

DOI: 10.11779/CJGE201602015

# 移动简谐荷载作用下饱和土体中圆形隧道和轨道结构的动力分析

袁宗浩<sup>1, 2</sup>, 蔡袁强<sup>1, 2</sup>, 史 吏<sup>1, 2</sup>, 孙宏磊<sup>1, 2</sup>, 曹志刚<sup>1, 2</sup>

(1. 浙江大学滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310058; 2. 浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室, 浙江 杭州 310058)

**摘 要:** 采用解析法研究了移动简谐荷载作用下饱和土全空间中圆形衬砌隧道和轨道结构的动力响应, 用无限长圆柱壳模拟衬砌, 用 Biot 饱和多孔介质理论模拟土体, 用 Euler 梁理论模拟钢轨、浮置板并组成周期性的两层叠合梁单元, 结合轨道与衬砌仰拱处的力和位移连续条件, 实现轨道结构与衬砌及周围饱和土体的耦合。通过算例分析了荷载移动速度、自振频率对轨道结构位移、饱和土体位移及孔压的影响, 对比了连续浮置板轨道和离散浮置板轨道的动力特性。结果表明: 离散浮置板轨道情形下, 轨道结构和饱和土体响应频谱中存在由荷载周期通过不连续浮置板而引发的参数激励; 荷载自振频率接近轨道结构固有频率时产生共振, 对轨道结构和饱和土位移、孔压响应均有较大影响; 离散浮置板轨道和连续浮置板轨道动力特性有显著差异, 当荷载频率接近有限长浮置板形成驻波的频率时, 二者对应的自由场响应区别明显; 增大衬砌厚度可以显著减小饱和土位移响应。

**关键词:** 饱和土; 衬砌结构; 浮置板轨道; 动力响应; 移动简谐荷载

中图分类号: TU435

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2016)02-0311-12

**作者简介:** 袁宗浩(1990-), 男, 博士研究生, 主要从事土动力学方面的研究工作。E-mail: yuanzh@zju.edu.cn。

## Response of rail structure and circular tunnel in saturated soil subjected to harmonic moving load

YUAN Zong-hao<sup>1, 2</sup>, CAI Yuan-qiang<sup>1, 2</sup>, SHI Li<sup>1, 2</sup>, SUN Hong-lei<sup>1, 2</sup>, CAO Zhi-gang<sup>1, 2</sup>

(1. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 2. MOE Key

Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

**Abstract:** Dynamic responses of the rail structure and underground railway tunnel in the saturated soil under moving harmonic load are investigated by using the analytical method. The tunnel is simulated as a thin cylindrical shell with infinite length, and the soil is modeled as a saturated poroelastic medium using the Biot's theory. The infinite track with periodic double beam units is formulated as a periodic structure. The tracks and soil medium are coupled by the force and displacement compatibility conditions at the tunnel invert. The effects of load velocity and external frequency on track responses and displacements and pore pressure of saturated soil are investigated. The dynamic characteristics of floating slab tracks with discontinuous and continuous slabs are analyzed. It is found that there exists a parametric excitation in the spectra of track and soil responses due to the moving load periodically passing through the discontinuous slabs. Resonance phenomenon occurs when the external frequency of load is equal to the natural frequency of the tracks. The dynamic characteristics of floating slab tracks with discontinuous and continuous slabs have significant difference. The displacements and pore pressures of saturated soil will be amplified at the natural frequency arising from the standing waves propagating in the discontinuous slabs. The displacements of the saturated soil can be effectively reduced by increasing the tunnel thickness.

**Key words:** saturated soil; lining structure; floating slab track; dynamic response; moving harmonic load

## 0 引 言

地铁附近的建筑物、精密仪器及居民会受到地铁列车运行引起的振动影响, 当前中国各大城市的地铁建设飞速发展, 地铁列车运行引起的环境振动问题受到广泛关注, 并引起了工程研究人员的高度重视。

Metrikine 等<sup>[1]</sup>建立了二维解析模型, 将地铁简化为埋置于黏弹性地层中的欧拉梁, 研究了移动常荷载、简谐荷载和随机荷载作用下的地表位移响应; Forrest 等<sup>[2]</sup>

基金项目: 国家自然科学基金项目(11372274, 51208460, 51478424)

收稿日期: 2015-03-26

提出了 Pipe-in-Pipe 模型,建立了三维全空间地铁模型,并讨论了土与衬砌相互作用对位移的影响;Balendra 等<sup>[3]</sup>建立了二维频域有限元模型,分析了地铁列车引起的环境振动问题;Sheng 等<sup>[4]</sup>利用“离散波数法”建立了有限元-边界元模型,用以计算地下交通荷载引起的土体动力响应;刘维宁<sup>[5]</sup>等建立了“车辆-轨道基础-衬砌结构-地基系统”三有限元模型,计算分析了地铁列车运行引起的地面振动;Degrand 等<sup>[6]</sup>采用 Floquet 变换建立了周期性有限元-边界元模型,研究了隧道和土体的动力相互作用问题;Hung 等<sup>[7-8]</sup>提出了 2.5 维有限元-无限元耦合模型,用以预测地铁列车运行引起的地表振动,该模型考虑了轨道不平顺因素的影响;Bian 等<sup>[9]</sup>采用 2.5 维有限元结合能量吸收边界预测了隧道中由于列车运行而产生的地基振动。以上研究均将地基土体考虑为单相介质。然而,我国沿海地区大量的地铁都修建在饱和软土地层,很多时候地铁隧道位于地下水水位以下,将土体视为饱和两相介质更接近于实际。已有的移动荷载引起的土体动力响应研究表明:用单相介质理论模拟饱和土体将带来较大误差,无法准确预测整个体系的动力响应,且无法获得与孔压相关的物理量<sup>[10]</sup>。

目前一些学者采用 Biot<sup>[11]</sup>饱和多孔介质理论模拟饱和土体,并用来研究衬砌结构与饱和土体动力相互作用。Lu 等<sup>[12]</sup>利用势函数分解法,研究了移动轴对称荷载作用下饱和土中无衬砌隧洞的动力响应,并讨论了荷载速度影响;黄晓吉等<sup>[13]</sup>研究了饱和土中带有衬砌隧洞在移动环形荷载作用下的动力响应,比较了弹性土体隧洞和饱和土体隧洞动力响应的差异,说明了研究地铁隧道动力响应时采用饱和多孔介质理论的必要性;刘干斌等<sup>[14]</sup>研究了无限黏弹性饱和多孔介质中带有衬砌结构的圆柱孔洞表面受轴对称简谐荷载和流体压力作用下的频域响应问题;高广运等<sup>[15-16]</sup>将轨道结构简化为欧拉梁,建立了 2.5 维有限元饱和土体模型,研究了地下和地表移动列车荷载作用下地基的动力响应问题。虽然以上研究都将土体视为饱和多孔介质,但多采用轴对称或者平面应变模型进行分析,且没有考虑实际的轨道结构,无法研究地铁运行引起的轨道结构响应及周围土体的三维动力响应,显然,采用地铁中常用的浮置板轨道结构与饱和土中衬砌隧道耦合模型分析该问题更贴近实际。

本文采用无限长圆柱壳模拟衬砌,采用 Biot 饱和多孔介质理论<sup>[11]</sup>模拟衬砌周围土体,首先建立了衬砌-饱和土体三维全空间模型,将其用于计算变换域中的频率响应函数。然后用无限长 Euler 梁模拟钢轨,用沿荷载移动方向间断分布、两端自由的 Euler 梁模拟离散浮置板,同时钢轨扣件和板下支撑简化为连续分

布、具有频域复刚度的弹簧,根据衬砌仰拱处的力和位移连续条件,实现离散浮置板轨道与衬砌-饱和土体模型的耦合。在 Fourier 变换域内,联立轨道结构和衬砌-饱和土的动力控制方程,求得移动简谐荷载作用下,钢轨、浮置板位移和饱和土体位移、孔压响应,并利用快速 Fourier 逆变换 (IFFT),得到轨道结构和土体的时域响应。分析了荷载移动速度和自振频率对轨道结构、饱和土体动力响应的影响,对比了连续浮置板轨道和离散浮置板轨道动力特性。

## 1 饱和土中圆形衬砌隧道频率响应函数

本文所采用的坐标系统及三维几何模型见图 1。

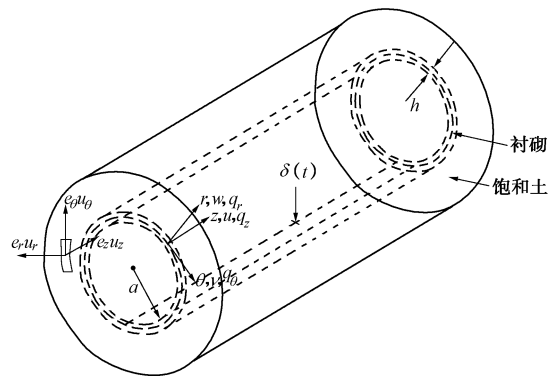


图 1 隧道和饱和土几何模型

Fig. 1 Geometric model for tunnel and saturated soil

### 1.1 衬砌结构振动方程

衬砌结构采用薄壳理论模拟<sup>[2]</sup>,衬砌在轴向  $z$ 、环向  $\theta$ 、径向  $r$  的振动方程如下:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} + \nu \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{h^2}{12} \left( \frac{1-\nu}{2a^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial \theta^2} \right) + a \frac{1-\nu^2}{Eh} q_z - \rho a \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \theta} + a \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{a} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{3(1-\nu)}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{3-\nu}{2a} \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial \theta} \right] + a \frac{1-\nu^2}{Eh} q_\theta - \rho a \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1b)$$

$$-\nu \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) - \frac{h^2}{12} \left( a \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{2}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) - \frac{h^2}{12} \left( -\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial \theta^2} - \frac{3-\nu}{2a} \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^3} w + \frac{2}{a^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + a \frac{1-\nu^2}{Eh} q_r - \rho a \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1c)$$

式中  $E$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  分别为衬砌的杨氏模量、密度和泊

松比;  $a$  为衬砌壳体中面的半径,  $h$  为衬砌厚度;  $u, v, w$  为衬砌中面沿  $z, \theta, r$  方向的位移;  $q_z, q_\theta, q_r$  表示作用在衬砌中面沿  $z, \theta, r$  方向的净荷载。

衬砌结构振动方程是一组偏微分方程, 在环向  $\theta$  上采用模态叠加法, 轴向  $z$  和时间  $t$  上采用 Fourier 变化法进行求解。衬砌结构各应力、位移分量可写为成如下形式<sup>[2]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} q_z(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_{zn} \cos(n\theta), \\ q_\theta(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\theta n} \sin(n\theta), \\ q_r(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_{rn} \cos(n\theta), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(n\theta), \\ v(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} V_n \sin(n\theta), \\ w(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n \cos(n\theta). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中  $Q_{zn}, Q_{\theta n}, Q_{rn}$  为应力在环向模态  $n$  下的分量;  $U_n, V_n, W_n$  为位移在环向模态  $n$  下的分量;  $n$  为环向模态数, 取值为不小于 0 的整数。

定义函数  $f(z, t)$  关于坐标  $z$  和时间  $t$  的双重 Fourier 变换对为

$$\tilde{f}(\xi, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t) e^{-i(\xi z + \omega t)} dz dt, \quad (4a)$$

$$f(z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi, \omega) e^{i(\xi z + \omega t)} d\xi d\omega, \quad (4b)$$

式中,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  是角频率,  $\xi$  是波数, 上标“ $\sim$ ”表示变量为频率-波数域中的量。

将式 (2)、(3) 带入式 (1a) ~ (1c), 并利用式 (4a) 进行双重 Fourier 变换, 可得变换域内不同模态  $n$  下衬砌结构振动方程的矩阵形式:

$$[A] \begin{Bmatrix} \tilde{U}_n \\ \tilde{V}_n \\ \tilde{W}_n \end{Bmatrix} = \frac{-a(1-v^2)}{Eh} \begin{Bmatrix} \tilde{Q}_{zn} \\ \tilde{Q}_{\theta n} \\ \tilde{Q}_{rn} \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

式中,  $\tilde{Q}_{zn}, \tilde{Q}_{\theta n}, \tilde{Q}_{rn}, \tilde{U}_n, \tilde{V}_n, \tilde{W}_n$  是式 (2)、(3) 中各变量在频率-波数域内的对应量, 矩阵  $[A]$  的各元素表达式可参见文献[2]。

## 1.2 饱和土体运动方程

衬砌周围土体为均质饱和和多孔介质, 根据 Biot<sup>[11]</sup> 波动理论:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \alpha^2 M + \mu) u_{j,ji} + \alpha M w_{j,ji} = \rho_b \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i, \quad (6a)$$

$$\alpha M u_{j,ji} + M w_{j,ji} = \rho_f \ddot{u}_i + m \ddot{w}_i + b \dot{w}_i. \quad (6b)$$

式中  $u_i, w_i$  分别为土骨架位移和流体相对于土骨架的位移;  $u_i, w_i$  上的点表示对时间  $t$  的导数;  $\lambda, \mu$  为

土骨架的 Lamé 常数;  $\alpha, M$  为表征土颗粒和流体压缩性的常数;  $b = \eta/k_d$  为反映黏性耦合的参数,  $\eta, k_d$  分别为流体的动力黏滞系数和土的动力渗透系数;  $\rho_b = n_0 \rho_f + (1-n_0) \rho_s$ ,  $n_0$  为土体的孔隙率,  $\rho_f, \rho_s$  分别为流体密度和土骨架密度;  $m = \rho_f/n_0$ 。

饱和和多孔介质的应力应变关系:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e + 2\mu \varepsilon_{ij} - \alpha \delta_{ij} p_f, \quad (7a)$$

$$p_f = -\alpha M e + M \zeta, \quad (7b)$$

式中,  $\zeta = -w_{i,i}$ ,  $\sigma_{ij}$  为总应力分量,  $e = u_{i,i}$  为土骨架体变,  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  为土骨架应变,  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 符号,  $p_f$  为孔压。

根据矢量场的 Helmholtz 分解定理, 把式 (6a)、(6b) 中土骨架位移  $u$  和流体相对于土骨架的位移  $w$  用标量势和矢量势表示为

$$\left. \begin{aligned} u &= \nabla \varphi + \nabla \psi, \\ w &= \nabla \chi + \nabla \theta, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中,  $\varphi, \psi$  分别为土骨架位移的标量势函数和矢量势函数,  $\chi, \theta$  分别为流体相对位移的标量势函数和矢量势函数。

饱和和多孔介质运动方程 (式 (6)) 是关于空间坐标和时间的偏微分方程组, 在柱坐标下可以通过模态叠加法 (环向  $\theta$ ) 和 Fourier 变换法 (轴向  $z$  和时间  $t$ ) 将其化为关于径向  $r$  的常微分方程进行求解。

将式 (8) 代入波动方程 (6a)、(6b), 并对时间  $t$  做 Fourier 变换可得

$$\begin{bmatrix} \lambda + \alpha^2 M + 2\mu & \alpha M \\ \alpha M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^2 \hat{\varphi} \\ \nabla^2 \hat{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_b \omega^2 & -\rho_f \omega^2 \\ -\rho_f \omega^2 & -m \omega^2 + i \omega b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{\chi} \end{bmatrix}, \quad (9a)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^2 \hat{\psi} \\ \nabla^2 \hat{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_b \omega^2 & -\rho_f \omega^2 \\ -\rho_f \omega^2 & -m \omega^2 + i \omega b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix}, \quad (9b)$$

式中,  $\nabla^2$  是 Laplace 算子, 上标“ $\wedge$ ”表示变量为频域中的量。

由式 (9a)、(9b) 可得 Helmholtz 方程:

$$\nabla^2 \hat{\varphi}_{fs} + k_{fs}^2 \hat{\varphi}_{fs} = 0, \quad (10)$$

$$\nabla^2 \hat{\psi} + k_t^2 \hat{\psi} = 0, \quad (11)$$

式中,  $k_f, k_s$  和  $k_t$  分别表示饱和土中快纵波、慢纵波和横波的复波数, 表达式为

$$k_{fs}^2 = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (12)$$

$$k_t^2 = \frac{C}{D}, \quad (13)$$

式中,  $A = (\lambda + 2\mu)M$ ,  $B = (\lambda + \alpha^2 M + 2\mu)(m \omega^2 - i \omega b) + \rho_b \omega^2 M - 2\rho_f \omega^2 \alpha M$ ,  $C = \rho_b \omega^2 (m \omega^2 - i \omega b) - \rho_f^2 \omega^4$ ,  $D = \mu(m \omega^2 - i \omega b)$ 。

利用式(9)~(13),经推导整理,频域内各势函数的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi} &= \hat{\phi}_f + \hat{\phi}_s, \\ \hat{\chi} &= \xi_f \hat{\phi}_f + \xi_s \hat{\phi}_s, \\ \hat{\theta} &= \xi_t \hat{\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中,

$$\xi_{fs} = \frac{(\lambda + \alpha^2 M + 2\mu)k_{fs}^2 - \rho_b \omega^2}{\rho_f \omega^2 - \alpha M k_{fs}^2}, \quad \xi_t = -\frac{\rho_t \omega^2}{m\omega^2 - ib\omega}.$$

衬砌周围的全空间饱和土体三维模型及所采用的柱坐标系见图1,饱和土体内径为 $a$ (与衬砌壳体中面半径相匹配),外径无穷大,沿轴向无限延伸。在柱坐标系 $(r, \theta, z)$ 中,式(10)、(11)中的Laplace算子可表达为<sup>[2]</sup>

$$\nabla^2 \hat{\phi}_{fs} = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}_{fs}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{fs}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{fs}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{fs}}{\partial z^2}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{\psi} &= \left( \nabla^2 \hat{\psi}_r - \frac{\hat{\psi}_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \hat{\psi}_\theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r + \\ &\quad \left( \nabla^2 \hat{\psi}_\theta - \frac{\hat{\psi}_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \hat{\psi}_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\theta + \nabla^2 \hat{\psi}_z \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ 分别为沿柱坐标系主方向 $r, \theta, z$ 的单位向量, $\hat{\psi}_r, \hat{\psi}_\theta, \hat{\psi}_z$ 为 $\hat{\psi}$ 的分量。

根据式(8)和(14)将土骨架沿 $r, \theta, z$ 方向的位移分量和流体沿 $r$ 方向的相对位移分量用势函数表达为

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_\theta &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_f}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{\phi}_s}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \hat{\psi}_r}{\partial z} - \frac{\partial \hat{\psi}_z}{\partial r}, \\ \hat{u}_z &= \frac{\partial \hat{\phi}_f}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\phi}_s}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{\psi}_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}_r}{\partial \theta}, \\ \hat{u}_r &= \frac{\partial \hat{\phi}_f}{\partial r} + \frac{\partial \hat{\phi}_s}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{\psi}_\theta}{\partial z}, \\ \hat{w}_r &= \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

类似于式(2)、(3),可设各势函数具有如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}_f &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_1(z, r, n) \cos n\theta, \\ \hat{\phi}_s &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_2(z, r, n) \cos n\theta, \\ \hat{\psi}_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}_r(z, r, n) \sin n\theta, \\ \hat{\psi}_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}_\theta(z, r, n) \cos n\theta, \\ \hat{\psi}_z &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}_z(z, r, n) \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将式(15)、(16)、(18)代入式(10)、(11),并对坐标 $z$ 做Fourier变换,可得

$$\left. \begin{aligned} r^2 \tilde{f}_1'' + r \tilde{f}_1' - [(\xi^2 - k_f^2)r^2 + n^2] \tilde{f}_1 &= 0, \\ r^2 \tilde{f}_2'' + r \tilde{f}_2' - [(\xi^2 - k_s^2)r^2 + n^2] \tilde{f}_2 &= 0, \\ r^2 \tilde{g}_r'' + r \tilde{g}_r' - [(\xi^2 - k_t^2)r^2 + n^2 + 1] \tilde{g}_r + 2n \tilde{g}_\theta &= 0, \\ r^2 \tilde{g}_\theta'' + r \tilde{g}_\theta' - [(\xi^2 - k_t^2)r^2 + n^2 + 1] \tilde{g}_\theta + 2n \tilde{g}_r &= 0, \\ r^2 \tilde{g}_z'' + r \tilde{g}_z' - [(\xi^2 - k_t^2)r^2 + n^2] \tilde{g}_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

式中的求导符号表示对 $r$ 求偏导。

利用规范变换不变性,可设 $\tilde{g}_\theta = -\tilde{g}_r$ ,代入式(19a)第三式,可得

$$r^2 \tilde{g}_r'' + r \tilde{g}_r' - [(\xi^2 - k_t^2)r^2 + (n+1)^2] \tilde{g}_r = 0. \quad (19b)$$

可见式19(a)第一、二、五式为 $n$ 阶修正Bessel方程,式19(b)为 $n+1$ 阶修正Bessel方程,以上Bessel函数的解有如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_1 &= A_1 I_n(\alpha_1 r) + B_1 K_n(\alpha_1 r), \\ \tilde{f}_2 &= A_2 I_n(\alpha_2 r) + B_2 K_n(\alpha_2 r), \\ \tilde{g}_r &= -\tilde{g}_\theta = A_r I_{n+1}(\beta r) + B_r K_{n+1}(\beta r), \\ \tilde{g}_z &= A_z I_n(\beta r) + B_z K_n(\beta r). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中 $\alpha_1^2 = \xi^2 - k_f^2, \alpha_2^2 = \xi^2 - k_s^2, \beta^2 = \xi^2 - k_t^2; I_n, K_n$ 为第一、二类 $n$ 阶修正Bessel函数; $A_1, B_1, A_2, B_2, A_r, B_r, A_z$ 及 $B_z$ 为待定系数,由模型边界条件确定。

结合式(14),将式(18)中各势函数代入式(17)中,并对坐标 $z$ 做Fourier变换,不同模态 $n$ 下各位移分量可表示为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_r &= \left( \tilde{f}_1' + \tilde{f}_2' + i\xi \tilde{g}_r + \frac{n}{r} \tilde{g}_z \right) \cos n\theta, \\ \tilde{u}_\theta &= \left[ -\frac{n}{r} (\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) + i\xi \tilde{g}_r - \tilde{g}_z' \right] \sin n\theta, \\ \tilde{u}_z &= \left[ i\xi (\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) - \frac{n+1}{r} \tilde{g}_r - \tilde{g}_r' \right] \cos n\theta, \\ \tilde{w}_r &= \left[ \xi_f \tilde{f}_1' + \xi_s \tilde{f}_2' + \frac{n}{r} \xi_t \tilde{g}_z + i\xi \xi_t \tilde{g}_r \right] \cos n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由应力应变关系(7a)、(7b)和式(21),求得各应力分量(含孔压)在不同模态 $n$ 下的表达式,具体见参考文献[17]。

将式(20)代入式(21)中,可得不同模态 $n$ 下,饱和土的土骨架位移频率-波数域中的矩阵表达式:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_r \\ \tilde{u}_\theta \\ \tilde{u}_z \end{Bmatrix} = [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{U}] \cdot \mathbf{D}. \quad (22)$$

同理,总应力矩阵表达式为

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{rr} \\ \tilde{\sigma}_{r\theta} \\ \tilde{\sigma}_{rz} \end{Bmatrix} = [\mathbf{S}] \cdot [\mathbf{T}] \cdot \mathbf{D}. \quad (23)$$

式中

$$\mathbf{D} = \{A_1 \ B_1 \ A_2 \ B_2 \ A_r \ B_r \ A_z \ B_z\}^T, \\ [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{U}] \text{ 和 } [\mathbf{T}] \text{ 均为 } 3 \times 8$$

的矩阵, 矩阵元素为  $u_{ij}$ ,  $t_{ij}$ , 具体表达式见文献[17]。

比较式 (22)、(23) 与式 (5), 为求解方便, 做如下定义:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{rn} \\ \tilde{U}_{\theta n} \\ \tilde{U}_{zn} \end{array} \right\} = [\mathbf{U}] \cdot \mathbf{D}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_{rn} \\ \tilde{T}_{r\theta n} \\ \tilde{T}_{rn} \end{array} \right\} = [\mathbf{T}] \cdot \mathbf{D} \quad (24)$$

### 1.3 衬砌与周围饱和土体相互作用

为研究隧道衬砌与周围饱和土体的相互作用, 求解未知待定系数, 引入边界条件: ①作用在衬砌壳体上的净荷载等于壳体内外面荷载的合力; ②衬砌与饱和土体接触面位移、应力连续; ③衬砌与饱和土体接触面完全不透水; ④径向无限远处的位移衰减为 0。为求解饱和土中圆形衬砌隧道的频率响应函数, 在仰拱处 ( $\theta=0, z=0, r=a$ ) 径向作用单位脉冲荷载 (图 1):

$$\left\{ \begin{array}{l} p_z = p_\theta = 0, \\ p_r = \frac{\delta(\theta)\delta(t)\delta(z)}{a} \end{array} \right\} \quad (25)$$

式中,  $\delta(\bullet)$  为狄拉克  $\delta$  函数, 将  $\delta(\theta)/a$  展开为 Fourier 余弦级数, 并做关于  $z$  和  $t$  的双重 Fourier 变换, 可得不同模态  $n$  下该荷载在频率-波数域中各应力分量:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}_{zn} = \tilde{P}_{\theta n} = 0, \\ \tilde{P}_{rn} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a} & (n=0) \\ \frac{1}{\pi a} & (n>0) \end{cases} \end{array} \right\} \quad (26)$$

根据边界条件①, 根据式 (5) 在衬砌与饱和土体接触面处有:

$$\frac{-Eh}{a(1-\nu^2)} [\mathbf{A}] \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_n \\ \tilde{V}_n \\ \tilde{W}_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{Q}_{zn} \\ \tilde{Q}_{\theta n} \\ \tilde{Q}_{rn} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}_{zn} \\ \tilde{P}_{\theta n} \\ \tilde{P}_{rn} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_{rn} \\ \tilde{T}_{r\theta n} \\ \tilde{T}_{rn} \end{array} \right\}_{\text{tunnel}} \quad (27)$$

式中,  $\tilde{T}_{rn}$ ,  $\tilde{T}_{r\theta n}$ ,  $\tilde{T}_{rn}$  为荷载引起的衬砌外表面的总应力分量。

根据边界条件④, 式 (22)、(23) 中,  $I_n$  和  $I_{n+1}$  的系数均应为 0, 即:

$$A_1 = A_2 = A_r = A_z = 0 \quad (28)$$

根据边界条件 2, 衬砌与饱和土体接触面的位移、

应力表达如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_n \\ \tilde{V}_n \\ \tilde{W}_n \end{array} \right\}_{r=a} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{zn} \\ \tilde{U}_{\theta n} \\ \tilde{U}_{rn} \end{array} \right\}_{r=a} = \begin{bmatrix} u_{32} & u_{34} & u_{36} & u_{38} \\ u_{22} & u_{24} & u_{26} & u_{28} \\ u_{12} & u_{14} & u_{16} & u_{18} \end{bmatrix}_{r=a} \cdot \left\{ \begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \\ B_r \\ B_z \end{array} \right\} \\ = [\mathbf{U}_\infty]_{r=a} \cdot \mathbf{F} \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_{rn} \\ \tilde{T}_{r\theta n} \\ \tilde{T}_{rn} \end{array} \right\}_{\text{tunnel}} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_{rn} \\ \tilde{T}_{r\theta n} \\ \tilde{T}_{rn} \end{array} \right\}_{\text{soil}(r=a)} = \begin{bmatrix} t_{32} & t_{34} & t_{36} & t_{38} \\ t_{22} & t_{24} & t_{26} & t_{28} \\ t_{12} & t_{14} & t_{16} & t_{18} \end{bmatrix}_{r=a} \cdot \left\{ \begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \\ B_r \\ B_z \end{array} \right\} \\ = [\mathbf{T}_\infty]_{r=a} \cdot \mathbf{F} \quad (30)$$

由式 (20)、(21)、(28), 结合边界条件 3, 可得

$$\tilde{W}_m|_{r=a} = [\mathbf{W}_\infty]_{r=a} \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (31)$$

式中,  $\tilde{W}_m$  表示不同模态  $n$  下流体沿  $r$  方向相对位移分量,  $[\mathbf{W}_\infty]$  为  $1 \times 4$  的矩阵, 具体表达式见附录。

联立求解式 (26)、(27)、(29) ~ (31) 得

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \\ B_r \\ B_z \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{-Eh}{a(1-\nu^2)} [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{U}_\infty]_{r=a} - [\mathbf{T}_\infty]_{r=a} \\ [\mathbf{W}_\infty]_{r=a} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}_{zn} \\ \tilde{P}_{\theta n} \\ \tilde{P}_{rn} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (32)$$

由式 (7b)、(20)、(21)、(28), 可得

$$\tilde{P}_{tn} = [\mathbf{P}_\infty] \cdot \mathbf{F} \quad (33)$$

式中,  $\tilde{P}_{tn}$  表示不同模态  $n$  下的孔压,  $[\mathbf{P}_\infty]$  为  $1 \times 4$  的矩阵, 具体表达式见附录。

由式 (29)、(33) 可得不同环向模态  $n$  下  $r=R$  ( $R \geq a$ ) 处的位移、孔压:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{zn} \\ \tilde{U}_{\theta n} \\ \tilde{U}_{rn} \\ \tilde{P}_{tn} \end{array} \right\}_{r=R} = \begin{bmatrix} [\mathbf{U}_\infty]_{r=R} \\ [\mathbf{P}_\infty]_{r=R} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{F} \quad (34)$$

将各环向模态  $n$  下的位移、孔压求和, 得到饱和土中圆形衬砌隧道波数域中频率响应函数:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_r \\ \tilde{u}_\theta \\ \tilde{u}_z \\ \tilde{p}_f \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{rn}(r, \xi, \omega) \cos n\theta \\ \tilde{U}_{\theta n}(r, \xi, \omega) \sin n\theta \\ \tilde{U}_{zn}(r, \xi, \omega) \cos n\theta \\ \tilde{P}_{tn}(r, \xi, \omega) \cos n\theta \end{array} \right\} \quad (35)$$

## 2 移动简谐荷载作用下浮置板轨道及饱和土体动力响应

轨道结构采用地铁中常用的离散浮置板轨道, 如

图 2 所示, 钢轨简化为无限长 Euler 梁, 浮置板考虑为沿  $z$  向间断分布、两端自由的 Euler 梁, 钢轨扣件和板下支承模拟为连续支承的复刚度弹簧。由图 2 可知, 在长度  $L$  范围内的钢轨梁、浮置板梁和周围土体形成了以浮置板长度  $L$  为周期的周期结构。移动简谐荷载作用下浮置板轨道、周围土体动力响应问题的求解可以转化到在一块浮置板长度范围内进行<sup>[18]</sup>。

钢轨和浮置板控制方程 ( $0 \leq z \leq L$ ):

$$E_1 I_1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + m_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + k_1(u_1 - u_2) = e^{i\omega t} \delta(z - ct), \quad (36)$$

$$E_2 I_2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial z^4} + m_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - k_1(u_1 - u_2) + R = 0. \quad (37)$$

仰拱处轨道与衬砌结构相互作用力为

$$R = k_2(u_2 - u_3), \quad (38)$$

式中,  $u_1$  为钢轨位移,  $u_2$  为浮置板位移,  $u_3$  为衬砌仰拱处的径向位移,  $k_1$ ,  $k_2$  分别为扣件弹簧和板下支撑弹簧复刚度,  $E_1 I_1$ ,  $E_2 I_2$  和  $m_1$ ,  $m_2$  分别为钢轨、浮置板弯曲刚度和单位长度质量,  $\bar{\omega} = 2\pi f_0$  为荷载自振频率,  $c$  表示荷载移动速度,  $R$  为仰拱处轨道与衬砌结构的相互作用力。

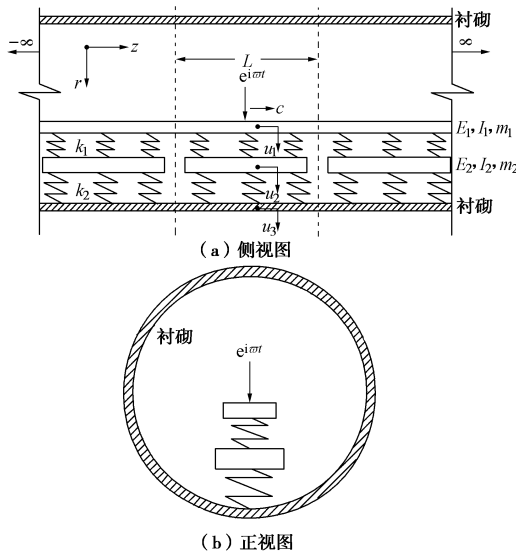


图 2 离散浮置板轨道模型

Fig. 2 Floating-slab track model with discontinuous slabs

根据周期性结构的性质<sup>[18]</sup>可得

$$\frac{\partial^j u_1(L, t)}{\partial z^j} = e^{i(\bar{\omega}L/c)} \frac{\partial^j u_1(0, t)}{\partial z^j} \quad (j=0, 1, 2, 3). \quad (39a)$$

浮置板两端自由, 弯矩和剪力为零的边界条件为

$$\frac{\partial^j u_2(L, t)}{\partial z^j} = \frac{\partial^j u_2(0, t)}{\partial z^j} = 0 \quad (j=2, 3). \quad (39b)$$

对式 (36) ~ (39) 关于时间  $t$  做 Fourier 变换得

$$E_1 I_1 \frac{d^4 \hat{u}_1}{dz^4} - m_1 \omega^2 \hat{u}_1 + k_1(\hat{u}_1 - \hat{u}_2) = \frac{1}{c} e^{i[(\bar{\omega}-\omega)/c]z}, \quad (40)$$

$$E_2 I_2 \frac{d^4 \hat{u}_2}{dz^4} - m_2 \omega^2 \hat{u}_2 - k_1(\hat{u}_1 - \hat{u}_2) + \hat{R} = 0, \quad (41)$$

$$\hat{R} = k_2(\hat{u}_2 - \hat{u}_3), \quad (42)$$

$$\frac{d^j \hat{u}_1(L, \omega)}{dz^j} = e^{i[(\bar{\omega}-\omega)/c]L} \frac{d^j \hat{u}_1(0, \omega)}{dz^j} \quad (j=0, 1, 2, 3), \quad (43)$$

$$\frac{d^j \hat{u}_2(L, \omega)}{dz^j} = \frac{d^j \hat{u}_2(0, \omega)}{dz^j} = 0 \quad (j=2, 3). \quad (44)$$

仰拱处轨道与衬砌结构相互作用力可写为<sup>[18]</sup>:

$$\hat{R} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\omega) e^{i(\xi_n + (\bar{\omega}-\omega)/c)z} \quad (\xi_n = 2\pi n/L), \quad (45)$$

式中,  $b_n(\omega)$  表示待求未知数。

对式 (45) 关于坐标  $z$  做 Fourier 变换, 并乘以衬砌仰拱处位移频率响应函数, 获得频域-波数域中仰拱处位移表达式:

$$\tilde{u}_3(\xi, \omega) = \tilde{H}_l(\xi, \omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\omega) 2\pi \delta\left(\xi - \xi_n - \frac{\bar{\omega}}{c} + \frac{\omega}{c}\right), \quad (46)$$

式中,  $\tilde{H}_l(\xi, \omega)$  表示衬砌仰拱处径向位移频率响应函数, 由式 (35) 给出:  $\tilde{H}_l(\xi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_m(r, \xi, \omega)$

$\cos n\theta|_{r=a, \theta=0}$ , 下标 “ $r=a, \theta=0$ ” 就是衬砌仰拱的坐标。衬砌仰拱处位移在频域-空间域的表达式为

$$\hat{u}_3(z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\omega) \tilde{H}_l(\xi_n + \frac{\bar{\omega}}{c} - \frac{\omega}{c}, \omega) e^{i(\xi_n + (\bar{\omega}-\omega)/c)z}. \quad (47)$$

整理式 (40)、(41) 和 (45), 得到如下的非齐次线性方程组:

$$\begin{bmatrix} E_1 I_1 & 0 \\ 0 & E_2 I_2 \end{bmatrix} \frac{d^4 \hat{u}}{dz^4} + \begin{bmatrix} k_1 - m_1 \omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \hat{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{c} e^{i[(\bar{\omega}-\omega)/c]z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} b_n(\omega) e^{i[\xi_n + (\bar{\omega}-\omega)/c]z}, \quad (48)$$

式中,  $\hat{u}(z, \omega) = [\hat{u}_1(z, \omega), \hat{u}_2(z, \omega)]^T$ 。

式 (48) 的解答可以表示为通解和特解两部分:

$$\hat{u}(x, \omega) = \sum_{p=1}^8 a_p \hat{Z}_p e^{i\phi_p z} + \hat{U} e^{i[(\bar{\omega}-\omega)/c]z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{V}_n b_n e^{i[\xi_n + (\bar{\omega}-\omega)/c]z}, \quad (49)$$

式中,  $a_p$  是通解部分中的待求未知数,  $\phi_p$  和  $\hat{Z}_p$  分别表示通解的特征值和特征向量, 由以下表达式求得:

$$\begin{bmatrix} E_1 I_1 \phi_p^4 - m_1 \omega^2 + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & E_2 I_2 \phi_p^4 - m_2 \omega^2 + k_1 \end{bmatrix} \hat{Z}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

$\hat{U}$  和  $\hat{V}_n$  是对应于式 (48) 右端项特解的系数表达式, 具体可由下式求得:

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} E_1 I_1 \left(\frac{\bar{\omega}-\omega}{c}\right)^4 - m_1 \omega^2 + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & E_2 I_2 \left(\frac{\bar{\omega}-\omega}{c}\right)^4 - m_2 \omega^2 + k_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (51a)$$

$$\hat{V}_n = \begin{bmatrix} E_1 I_1 (\xi_n + \frac{\varpi - \omega}{c})^4 - m_1 \omega^2 + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & E_2 I_2 (\xi_n + \frac{\varpi - \omega}{c})^4 - m_2 \omega^2 + k_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (51b)$$

式(49)关于钢轨和浮置板位移的表达式只是针对  $0 \leq z \leq L$  范围内的, 在  $-\infty \leq z \leq +\infty$  的范围内,  $\hat{u}_1$  和  $\hat{u}_2$  的表达式为<sup>[18]</sup>

$$\hat{u}(z, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^8 i a_p \hat{Z}_p \left[ \frac{e^{-i(\xi_n - \phi_p + \frac{\varpi - \omega}{c})L} - 1}{\left( \xi_n - \phi_p + \frac{\varpi - \omega}{c} \right) L} \right] e^{i(\xi_n + \frac{\varpi - \omega}{c})z} + \hat{U} e^{i(\frac{\varpi - \omega}{c})z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{V}_n b_n e^{i(\xi_n + \frac{\varpi - \omega}{c})z}. \quad (52)$$

考虑  $n$  为有限项 ( $-n_{\max} \leq n \leq n_{\max}$ ), 之前的表达式共有  $2n_{\max}+9$  个未知数 ( $b_{-n_{\max}}, \dots, b_0, \dots, b_{n_{\max}}$ ) 和 ( $a_1, a_2, \dots, a_8$ )。将式(45)、(47)和(52)代入式(42), 并结合边界条件式(43)、(44)可得如下  $2n_{\max}+9$  个方程, 用于求解以上同等个数的未知数。

当  $n=0$  时,

$$\sum_{p=1}^8 i a_p \hat{Z}_p(2,1) \left[ \frac{e^{-i(\xi_n - \phi_p + \frac{\varpi - \omega}{c})L} - 1}{\left( \xi_n - \phi_p + \frac{\varpi - \omega}{c} \right) L} \right] + \hat{U}(2,1) + b_n \left[ \hat{V}_n(2,1) - \tilde{H}_t \left( \xi_n + \frac{\varpi - \omega}{c}, \omega \right) - \frac{1}{k_2} \right] = 0, \quad (53a)$$

当  $n \neq 0$  时,

$$\sum_{p=1}^8 i a_p \hat{Z}_p(2,1) \left[ \frac{e^{-i(\xi_n - \phi_p + \frac{\varpi - \omega}{c})L} - 1}{\left( \xi_n - \phi_p + \frac{\varpi - \omega}{c} \right) L} \right] + b_n \left[ \hat{V}_n(2,1) - \tilde{H}_t \left( \xi_n + \frac{\varpi - \omega}{c}, \omega \right) - \frac{1}{k_2} \right] = 0, \quad (53b)$$

$$\sum_{p=1}^8 (i \phi_p)^m a_p \hat{Z}_p(1,1) (e^{i(\frac{\varpi - \omega}{c})L} - e^{i \phi_p L}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{V}_n(1,1) b_n i^m \left( \xi_n + \frac{\varpi - \omega}{c} \right)^m (1 - e^{i \xi_n L}) e^{i(\frac{\varpi - \omega}{c})L} = 0, \quad (53c)$$

式中,  $m=0, 1, 2, 3$ 。

$$\sum_{p=1}^8 (i \phi_p)^m a_p \hat{Z}_p(1,2) + \hat{U}(2,1) i^m \left( \frac{\varpi - \omega}{c} \right)^m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{V}_n(2,1) b_n i^m \left( \xi_n + \frac{\varpi - \omega}{c} \right)^m = 0, \quad (53d)$$

$$\sum_{p=1}^8 (i \phi_p)^m a_p \hat{Z}_p(1,2) e^{i \phi_p L} + \hat{U}(2,1) i^m \left( \frac{\varpi - \omega}{c} \right)^m e^{i(\frac{\varpi - \omega}{c})L} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{V}_n(2,1) b_n i^m \left( \xi_n + \frac{\varpi - \omega}{c} \right)^m e^{i(\xi_n + \frac{\varpi - \omega}{c})L} = 0, \quad (53e)$$

式(53d)和(53e)中  $m=2, 3$ 。

在求得以上  $2n_{\max}+9$  个未知数后, 将其代入式(47)和(52), 可以获得钢轨、浮置板和衬砌仰拱处的位移频域解答, 通过快速 Fourier 逆变换 (IFFT) 可以获得相应的时域解。利用地基不同位置处的位移、孔压频率响应函数 (式(35)) 替换式(47)中的衬砌仰拱处径向位移频率响应函数  $\tilde{H}_t$ , 可以求得饱和土体地基任意位置处的位移和孔压响应。

### 3 计算结果及分析

#### 3.1 模型验证

为验证饱和土中圆形衬砌模型的正确性, 将饱和土退化为单相介质 ( $\rho_f, b, \alpha, m, M$  取值为 0), 其余参数同文献[2], 计算简谐点荷载作用下, 位置  $r=20$  m,  $\theta=90^\circ$ ,  $z=0$  处土体的径向、环向位移  $u_r, u_\theta$ , 并与 Hunt<sup>[2]</sup>单相介质解析解作对比, 对比结果见图 3。由验证算例可以看出: 本文模型与验证模型计算结果吻合较好, 说明了本文方法的正确性。

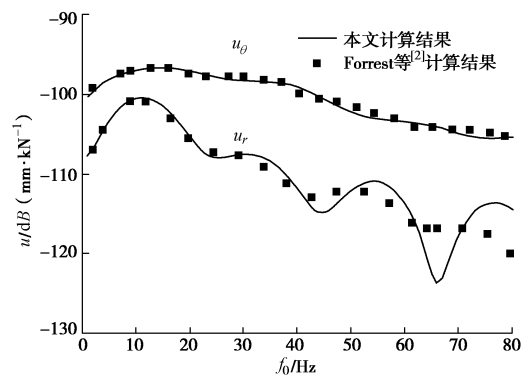


图3 本文与 Forrest 等<sup>[2]</sup>的结果对比

Fig. 3 Comparison between authors' and Forrest's results

#### 3.2 数值计算结果

本节采用的计算参数见表 1, 2, 其中衬砌结构参数参考文献[2], 饱和土体参数参考文献[19], 轨道结构参数 (对应于两根钢轨) 参考文献[18]。

表 1 饱和土和衬砌结构参数

Table 1 Parameters for saturated ground and tunnel structure		
衬砌参数	饱和土体参数	
$E = 5 \times 10^{10}$ N/m <sup>2</sup> ,	$\lambda = 4.67 \times 10^7$ N/m <sup>2</sup> ,	$\alpha = 1.0$ ,
$\rho = 2500$ kg/m <sup>3</sup> ,	$\mu = 2 \times 10^7$ N/m <sup>2</sup> ,	$M = 6.125 \times 10^9$ N/m <sup>2</sup> ,
$\nu = 0.3$ ,	$\rho_f = 1000$ kg/m <sup>3</sup> ,	$b = 1.0 \times 10^9$ m <sup>3</sup> s/kg,
$a = 3$ m,	$\rho_s = 1816$ kg/m <sup>3</sup> ,	
$h = 0.25$ m,	$n_0 = 0.4$ ,	

表 2 轨道结构参数

Table 2 Parameters for floating-slab tracks			
轨道结构参数	抗弯刚度 $EI$ /(Pa·m <sup>4</sup> )	单位长度质量 $m$ /(kg·m <sup>-1</sup> )	支撑弹簧复刚度 $k$ /(N·m <sup>-2</sup> )
钢轨	$1.29 \times 10^7$	120.6	$4 \times 10^7 \times (1+0.3i)$
浮置板	$1.43 \times 10^9$	3500	$5 \times 10^7 \times (1+0.5i)$

图4为简谐荷载频率为40 Hz,并以不同速度通过时,钢轨、浮置板上坐标 $z=0$  m处位移响应频谱及饱和土体中坐标 $r=4.5$  m、 $\theta=0^\circ$ 、 $z=0$  m处的径向位移、孔压响应频谱。从图4中可以看出,移动简谐荷载作用下,钢轨、浮置板位移及饱和土体径向位移、孔压响应频谱在简谐荷载自振频率40 Hz附近达到峰值,当远离荷载自振频率时,以上频域中的响应整体上呈减小趋势,因此在Fourier逆变换计算时域结果时,以荷载自振频率为中心,截取频域结果的部分值即可获得满意的精度;随着荷载移动速度的增大,轨道、土体响应频谱在荷载自振频率附近很窄的频段内会有所下降,而在其他大部分的频段处响应会有显著增加。由于本文采用的是周期支撑的离散浮置板轨道结构,浮置板的不连续性将导致轨道结构刚度的周期性变化,荷载在刚度周期性变化的轨道上移动将引发参数激励<sup>[20]</sup>,图4(a)~(d)可见,当速度 $c=20$  km/h时,荷载周期通过浮置板长度 $L$ 造成的参数激励(位移、孔压频谱周期出现谷值),相邻谷值所对应的频率间距为: $\Delta\omega/2\pi=c/3.6/L=0.925$  Hz(如图4标注中所示),此处3.6是速度单位的换算量,速度 $c=40$  km/h和60 km/h时的谷值间距分别为1.85 Hz和2.78 Hz。当简谐荷载速度、自振频率为其他值时,钢轨、浮置板位移频谱及饱和土体位移、孔压频谱均有以上的变化规律。

图5为简谐荷载频率为40 Hz,并以不同速度通过时,钢轨、浮置板位移和饱和土体径向位移、孔压时程曲线,图中取时程响应的幅值,观察点位置同图4。图5中的时程曲线由图4中频域结果经Fourier逆变换得到,积分范围取为 $[f_0-10, f_0+10]$  Hz<sup>[18]</sup>,积分步长取为 $\Delta f=0.05$  Hz,此处 $f_0=40$  Hz<sup>[18]</sup>。从图5中可以看出,位移、孔压响应均在荷载到达观察点正上方时达到最大值( $t=0$ 时刻,荷载作用位置和观察点位置均在 $z=0$  m处),且关于 $t=0$ 时刻轴对称,随着荷载移动速度的提高,轨道位移和土体位移、孔压幅值均变化不大,这是由于地铁列车运行速度一般较低,小于地基土体的剪切波速,速度引起的动力放大作用并不明显,有别于地面移动荷载引起的土体动力响应问题<sup>[10]</sup>,但响应持续的时间随着荷载速度的提高而减小。对比图5(a)~(c),钢轨、浮置板和饱和土体径向位移幅值依次减小,说明远离荷载作用点,位移响应呈衰减趋势;观察图5(c)、(d)可以发现饱和土体位移、孔压响应持续时间比轨道结构响应持续时间更长,这是由于轨道结构的存在,改变了移动点荷载的传力路径,使得其在土体中的影响范围更广。

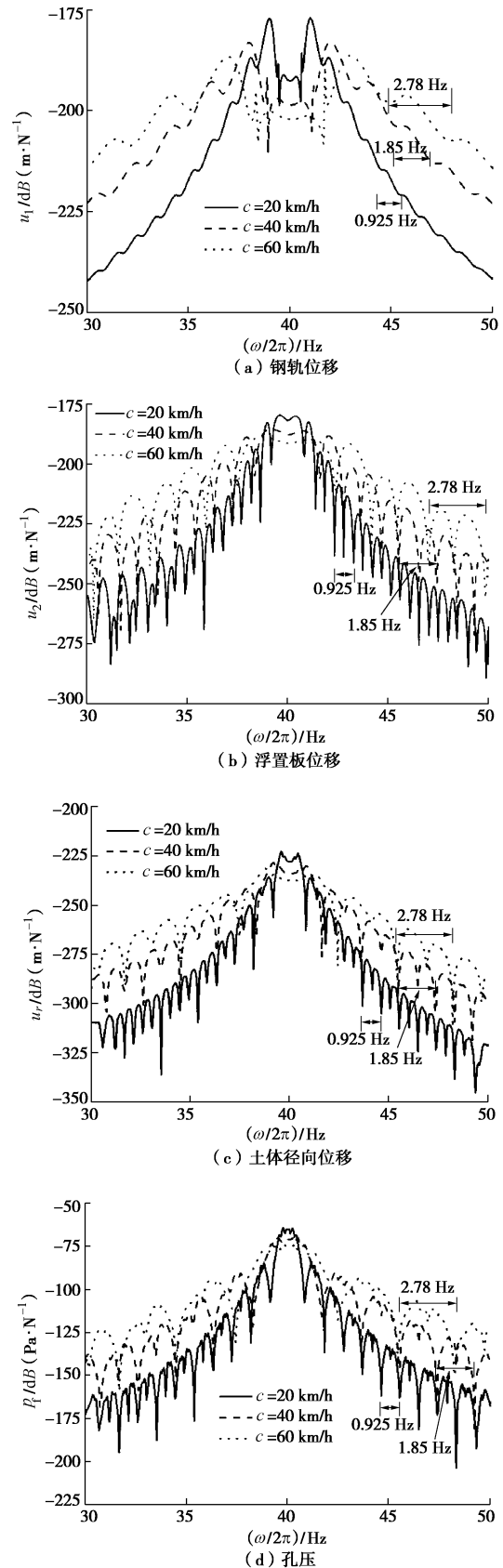


图4 荷载频率为40 Hz不同移动速度下轨道、饱和土体响应频谱

Fig. 4 Spectra of track and saturated soil responses due to harmonic load ( $f_0=40$  Hz) with different velocities



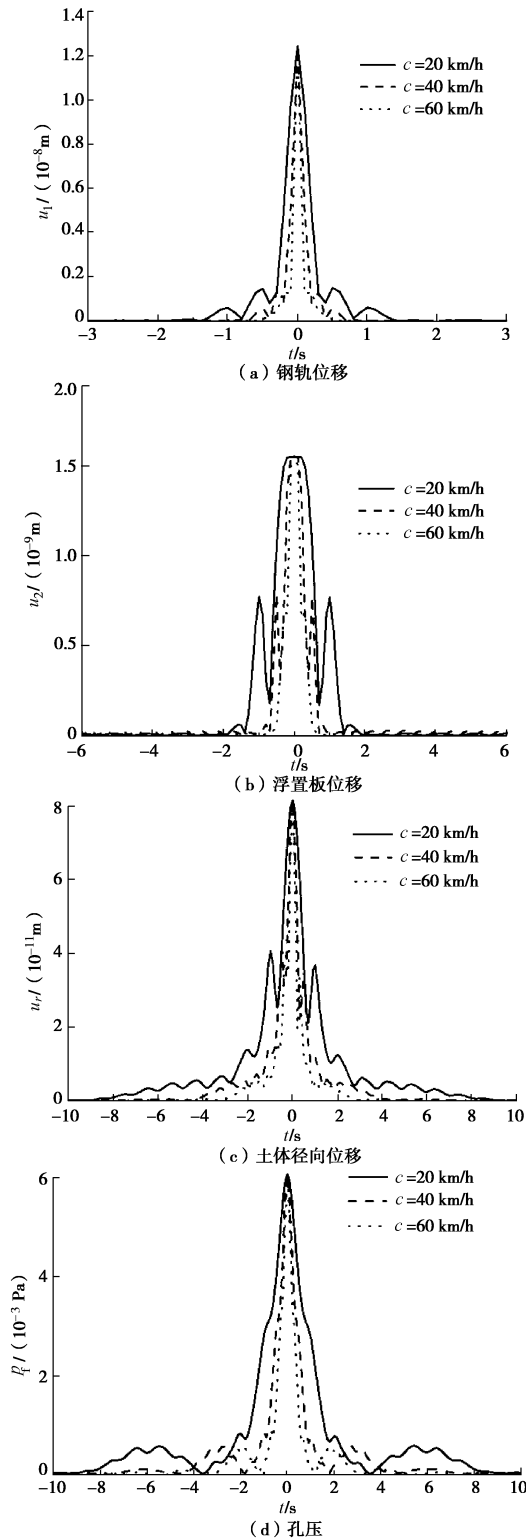


图5 荷载频率为40 Hz不同移动速度下轨道、饱和土体响应时程曲线

Fig. 5 Time histories of track and saturated soil responses due to harmonic load ( $f_0=40$  Hz) with different velocities

为研究移动简谐荷载自振频率对轨道结构、饱和土体动力响应的影响,图6给出了荷载移动速度为 $c=60$  km/h不同自振频率下钢轨、浮置板位移和饱和土径向位移、孔压响应频谱,观察点位置同图4。由图6可以看出,不论是轨道结构还是土体响应频谱主

要成分均分布在以自振频率为中心的一段范围内,荷载自振频率 $f_0=15$  Hz时,钢轨、浮置板位移响应的峰值大于其他荷载频率产生的位移响应峰值,这是由于15 Hz更接近于浮置板的固有频率<sup>[21]</sup>( $f_1=1/(2\pi)\sqrt{k_2/m_2}=19.02$  Hz),产生共振现象。由图6(c)、(d)可以看出,浮置板固有频率所对应的共振现象不仅对

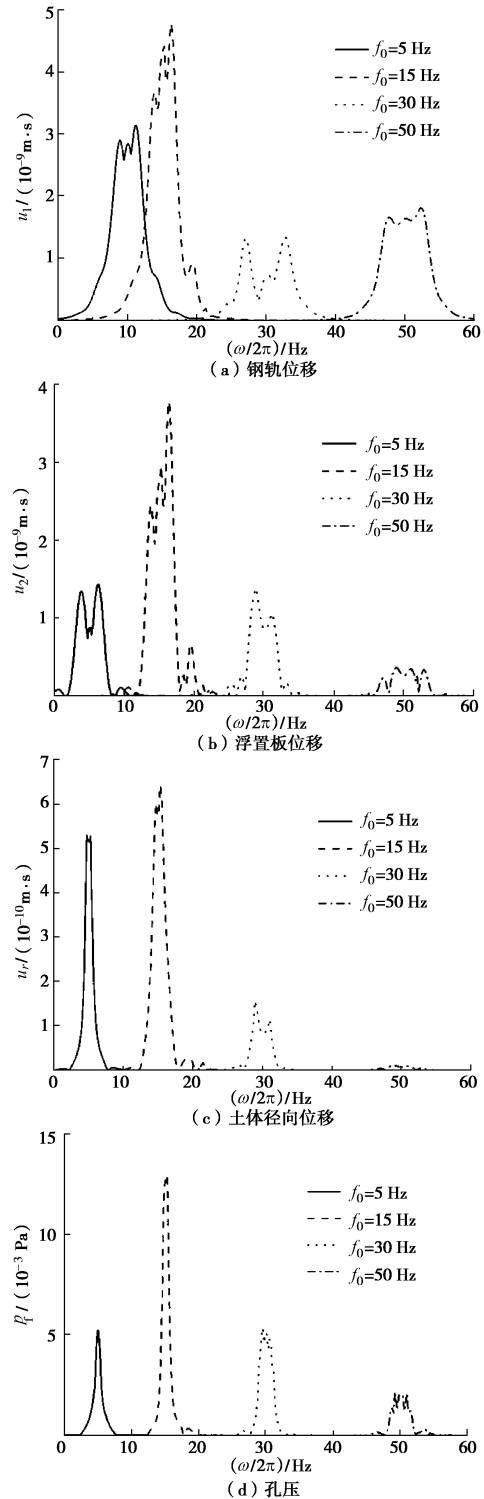


图6 荷载移动速度为60 km/h不同自振频率下轨道、饱和土体响应频谱

Fig. 6 Spectra of track and saturated soil responses due to harmonic load ( $c=60$  km/h) with different frequencies

轨道结构响应有较大影响,对于自由场响应(饱和土位移、孔压)同样有重要影响。

取移动荷载自振频率 $f_0$ 分别为 1, 2, ..., 200 Hz (相隔 1 Hz), 计算钢轨、浮置板上坐标 $z=0$  m 处频域内位移响应及饱和土体中坐标 $r=4.5$  m,  $\theta=0^\circ$ ,  $z=0$  m 处频域内径向位移、孔压响应,然后通过快速 Fourier 逆变换 (IFFT), 将频域内的位移、孔压响应转化为时域内的结果,并在时域内将各个荷载自振频率下轨道结构位移和饱和土体位移、孔压的最大值(幅值)记录下来,绘制于图 7。从图中可以看出,不论轨道结构还是自由场响应都存在 4 个共振频率,分别为 $f_1=19.02$  Hz,  $f_2=63.25$  Hz,  $f_3=102.15$  Hz,  $f_4=174$  Hz, 其中 $f_1=19.02$  Hz 对应于浮置板固有频率,如前文所述; $f_3=102.15$  Hz 对应于钢轨固有频率,可以由单自由度钢轨(此时由于浮置板刚度、质量远大于钢轨,认为浮置板位移为 0,钢轨通过扣件固定于固定端)近似求得: $f_3=1/(2\pi)\sqrt{k_1/m_1}=100.66$  Hz;  $f_2=63.25$  Hz 和 $f_4=174$  Hz 是由于浮置板的间断分布导致波动在板中传播至自由端时发生反射,与之前的波叠加形成驻波,驻波引起的共振频率可由“自由-自由梁”的固有频率计算得到<sup>[18]</sup>

$$f_n = \sqrt{\frac{E_2 I_2}{m_2}} \frac{\lambda_n^2}{2\pi L^2}, \quad (54)$$

式中,  $\lambda_1=4.73$ ,  $\lambda_2=7.853$ ,  $\lambda_3=10.996$ , ...。

由于上述 4 个轨道结构固有频率的存在,使得荷载自振频率对轨道结构响应和自由场响应的影响变得复杂起来,这也可以解释前文图 6 (a) 中,荷载自振频率为 50 Hz 时,钢轨位移响应频谱上的峰值大于自振频率为 30 Hz 时的位移响应峰值,以及图 6 (d) 中荷载自振频率为 30 Hz 时,饱和土体孔压频谱上的峰值大于自振频率为 5 Hz 时的孔压响应峰值。

由图 7 (a) 可知钢轨最大位移响应发生在钢轨固有频率 $f_3=102.15$  Hz 处,驻波引起的共振频率对其影响相对较小;图 7 (b) 可见浮置板固有频率和驻波引起的共振频率均对浮置板位移有较大影响,浮置板最大位移响应发生在浮置板固有频率 $f_1=19.02$  Hz 处,钢轨固有频率对其影响较小;从图 7 (c)、(d) 可以看出,对于饱和土体位移、孔压响应随着荷载自振频率的提高,响应水平整体上呈降低趋势,这是由于荷载频率越高,水土两相耦合作用越强烈,能量耗散越大,但在轨道结构的 4 个固有频率处均存在动力响应的局部放大现象。

图 7 中还呈现了移动简谐荷载作用于连续浮置板轨道轨道结构和自由场的动力响应,连续浮置板轨道结构与周围衬砌及饱和土的耦合思路详见参考文献 [21],连续浮置板轨道情形下,轨道结构和自由场动力

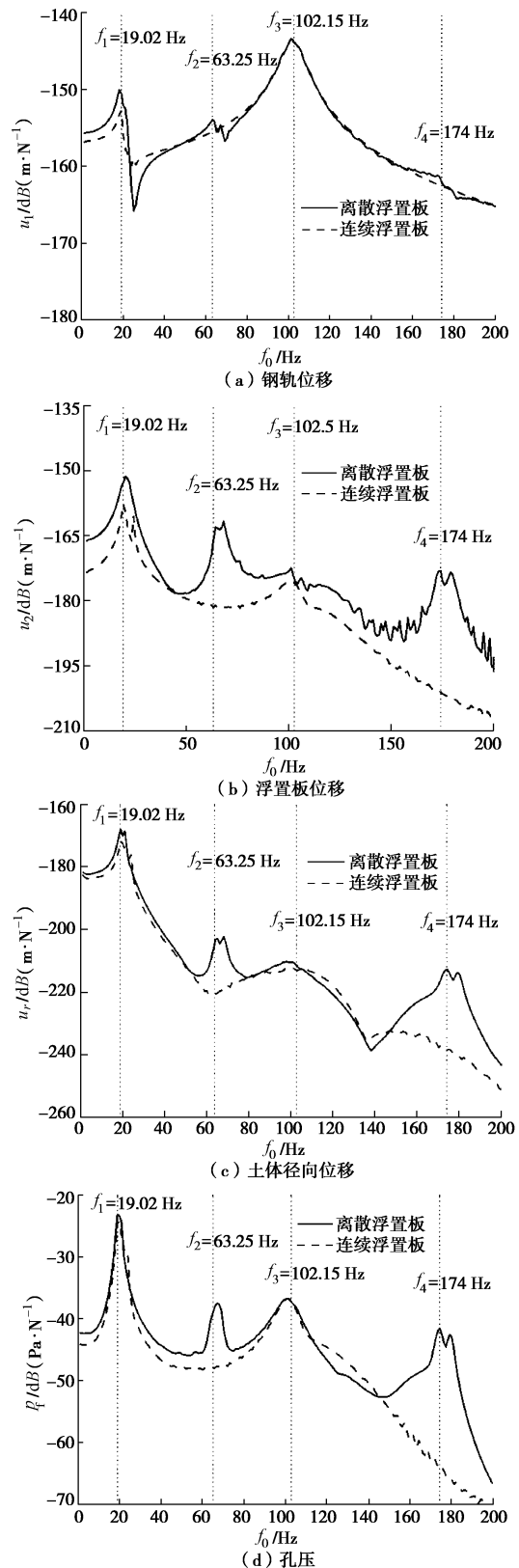


图 7 荷载移动速度为 40 km/h 不同自振频率下轨道、饱和土体响应最大值

Fig. 7 Maximum responses of track and saturated soil due to harmonic load ( $c=40$  km/h) with different frequencies  
响应只存在两个共振频率(浮置板固有频率 $f_1=19.02$  Hz 和钢轨固有频率 $f_3=102.15$  Hz),这是由于连续浮置板轨道中浮置板采用无限长连续 Euler 梁模拟,不存在离

散浮置板自由端的波反射。由图 7 (a) 可知, 对于两种轨道结构, 钢轨位移只在浮置板固有频率 ( $f_1=19.02$  Hz) 和驻波引起的两个共振频率 ( $f_2=63.25$  Hz、 $f_4=174$  Hz) 附近有差别, 最大差值约为 6 dB, 而在其余荷载频率处差别不大; 受以上 3 个共振频率的影响, 如图 7 (b) 所示, 两种轨道结构的浮置板位移表现出了较大差别, 离散浮置板位移大于连续浮置板位移,  $f_1=19.02$  Hz 处差值约为 5 dB,  $f_2=63.25$  Hz 处差值约为 15 dB,  $f_4=174$  Hz 处差值可达 28 dB。对于两种轨道结构下的自由场响应如图 7 (c)、(d), 饱和土位移、孔压在驻波引起的共振频率  $f_2=63.25$  Hz,  $f_4=174$  Hz 附近有较大差别 (离散浮置板轨道情形下的自由场响应大于连续浮置板轨道情形下的自由场响应), 饱和土位移在  $f_2=63.25$  Hz 处差值约为 15 dB,  $f_4=174$  Hz 处差值约为 26 dB, 对于孔压差值分别约为 9, 23 dB, 在其余荷载频率处的自由场响应差别不大。

图 8 给出了采用连续浮置板轨道衬砌厚度对不同荷载自振频率下饱和土径向位移最大值的影响, 荷载速度  $c=40$  km/h, 绘图方式同图 7, 由图 8 可知在 3 种衬砌厚度下 ( $h=0.25, 0.375, 0.5$  m), 饱和土径向位移均在浮置板固有频率  $f_1=19.02$  Hz 处取得峰值, 且在钢轨固有频率  $f_3=102.15$  Hz 处存在局部放大, 这两个频率对应于体系的共振频率。随着衬砌厚度  $h$  的增大, 饱和土径向位移在大部分荷载频率段呈降低趋势, 这是由于衬砌作为能量吸收层可以降低自由场的响应<sup>[1]</sup>, 但在  $f_1=19.02$  Hz 处, 由于浮置板固有频率的影响随着衬砌厚度的增加, 饱和土位移没有显著改变。

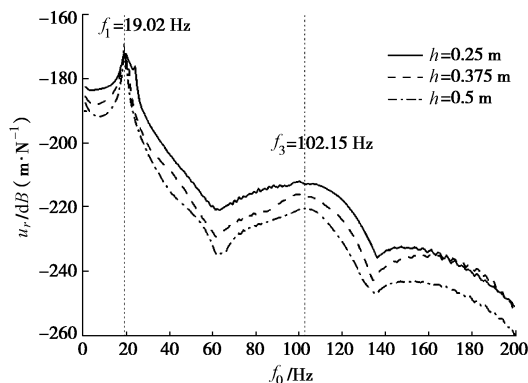


图 8 衬砌厚度对不同荷载自振频率下饱和土径向位移最大值的影响

Fig. 8 Effect of tunnel thickness on maximum radial displacement of saturated soil under harmonic load with different frequencies

## 4 结 论

(1) 随着荷载移动速度的增大, 轨道结构、饱和土体响应频谱在荷载自振频率附近很窄的频段内会有所下降, 而在其他大部分的频段处有显著增加, 时程

中轨道位移和饱和土体位移、孔压幅值均变化不大, 但响应持续时间减小; 对于同一荷载移动速度, 土体响应持续时间大于轨道结构响应持续时间。

(2) 移动荷载周期通过离散浮置板轨道, 轨道结构、饱和土体都会产生明显的参数激励现象, 参数激励频率等于荷载移动速度与不连续浮置板长度的比值。

(3) 不同荷载自振频率下, 轨道结构、饱和土体响应频谱均分布在以荷载自振频率为中心的一段范围内, 远离荷载自振频率, 频域内响应不断减小。

(4) 离散浮置板轨道情形下, 在本文考虑的频率范围内 (1~200 Hz), 轨道结构存在 4 个固有频率, 即钢轨固有频率、浮置板固有频率和两个驻波引起的固有频率, 当荷载自振频率接近上述 4 个固有频率时, 轨道结构和自由场响应均产生共振现象。

(5) 连续浮置板轨道情形下, 轨道结构只存在两个固有频率, 即钢轨固有频率、浮置板固有频率; 离散浮置板轨道情形下的自由场响应在两个驻波引起的固有频率处大于连续浮置板轨道情形下的自由场响应, 饱和土位移响应增幅分别为 15, 26 dB, 孔压响应增幅分别为 9, 23 dB。

(6) 随着衬砌厚度的增大, 饱和土体位移响应呈减小趋势。

## 参考文献:

- [1] METRIKINE A V, VROUWENVELDER A C W M. Surface ground vibration due to a moving train in a tunnel two-dimensional model[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, **234**(1): 43 - 66.
- [2] FORREST J A, HUNT H E M. A three dimensional tunnel model for calculation of train-induced ground vibration[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, **294**(4/5): 678 - 705.
- [3] BALENDRA T, CHUA K H, LO K W, et al. Steady-state vibration of subway-soil-building system[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1989, **115**(1): 145 - 162.
- [4] SHENG X, JONES C J C, THOMPSON D J. Prediction of ground vibration from trains using the wavenumber finite and boundary element methods[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, **293**: 575 - 586.
- [5] 刘维宁, 夏 禾, 郭文军. 地铁列车振动的环境响应[J]. 岩石力学与工程学报, 1996, **15**(增刊): 586 - 593. (LIU Wei-ning, XIA He, GUO Wen-jun. Study of vibration effects of underground trains on surrounding environments[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1996, **15**(S0): 586 - 593. (in Chinese))
- [6] DEGRANDE G, CLOUTEAU D, OTHMAN R, et al. A numerical model for ground-borne vibrations from

- underground railway traffic based on a periodic finite element- boundary element formulation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, **293**(3/4/5): 645 - 666.
- [7] HUNG H H, CHEN G H, YANG Y B. Effect of railway roughness on soil vibrations due to moving trains by 2.5D finite/infinite element approach[J]. Engineering Structures, 2013, **57**: 254 - 266.
- [8] HUNG H H, YANG Y B. Analysis of ground vibrations due to underground trains by 2.5D finite infinite element approach[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2010, **9**(3): 327 - 335.
- [9] BIAN X C, JIN W F, JIANG H G. Ground-borne vibrations due to dynamic loadings from moving trains in subway tunnels[J]. Journal of Zhejiang University-Science A (Applied Physics & Engineering), 2012, **13**(11): 870 - 876.
- [10] CAI Y Q, CAO Z G, SUN H L, et al. Dynamic response of pavements on poroelastic half-space soil medium to a moving traffic load[J]. Computers and Geotechnics, 2009, **36**(1/2): 52 - 60.
- [11] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. Part I: low-frequency range[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1956, **28**(2): 168 - 178.
- [12] LU J F, JENG D S. Dynamic response of a circular tunnel embedded in a saturated poroelastic medium due to a moving load[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2006, **128**(6): 750 - 756.
- [13] 黄晓吉, 扶名福, 徐 斌. 移动环形荷载作用下饱和土中圆形衬砌隧道动力响应研究[J]. 岩土力学, 2012, **33**(3): 892 - 898. (HUANG Xiao-ji, FU Ming-fu, XU Bin. Dynamic response of a circular lining tunnel in saturated soil due to moving ring load[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, **33**(3): 892 - 898. (in Chinese))
- [14] 刘干斌, 谢康和, 施祖元. 黏弹性饱和和多孔介质中圆柱孔洞的频域响应[J]. 力学学报, 2004, **36**(5): 557 - 563. (LIU Gan-bin, XIE Kang-he, SHI Zu-yuan. Frequency response of a cylindrical cavity in poro-viscoelastic saturated medium[J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, **36**(5): 557 - 563. (in Chinese))
- [15] 高广运, 何俊峰, 李 佳. 地铁运行引起的饱和土地基动力响应[J]. 浙江大学学报(工学版), 2010, **44**(10): 1925 - 1930. (GAO Guang-yun, HE Jun-feng, LI Jia. Dynamic response induced by running subway in saturated ground[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2010, **44**(10): 1925 - 1930. (in Chinese))
- [16] 高广运, 何俊峰, 杨成斌, 等. 2.5 维有限元分析饱和土地基列车运行引起的地面振动[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(2): 234 - 241. (GAO Guang-yun, HE Jun-feng, YANG Cheng-bin, et al. Ground vibration induced by trains moving on saturated ground using 2.5 D FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(2): 234 - 241. (in Chinese))
- [17] 曾 晨, 孙宏磊, 蔡袁强, 等. 简谐荷载作用下饱和土体中圆形衬砌隧道三维动力响应分析[J]. 岩土力学, 2014, **35**(4): 1147 - 1156. (ZENG Chen, SUN Hong-lei, CAI Yuan-qiang, et al. Analysis of three-dimensional dynamic response of a circular lining tunnel in saturated soil to harmonic loading[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(4): 1147 - 1156. (in Chinese))
- [18] HUSSIEN M F M, HUNT H E M. A numerical model for calculating vibration due to a harmonic moving load on a floating-slab track with discontinuous slabs in an underground railway tunnel[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, **321**(1/2): 363 - 374.
- [19] THEODORAKOPOULOS D D. Dynamic analysis of a poroelastic half-plane soil medium under moving loads[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2003, **23**(7): 521 - 533.
- [20] 马龙祥, 刘维宁, 刘卫丰, 等. 移动谐振荷载作用下浮置板轨道的动力响应[J]. 工程力学, 2012, **29**(12): 334 - 341. (MA Long-xiang, LIU Wei-ning, LIU Wei-feng, et al. Dynamic response of floating slab track due to a harmonic moving load[J]. Engineering Mechanics, 2012, **29**(12): 334 - 341. (in Chinese))
- [21] HUSSIEN M F M, HUNT H E M. Modelling of floating-slab tracks with continuous slabs under oscillating moving loads[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, **297**(1/2): 37 - 54.

## 附 录

矩阵  $[W_\infty] = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4]$  中的各元素:

$$w_1 = \xi_f \left( \frac{n}{r} K_n(\alpha_1 r) - \alpha_1 K_{n+1}(\alpha_1 r) \right),$$

$$w_2 = \xi_s \left( \frac{n}{r} K_n(\alpha_2 r) - \alpha_2 K_{n+1}(\alpha_2 r) \right),$$

$$w_3 = \xi_i \xi K_{n+1}(\beta r),$$

$$w_4 = \xi_t \frac{n}{r} K_n(\beta r).$$

矩阵  $[P_\infty] = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4]$  中的各元素:

$$p_1 = (\alpha + \xi_f) M k_f^2 K_n(\alpha_1 r),$$

$$p_2 = (\alpha + \xi_f) M k_s^2 K_n(\alpha_2 r),$$

$$p_3 = 0,$$

$$p_4 = 0.$$