup>2</sup>/s, 水平固结系数  $C_h=2.64\times 10^{-8}$  m<sup>2</sup>/s, 水平渗透系数  $K_h=5.45\times 10^{-9}$  m/s, 涂抹层渗透系数  $K_s=1.88\times 10^{-9}$  m/s, 排水板渗透系数  $K_w=1.04\times 10^{-4}$  m/s。采用附加应力组合  $e - \lg p$  压缩曲线, 考虑完全欠固结, 计算沉降量结果为 1.40 m; 采用双曲法对沉降过程反演求得  $S_\infty=1.37$  m, 两者基本一致, 取用 1.37 m 为最终沉降量, 因此试验结束的固结度为 49.7%。

采用的 B 型排水板, 按规范通水量  $>25$  cm<sup>3</sup>/s, 渗透系数  $>6.25\times 10^{-4}$  m/s, 按 1~1/6 倍进行试算, 结果固结度没有明显区别, 1/6 与实际固结度最为接近, 予以采纳。

#### 6.3 JJJ 法常规沉降过程验证

根据以上参数和条件, 采用 JJJ 解答计算的沉降过程与土体实测沉降过程对比见图 7。

考虑欠固结, 按 JJJ 法计算固结度为 51.85%, 不考虑欠固结, 按规范法计算为 50.74%, 略大于实际 49.7% 的固结度, 精度较高。据此 JJJ 法计算沉降过程如图 7 所示。

根据总体沉降过程的验证, 最终参数正确。以下计算中除排水板渗透系数对比性改变外, 土体和荷载

参数保持不变。

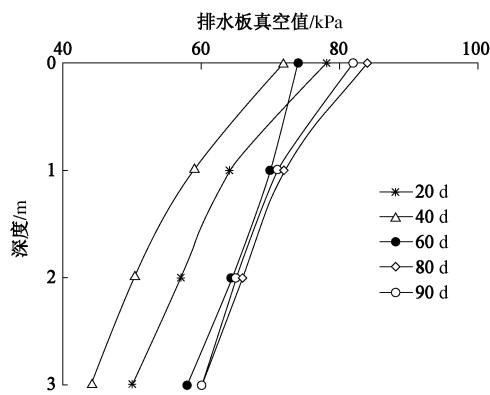


图 9 实测 A2 板芯真空度沿深度分布

Fig. 9 Measured vacuum pressure in PVD

#### 6.4 排水板心真空度验证

##### (1) 常规计算对比

采用董志良解答进行常规计算, 与考虑欠固结  $k_u=5.18$  kPa/m,  $k_p=0$  的 JJJ 法计算结果及实测情况如表 2, 图 10。由表 2 可见, 两者固结度与实际情况基本吻合, 且精度较高。计算板内真空梯度小于 1.4 kPa/m, 符合常规, 但与 13 kPa/m 左右的实测真空梯度无任何可比性, 因此, 传统计算无法反演本次试验。

表 2 正常固结计算板心梯度和固结度计算结果

Table 2 Vacuum distribution in regular consolidation

历时	板内平均渗流梯度/(kPa·m <sup>-1</sup> )		固结度/%	
	董	JJJ	董	JJJ
50 d	1.14	1.32	13.57	31.29
90 d	1.19	1.19	12.88	46.14
105 d	采用 6.2 (6) 中参数		50.74	50.06

注: JJJ 法  $k_u=5.18$  kPa/m,  $k_p=0$ 。

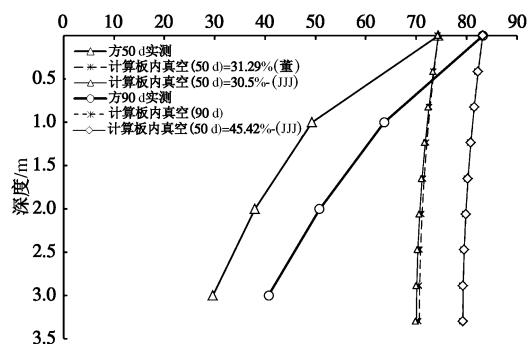


图 10 计算板内真空

Fig. 10 Predicted vacuum in PVD under regular consolidation

##### (2) 排水板渗透系数降为 1/100 计算

为了反演板心的衰减, 进一步提高井阻, 将排水板渗透系数降低为原参数的 1/100, 采用常规董志良法和 JJJ 法进行试算, 结果见表 3 和图 11。

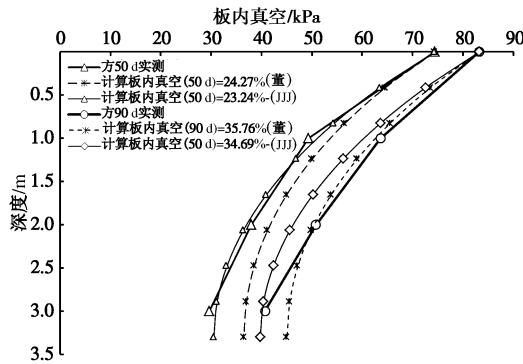


图 11 降低排水板渗透系数的计算真空度分布

Fig. 11 Vacuum distribution by reducing permeability of PVD

由图 11, 表 3 可见, 虽然排水板真空度分布基本吻合, 但 40% 以下的固结度却完全偏离实际的 49.7%。因此, 排水板真空度的衰减, 仅靠将排水板的渗透系数人为调整到不合理的程度是不符合实际的, 说明真空梯度不等于渗压梯度, 板内真空压强并不等同于实际的排水板边界渗压水头, 之间的差值就是损耗。

表 3 降低排水板渗透系数计算结果

Table 3 Vacuum distribution by reducing permeability of PVD

历时	板平均渗流梯度/(kPa·m <sup>-1</sup> )			固结度/%	
	董	JJJ	实测梯度	董	JJJ
50 d	11.49	13.29	13.57	24.27	23.24
90 d	11.55	13.17	12.88	35.70	34.69
105 d				39.46	38.37

(3) 考虑损耗和欠固结的 JJJ 法计算与常规不考虑损耗和欠固结计算的综合对比

既然存在损耗, 现考虑将以上实际梯度和计算梯度差值  $k_p \approx 11 \text{ kPa/m}$  代入 JJJ 法计算, 常规法排水板回到正常固结参数, 计算板心真空分布如图 12, 结果如综合图表对比, JJJ 法与常规法两者之间有两个共同点、两个重大不同和两个小的不同。

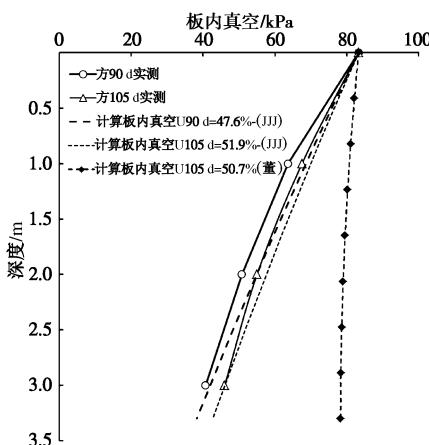


图 12 JJJ 法与常规计算的板心真空度比较

Fig. 12 Comparison of vacuum distributions by JJJ-method and regular method

两个相同: 固结度基本相同, 增加强度基本相同,

与结束检测的结果一致, 且误差率都很小, 因此说明两个方法在本例中预测固结度同为正确。固结度差距小, 主要还是三角荷载比小, 符合第 5 节的分析。

综合图表对比, JJJ 法与常规法两者之间有两个共同点、两个重大不同和两个小的不同。

两个相同: 固结度基本相同, 增加强度基本相同, 与结束检测的结果一致, 且误差率都很小, 因此说明两个方法在本例中预测固结度同为正确。固结度差距小, 主要还是三角荷载比小, 符合第 5 节的分析。

(1) 两个方法大不同: ①最终消散值差异较大; ②105 d 排水板心真空预测差距巨大。JJJ 法孔压消散沿深度线性递减、平均 63.41 kPa, 常规方法给出最终消散值 73 kPa 的定值。计算板心真空分布见图 12, 常规方法常规参数与实际真空度相差甚远, 而常规参数的 JJJ 法是基本接近实际的。

(2) 两个方法小不同: ①在 105 d 的孔压消散值不相同, JJJ 法平均 34.25 kPa, 常规方法 38.51 kPa, 在底部常规方法大于 JJJ 法约 1/3; ②105 d 强度预测 JJJ 法好于常规法。

下面根据 JJJ 法来解读本例这些问题。两个大不同和两个小不同其实是同一个问题: 最终消散值问题。因为  $\Delta u_{rz}(z, t) = \Delta u_{rz,\infty} U_{rz}$ , 因此, 当固结度基本相同而最终消散值不同, 那么孔压消散数值肯定不同。

由  $\Delta u_{\infty} = u_0 + P_0 + P_i + \xi_s z$ ,  $\xi_s = k_u - k_p = -5.82 < 0$ , 得  $k_o = -0.08$ , 因此, 消散值沿深度分布小于常规法。根据有效应力原理, 增加强度值为  $\Delta \tau_f = U_t \Delta u_{\infty} \tan \phi_{cu}$ , 因此, 本试验考虑损耗的 JJJ 法在试验结束时刻土体强度增量的预测小于常规法。由此可见以上两个大不同和两个小不同都可统一在 JJJ 法的孔压消散解答下。

综合图表对比, JJJ 法与常规法两者之间有两个共同点、两个重大不同和两个小的不同。

(3) 两个方法相同: 固结度基本相同, 增加强度基本相同, 与结束检测的结果一致, 且误差率都很小, 因此说明两个方法在本例中预测固结度同为正确。固结度差距小, 主要还是三角荷载比小, 符合第 5 节的分析。

表 4 中传统常规法不仅不考虑损耗, 也不考虑欠固结。如给本例常规法增加欠固结的孔压消散, 那么常规方法预测的强度就更偏高, 就不是仅比实测高 5.0%。可见考虑了欠固结和损耗才真正符合实际情况, 也是 JJJ 法预测精度高的主因。

鉴于对于吹填软土的真空预压, 欠固结和损耗都是非常重要的要素, 目前仅 JJJ 法拥有较高的预测精度, 可作为设计理论的基础。

表 4 JJJ 法与常规方法计算结果对比

Table 4 Comparison between JJJ and regular solutions

方法	深度 /m	孔压消散 /kPa	固结度 /%	$\Delta u$ /kPa	增加强度 /kPa	十字板	误差 /%
JJJ 法 计算 结果 ( $k_p=11$ $k_{u0}=5.18$ $t=105$ d)	0.00 0.41 0.83 1.24 1.65 2.06 2.48 2.89 3.30 平均	73.00 52.96 37.58 29.88 26.53 24.67 23.12 21.41 19.09 34.25	100.0 75.0 55.1 45.4 41.8 40.4 39.4 38.1 35.5 51.87	73.0 70.6 68.2 65.8 63.4 61.0 58.6 56.2 53.8 63.4	16.46 14.25 12.55 11.70 11.33 11.12 11.03 10.92 10.51 12.18	16.90 13.35 12.12 11.28 11.03 11.07 11.12 10.92 11.07 12.05	-2.6 6.7 3.6 3.7 2.7 0.5 -1.5 -1.4 -5.1 0.7
常规董 志良法 计算结 果 ( $k_p=0$ , $k_{u0}=0$ , $t=105$ d)	0.00 0.41 0.83 1.24 1.65 2.06 2.48 2.89 3.30 平均	73.00 54.02 39.56 32.81 30.45 29.61 29.21 28.99 28.92 38.51	100.0 74.0 54.2 44.9 41.7 40.6 40.0 39.7 39.6 50.74	73.0 73.0 73.0 73.0 73.0 73.0 73.0 73.0 73.0 73.0	16.46 14.36 12.77 12.02 11.76 11.67 11.62 11.60 11.59 12.65	16.90 13.35 12.12 11.28 11.03 11.07 11.12 10.92 11.07 12.05	-2.6 7.6 5.4 6.6 6.6 5.4 4.6 6.3 4.8 5.0

注:  $\varphi=6.4^\circ$ ,  $c=8.4 \text{ kPa}$ ,  $\Delta\tau_f = U_i(\Delta u + u_0) \tan \phi_{cu}$ 。

#### (4) 常规法和 JJJ 法比较讨论

前面看到, 常规法和 JJJ 法预测的固结度差距很小, 基本一致。但 JJJ 法与常规法的关键不同, 在于消散值预测, 主要取决于综合衰减率  $\xi_s$ 。

当综合衰减系数  $\xi_s=0$ , 或者数值较小, 则计算结果两者基本相同, 也就是说, 当凑巧损耗率和欠固结梯度基本相同, 常规法与 JJJ 法是一致的。当然由式

(18) 可见, 两者在板心和土体超孔压数值仍是不同的, 仍然保持了  $k_p$  的衰减率, 因此消散值一样不意味着超孔压值也相同。当  $\xi_s < 0$ , 消散值较常规法减小, 加固效果下降。当  $\xi_s > 0$ , 消散值较常规法增加, 加固效果更好。

常规法不考虑欠固结, 但软土的欠固结很普遍, 如真空度损耗大, 欠固结会补偿部分损失, 从而减小  $\xi_s$  数值, 计算结果可能与 JJJ 法是接近的。如果真空损耗小, 欠固结甚至会超过损耗, 即  $\xi_s > 0$ , 常规法给人“低估了固结”的错觉, 但若采用 JJJ 解答预测给出的一定是固结更好、但中部稍差的加固效果。

前面证实, 发生真空间隙度严重衰减时真空间隙度并不等于实际的渗透阻力, 期间存在损耗。当损耗率大于  $10 \text{ kPa/m}$  时, 超过一般软土完全欠固结可补偿范围, 因此  $\xi_s < 0$ , 常规法一定是高估的, 而 JJJ 法将给出准确的、加固效果差于常规法的预测。

$\xi_s$  与深度有关, 这点要充分关注。回顾三角荷载比  $k_\sigma$  的讨论,  $k_\sigma = (k_u - k_p)l/2\sigma_0$ , 深度越深, 欠固结孔压绝对值越大, 对固结性状的影响越大。对于本例,

由于深度仅  $3.3 \text{ m}$ ,  $k_\sigma$  比较小, 影响相对小, 因此常规法也基本适合本例计算。假若将  $3.3 \text{ m}$  换做  $10 \text{ m}$ 、 $20 \text{ m}$ , 那么常规法偏离就不是几个百分点了。

以上对比计算也说明, 两者在固结度预测上差距很小, 且符合实际, 说明 JJJ 法和常规法在固结度计算上是可信的。常规法对于固结度计算是基本适用的, 但预测加固效果则需要有些运气, 相对而言 JJJ 法考虑了损耗和欠固结的存在, 是精确的。

#### (5) 验证结论

综上可见, JJJ 解析解与实际和试验情况是相符的, 较传统方法更为符合实际, 精度更高。JJJ 法是严格的数理解, 增加考虑了损耗和欠固结问题, 扩展了现有的固结解析解, 可供设计和工程人员参考使用。

## 7 JJJ 通解和解答应用的进一步讨论

### 7.1 径竖向的协调问题

JJJ 解答的径竖向是协调一致的, 径竖向同时考虑欠固结和损耗, 注意不能仅考虑径向或竖向。径竖向不协调的不利影响包括: ①利用 Carrillo 定理合成孔压是不正确的; ②对孔压消散的预测径、竖向是互相矛盾的; ③可致加固效果预测的较大误差甚至误判。

必须满足边界一致性的内在理由很简单: 因为排水体边界孔压是标量而非矢量, 在排水板边界孔压径向和竖向必须是相同的, 同时必须在竖向和径向边界条件考虑一致的初始条件, 以及相同的欠固结和损耗边界条件。

### 7.2 欠固结超孔压的确定

由本文自重固结的讨论可见, 线性分布对自重固结而言精度是足够的, 可解决大部分问题。但初始超孔压的分布形式可能多种多样, 下面稍作讨论。

①对于已知初始超孔压非线性分布情况, 可利用本文提供的 JJJ 通解求通项系数, 进而得到整个解答。②对于造地工程, 欠固结初始孔压数值及分布形式未知。对这类问题, 可考虑由完全欠固结状态开始进行全过程计算, 因为全过程荷载状态和时间是已知的。③对于天然软土, 沉积过程复杂, 残余超孔压往往无法准确掌握, 建议利用勘察资料的前期固结压力进行推断, 近似按线性分布的 JJJ 解答进行预测, 精度也是足够的。

### 7.3 排水板真空度损耗的考虑

关于排水板真空的严重衰减现象, 目前仅在无砂真空中常见, 常规真空预压也有报道, 尚无系统的研究成果或定论。因此在各种工况中如何使用和准确选取损耗率是困难的, 根据笔者的经验提出以下参考建议: ①如有类似试验, 可根据试验成果取用; ②如在现场监测数据结合终检效果反演, 才能对过程准确控制;

②堆载预压无需考虑损耗问题; ③本文提供的真空损耗分布公式是  $\phi_p(z) = p_0 + k_p z$ , 也就是存在常数损耗和比例损耗, 真空和真空联合堆载预压, 基本上都需同时考虑  $p_0$ ,  $k_u$  和  $k_p$ 。

#### 7.4 经验值和校正

此外根据笔者统计, 吹填超软土无砂真空预压板真空损耗率一般为 5~15 kPa/m, 平均 9~11 kPa/m, 可作为设计初值进行计算。然后可根据现场实测情况进行如下校正:

(1) 如实测值整体低于施加真空一个常数, 就是  $p_0$ 。

(2) 测得板内真空的衰减率, 然后扣减 1~3 kPa/m 的正常渗流损失, 就是  $k_p$  值。

(3) 衰减并非全深度直线递减, 达到一定深度后衰减率很低, 呈浅部快速、深部缓慢的衰减规律, 一般软土大于 3 m 处理深度以上才可能出现缓慢衰减情况, 吹填土则在 8 m 深度以上。

#### 7.5 各工况 JJJ 解的应用组合

综合以上讨论和本文提供的多组解答, 根据不同工况可采用不同的解答(竖向和径向)和参数, 见表 5 JJJ 固结解答组合应用方案。对于利用通解得到的所有径、竖向解答, 最后一定要采用 Carrillo 定理合成。非重新推导情况, 只需利用式(26)求深度平均和土体总体平均可以得到综合解答。

表 5 JJJ 固结解答组合应用方案

Table 5 Application combinations of JJJ analytical solutions

土类	堆载预压		真空+堆载	
	竖向	径向	竖向	径向
固结土	式(8)	式(20)	式(9)	式(21)
	$k_u = 0, \phi(z) = 0$		$k_p = 5 \sim 15 \text{ kPa/m}$ , 超软土	
			$p_0$ 根据实际情况选用	
欠固结超孔压线性分布	式(6)	式(18)、(19)	式(6)	式(18)、(19)
	$k_u$ 根据情况取用		$k_u$ 根据欠固结情况取用	
			$k_p = 5 \sim 15 \text{ kPa/m}$ , 超软土	
	$\phi(z) = 0$		$p_0$ 根据实际情况选用	
欠固结非线性分布表达式	已知欠固结	式(4)	式(13)、(14)	式(4)
		利用已知分布求通项, 代入通解得到解答		
			$k_u$ 根据欠固结情况取用	
		$\phi(z) = 0$	$k_p = 5 \sim 15 \text{ kPa/m}$ , 超软土	
			$p_0$ 根据实际情况选用	
未知欠固结分布		式(4)	式(13)、(14)	式(4)
		①人工造地建议采用全过程解答		式(13)、(14)
		②自然沉积根据勘察资料近似线性分布计算		
			$k_p = 5 \sim 15 \text{ kPa/m}$ , 超软土	
			$p_0$ 根据实际情况选用	

注:  $k_p$  值仅供参考, 可参考文献[11]。

## 8 结论和建议

(1) 在固结方程推导基础上提供了考虑各类工况的径竖向协调的 JJJ 数理方程通解。在引入了欠固结系数  $k_u$ 、损耗率系数  $k_p$  及综合衰减率  $\zeta_s$  后, 针对需要考虑欠固结和排水板真空度损耗因素的工况, 具体给出了相应的等应变竖向和径向固结解析解——JJJ 解答; JJJ 通解可解决更广泛的问题, 包括非线性边界条件, 而 JJJ 解答针对欠固结和排水板真空损耗为线性的具体问题, 特别适用于无砂真空预压处理吹填软土的工况。

(2) 本文给出与现有各种解答的关系, 证实与现有的等应变解答完全兼容, 较传统解答考虑了更多因素, 更为精确, 且径竖向协调。

(3) 通过无砂真压试验验证, 考虑了欠固结和板内真空损耗 JJJ 解答计算结果的固结度、沿深度固结性状、孔压消散预测和板心真空负压与试验实测情况十分吻合, 证明 JJJ 解答是符合实际的, 同时证实 JJJ 法胜任无砂真空复杂固结性状的预测。

(4) 引入了三角荷载比, 研究了三角荷载比与固结度和消散分布特性, 指出了正三角荷载过程固结度和消散分布将在中部出现极小值, 加固深度内可能出现软弱层, 需引起关注, 同时也给出了极小值位置与三角荷载比的关系及图表。

(5) 真空严重损耗可使无砂真空预压的加固效果低于传统理论的预测, 建议采用本文 JJJ 解答进行真空预压、真空联合堆载预压的加固设计; 在无真空荷载时, 去除真空荷载也可用于堆载预压设计。

(6) 高度欠固结性状, 属于正三角荷载比固结, 可使中间部位出现最小固结和消散点的现象, 但若存在真空大损耗, 情况就复杂得多, 建议采用本文 JJJ 法根据此点固结度和孔压消散预测进行加固方案的设计。

(7) 本文从理论上证明, 均布荷载的固结度与实际固结度是接近的, 误差不大, 为简化计算在设计中可采用均布荷载固结度代表。但是, 孔压消散值分布的区别很大, 谨防仅考虑固结度而不考虑消散值的分布, 发生加固设计的误判。

(8) 真空度沿排水板发生大衰减, 其中包括真空损耗, 而损耗规律目前研究不多, 本文未解决真空损耗的物理机理问题, 也未解决损耗率的问题, 是进一步研究的方向; 本文假设的线性损耗是一个近似, 给出的 9~11 kPa/m 的经验值, 对于吹填土较为接近, 但对于其他土类, 尚待进一步研究, 对于实际衰减为非线性, 还需进一步研究和探索。

## 参考文献:

- [1] BARRON R A. Consolidation of fine-grained soils by drain wells[J]. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1948, **113**(2346): 718 - 742.
- [2] HANSBO S. Consolidation of fine-grained soils by pre-fabricated drains[C]// Proceedings of the 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Stockholm, 1981: 667 - 62.
- [3] 谢康和, 曾国熙. 应变条件下砂井地基固结解析解[J]. 岩土工程学报, 1989, **3**(2): 4 - 9. (XIE Kang-he, ZENG Guo-xi. Analytical solution to consolidation of equal-strain drain wells[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1989, **3**(2): 4 - 9. (in Chinese))
- [4] 董志良. 堆载及真空预压砂井地基固结解析理论[J]. 水运工程, 1989, **3**(2): 1 - 7. (DONG Zhi-liang. Analytical solution to consolidation of drain wells under pre-surcharge and vacuum-surcharge practice[J]. Port & Waterway Engineering, 1989, **3**(2): 1 - 7. (in Chinese))
- [5] CARRILLO N. Simple two and three dimensional cases in the theory of consolidation of soils[J]. Math Phys, 1942, **21**: 1 - 5.
- [6] 唐彤芝, 董江平, 黄家青, 等. 薄砂层长短板结合真空预压法处理吹填淤泥土试验研究[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(5): 899 - 905. TANG Tong-zhi, DONG Jiang-ping, HUANG Jia-qing, et al. Experimental research on hydraulic filled mud consolidated by vacuum preloading method combining long and short boards with thin sand cushions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(5): 899 - 905. (in Chinese))
- [7] 蒋基安. 真空预压作用下淤泥质吹填重塑土地基内负压传递规律研究[R]. 上海: 交通行业疏浚技术重点实验室, 2014: 17 - 67, 118 - 146. (JIANG Ji-an. Research on mechanism of vacuum preloading and propagation in newly-dredge-filled soft-muddy foundation[R]. Shanghai: MOT Key Laboratory of Dredging Tech, 2014: 17 - 67, 118 - 146. (in Chinese))
- [8] 沈珠江, 陆舜英. 软土地基真空排水预压的固结变形分析[J]. 岩土工程学报, 1986, **8**(3): 7 - 15. (SHEN Zhu-jiang, LU Shun-ying. Analysis on consolidation and transform in soft foundation under vacuum preloading treatment[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1986, **8**(3): 7 - 15 (in Chinese))
- [9] 彭 勘, 刘汉龙, 陈永辉, 等. 真空一堆载联合预压法软基加固对周围环境的影响[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(5): 656 - 659. (PENG Jie, LIU Han-long, CHEN Yong-hui, et al. Effects of combined vacuum surcharge preloading to surrounding environment[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(5): 656 - 659. (in Chinese))
- [10] 张泽鹏, 李约俊, 冯淦清, 等. 塑料排水板在真空预压加固软基中的作用[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2002(2): 68 - 71. (ZHANG Ze-peng, LI Yue-jun, FENG Gan-qing, et al. Influence by PVD on vacuum-surcharge preloading on soft foundation[J]. Journal of Guang Zhou University (Natural Science Edition), 2002(2): 68 - 71. (in Chinese))
- [11] INDRARATNA B. Analytical and numerical solutions forecasting vertical drain including the effects of vacuum Preloading[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2005, **42**(4): 994 - 1014.