

DOI: 10.11779/CJGE201601002

# 一维固结理论一般解与固结沉降过程简便计算

章为民<sup>1, 2, 3</sup>, 顾行文<sup>1, 2</sup>

(1. 南京水利科学研究院, 江苏 南京 210029; 2. 水利部水科学与水工程重点实验室, 江苏 南京 210029;

3. 国家能源水电工程安全与环境技术研发中心, 江苏 南京 210029)

**摘要:** 对代表目前研究水平的几个主要固结理论解析解进行了分析研究, 结果表明, 线性、非线性、大变形、次固结流变等条件下的固结理论解析解可用一个一般解形式来表示, 而一般解的形式与经典 Terzaghi 固结理论解相同, 只需用变量  $D_v(t)$  代替 Terzaghi 常数固结系数  $C_v$ 。研究表明, 不同的  $D_v(t)$  形式反映了固结模型中的不同假定, 通过拟合试验得到的  $D_v(t)$  可以综合反映非线性、大变形与次固结等影响因素。在此基础上, 建议了一个简便的固结变形时间过程计算方法。建议方法无须另行复杂的参数试验, 方法简单实用, 与试验结果吻合很好。

**关键词:** 固结理论; 一般解; 过程模拟; 变系数; 固结变量系数; 非线性; 有限变形; 次固结

**中图分类号:** TU43

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-4548(2016)01-0035-08

**作者简介:** 章为民(1959-), 男, 江苏连云港人, 教授级高级工程师, 博士生导师, 长期从事岩土工程和岩土力学方面的科研工作。E-mail: wmzhang@nhri.cn。

## General solution to one-dimensional consolidation theories and simple computation method for consolidation settlement

ZHANG Wei-min<sup>1, 2, 3</sup>, GU Xing-wen<sup>1, 2</sup>

(1. Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210029, China; 2. Key Laboratory of Water Science and Hydraulic Engineering of MWR,

Nanjing 210029, China; 3. R&D Center of Hydro-Power Engineering Safety and Environmental Technology of NEA, Nanjing 210029, China)

**Abstract:** Several representative analytic solutions to the consolidation theories are analyzed. The results show that there is a general solution which can be used for linearity, nonlinearity, large deformation and secondary consolidation analysis. The general solution is the same as the Terzaghi consolidation theory in form, and only the variable  $D_v(t)$  is used to replace the consolidation coefficient  $C_v$ . Different forms of  $D_v(t)$  reflect different assumptions in the consolidation theories. A simple method to compute the process of the consolidation settlement is suggested, and the results by the proposed method are in good agreement with the experimental ones.

**Key words:** consolidation theory; general solution; process simulation; variable coefficient; variable consolidation coefficient; nonlinearity; finite strain; secondary consolidation

## 0 引言

自 1923 年 Terzaghi 提出渗透固结理论, 90 年来 Terzaghi 固结理论的基本思想和方法被广泛应用于工程实践, 发挥了重要的基础性作用。土的沉降计算一般包括两方面的内容, 总沉降量和沉降的时间过程。今天在许多情况下已能够预估出不超过 10%~20% 的总沉降量或最终沉降量, 但是预估沉降与时间关系的能力仍然相当差<sup>[1]</sup>, 按照 Terzaghi 理论预估的沉降变形时间过程常常与实测相差甚远, 甚至无法准确地再现固结试验的变形时间过程。然而由于方法简单, Duncan<sup>[2]</sup>指出, 尽管存在一些众所周知的缺陷, 传统 Terzaghi 固结理论仍然是教授和解释固结物理过程和

快速评估沉降的有效工具和方法。

1993 年 Duncan<sup>[2]</sup>在第 27 次太沙基讲座中专题分析了传统 Terzaghi 固结理论的不足, 认为常数固结系数、线弹性土骨架以及均匀应变 3 个假定是导致传统 Terzaghi 固结理论产生偏差的主要原因。1998 年 Olson<sup>[3]</sup>在第 31 次太沙基讲座中又再次专门讨论了固结变形的时间过程问题。认为固结系数的变化、大应变、非线性的应力应变关系、多向渗流和次固结问题是软土地基变形时间过程研究中应当考虑的基本方面。他们都认为 Terzaghi 常数固结系数假定缺乏合理

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51379132)

收稿日期: 2014-12-27

性。而事实上在室内试验中,很早就已发现不同固结压力得到的固结系数不是常数。

关于 Terzaghi 固结理论,普遍认同的几个主要问题是,变形系数和渗透系数是常数,没有考虑大变形问题,没有考虑次固结流变问题。由于数学上的困难,到目前为止,虽然针对以上问题开展的研究有很多,但只有少数的研究得到了解析解。Davis 等<sup>[4]</sup>采用  $e - \lg p$  的非线性应力变形关系改进了变形的线性关系,但仍假定固结系数为常数,即渗透性与压缩性成比例,得到了一维非线性固结的解析解。Lekha 等<sup>[5]</sup>采用  $e - \lg p$  和  $e - \lg k$  的关系改进了 Davis 等的理论,得到了解析解。Gibson 等<sup>[6]</sup>考虑了大变形效应,提出了有限应变固结模型,并建议了  $C_F = C_0 - \alpha(e_0 - e)$  的变系数方法。谢康和等<sup>[7]</sup>考虑了渗透系数和压缩性特性的变化,得到了拉格朗日坐标下的大应变固结方程与解析解。Amiri 等<sup>[8]</sup>假定压缩性和渗透性随固结时间按指数函数关系变化,得到了解析解。Poskitt 等<sup>[9]</sup>最早采用  $e - \lg p$  和  $e - \lg k$  建立了非线性有限应变的一维固结理论,并用摄动法得到了解析解,Poskitt 理论是一个比较完整的固结理论解,其特点与谢康和解类似,同时考虑了压缩系数、渗透系数的变化以及有限变形的影响,但没有考虑次固结蠕变的影响。Merchant<sup>[10]</sup>与 Gibson 等<sup>[11]</sup>将弹簧和粘壶并联来模拟次固结流变,得到了流变固结问题的解析解。

然而,由于考虑多影响因素的固结方程在数学求解上有一定的难度,多数情况下的固结方程仍需用数值方法求解,如 Schiffman 等<sup>[12]</sup>假定渗透系数  $k$  和体积压缩系数  $m_v$  为深度的多项式函数和指数函数,利用有限差分法对瞬时加载条件下软土一维固结问题进行了数值求解。Barden 等<sup>[13]</sup>用有限差分法计算了非线性蠕变问题。Mesri 等<sup>[14]</sup>在非线性的固结研究中考虑了压缩性和渗透性的变化,并用有限差分法编制了一维大应变固结计算分析程序,计算结果与实际观测吻合很好。

笔者等<sup>[15]</sup>根据 Terzaghi 解建议了一个变  $C_v$  的固结/回弹过程计算方法,取得很好效果。但由于变  $C_v$  方法的理论依据是 Terzaghi 解,理论上并不十分完备。本文对目前得到解析解的几个主要固结理论进行了分析研究,这些解析解基本反映了目前固结模型解析理论研究的水平。

## 1 固结理论的解析解

### 1.1 Terzaghi 固结理论

传统的 Terzaghi 固结方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

式中,  $C_v = k/m_v \gamma_w$  固结系数,  $k$  是渗透系数,  $m_v$  是体积压缩系数,  $\gamma_w$  是水的重度。为了便于求解, Terzaghi 假定渗透系数  $k$  和体积压缩系数  $m_v$  在土体压密固结过程中保持不变,即渗透系数  $k$ 、体积压缩系数  $m_v$  和固结系数  $C_v$  在固结过程均为常量。

Terzaghi 固结理论解析解为

$$\bar{U} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4H^2} C_v t}, \quad (2)$$

式中,  $\bar{U}$  是  $t$  时刻的平均固结度,  $H$  为排水路径。

### 1.2 Davis 和 Ragmond 非线性固结理论

Davis 等<sup>[4]</sup>采用  $e - \lg p$  的非线性关系来改进 Terzaghi 的线性压缩变形关系,

$$e = e_0 - I_c \lg(\sigma'/\sigma'_0). \quad (3)$$

并假定固结系数  $C_v$  为常数,即固结过程中土的渗透性与压缩性的变化成正比,

$$k = \gamma_w C_v m_v. \quad (4)$$

得到的压缩度解析解为

$$\bar{U}_s = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4H^2} C_v t}. \quad (5)$$

由于假定固结系数  $C_v$  为常数,得到的压缩度解析解(5)与 Terzaghi 解式(2)相同。此时由于采用了非线性的变形关系,按应力定义的固结度  $U_u$  与按变形定义的压缩度  $U_s$  是不同的。

### 1.3 Lekha 非线性固结理论

Lekha 等<sup>[5]</sup>改进了 Davis 等<sup>[4]</sup>的理论,取消了固结系数  $C_v$  的常数假定,采用以下的非线性关系来改进 Terzaghi 的假定,实际上其假定的非线性条件与 Poskitt 等<sup>[9]</sup>采用的假定相同。

$$e = e_0 - C_c \lg(\sigma'/\sigma'_0), \quad (6)$$

$$e = e_0 + M \lg(K/K_i). \quad (7)$$

无量纲固结方程:

$$\frac{\partial P}{\partial T_c} = P \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2}. \quad (8)$$

得到的压缩度理论解为

$$\bar{U}_s = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8}{(2m+1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4H^2} \frac{C_{vi}}{4H^2} t \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 + \Delta\sigma/\sigma_i)^{(1-C_c/M)} \right] \right\}}. \quad (9)$$

定义函数  $D_v(t)$  为

$$D_v(t) = C_{vi} \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 + \Delta\sigma/\sigma_i)^{(1-C_c/M)} \right] \right\}. \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)可得

$$\bar{U}_s = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4H^2} D_v(t)t}. \quad (11)$$

对比式(2)与式(11)可发现,两式的级数形式和系数结构完全相同。其差别是在 Terzaghi 解中为  $C_v$ ,

在 Lekha 解中则是  $D_v(t)$ 。而当  $C_0/M=1$  时,  $D_v(t)=C_{vi}$ , 式 (11) 回到式 (2) Terzaghi 解。这表明, 线性与非线性固结理论的解可能具有相同的解的结构, 其差异主要体现在  $D_v(t)$  的不同表达形式上。

根据量纲一致的原则可知,  $D_v(t)$  的量纲与 Terzaghi 固结系数  $C_v$  相同,  $D_v(t)$  是初始固结系数  $C_{vi}$  的函数。为了区别 Terzaghi 固结系数, 不妨称  $D_v(t)$  为固结变量系数。

此外, 模型参数  $M$  目前尚无标准的试验方法。

#### 1.4 Gibson 大变形固结理论

Gibson 等<sup>[6]</sup>提出了以孔隙比为变量的一维非线性大应变固结理论, 改进了 Terzaghi 的小变形假定。其固结方程为

$$\pm \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) \frac{d}{de} \left[ \frac{k(e)}{1+e} \right] \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{k(e)}{\rho_f(1+e)} \frac{d\sigma'}{de} \frac{\partial e}{\partial z} \right] + \frac{\partial e}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

Gibson 把一维薄层线性条件作为大变形理论的一级近似, 得到了压缩度解析解:

$$\bar{U}_s = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2}{4H^2} \frac{\pi^2}{C_F} t}. \quad (13)$$

式 (13) 在形式上与 Terzaghi 固结理论解析解相同。Gibson 未给出大变形条件的解析解, 建议按下式计算  $C_F$ :

$$C_F = C_0 - \alpha(e_0 - e). \quad (14)$$

并进行了不同情况饱和薄层软土的固结计算。实际上, 式 (14) 可以看作是变  $C_v$  系数计算方法的建议。

#### 1.5 谢康和大应变固结理论

谢康和等<sup>[7]</sup>采用非线性的压缩与渗流关系, 在拉格朗日坐标下, 求得了非线性大应变固结理论解析解, 假设土体在固结中压缩性和渗透性的非线性变化遵循:

$$k_v = k_{v0} \frac{(1+e)^2}{(1+e_0)^2}, \quad (15)$$

$$e = e(a, t) = (1+e_0) \exp[-m_{vi}(\sigma' - \sigma'_0)] - 1. \quad (16)$$

由此得到压缩度解析解的结果为

$$\bar{U}_s = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2}{4H^2} \frac{\pi^2}{C_{v0}} t}. \quad (17)$$

显然, 式 (17) 与式 (2) Terzaghi 解在形式上是相同的。

#### 1.6 Amiri 非线性固结理论

Amiri 等<sup>[8]</sup>假定  $k(z, t)$  和  $a(z, t)$  空间均值的变化规律为

$$\left. \begin{aligned} \bar{k} &= k_i e^{-\alpha t} \\ \bar{a} &= a_i e^{-\beta t} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其固结方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_{vi} e^{-(\alpha-\beta)t} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (19)$$

通过分析求解, 得到如下解析解:

$$\bar{U}_s = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2}{4} \frac{\pi^2}{\pm A} \left( \frac{e^{\pm A t} - 1}{\pm A} \right)}. \quad (20)$$

从一般性的角度出发, 类似式 (10) 定义函数:

$$D_v(t) = \frac{H^2}{t} \frac{e^{\pm A t} - 1}{\pm A}. \quad (21)$$

则式 (20) 可以写为

$$\bar{U}_s = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2}{4} \frac{\pi^2}{H^2} D_v(t) t}. \quad (22)$$

将中间变量  $A$ ,  $T$  定义代入式 (21) 得

$$D_v(t) = C_{vi} \left[ 1 - \frac{(\alpha - \beta)t - (1 - e^{-(\alpha - \beta)t})}{(\alpha - \beta)t} \right]. \quad (23)$$

对比式 (22) 与式 (2) 可以发现, 两式的基本形式相同, 之间的差别是  $C_v$  与  $D_v(t)$ 。根据洛必达法则, 式 (23) 中, 当  $\alpha - \beta$  趋于 0,  $D_v(t)$  等于  $C_{vi}$ , 式 (22) 回到 Terzaghi 解。对比式 (23) 与式 (10) 则表明, 不同的  $D_v(t)$  是固结模型的不同假定的反映。

#### 1.7 Poskitt 非线性有限应变固结理论

Poskitt<sup>[9]</sup>比 Lekha 等<sup>[5]</sup>更早采用了式 (6)、(7) 的非线性关系, 并以压缩度为变量, 建立了非线性有限应变一维固结理论, 固结方程为

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{(ab)^\mu}{1 - \mu\beta} \frac{\partial \mu}{\partial X} \right] = \frac{\partial \mu}{\partial T}, \quad (24)$$

式中,  $\mu$  为压缩度,  $a$  是最终有效应力与初始有效应力之比,  $b$  为最终与初始渗透系数之比,  $\beta$  有限应变,  $X$ ,  $T$  是无量纲量。

Poskitt 模型同时考虑了压缩和渗流的非线性, 考虑了大变形问题。Poskitt 认为 Davis 等<sup>[4]</sup>的非线性理论可以看作是其理论的一个特例。实际上, Lekha 等<sup>[5]</sup>非线性理论也是其理论的一个特例。

Poskitt 采用摄动法求解了固结方程, 结果表明, Terzaghi 解与其摄动法的基本解相同,

$$\bar{U}_0 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2}{4H^2} \frac{\pi^2}{C_{v0}} t}. \quad (25)$$

Poskitt 的一级摄动近似解为

$$\bar{U}_1 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2m+1)^2}{4H^2} C_{v0} t}}{(2m+1)^2} + \alpha \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2m+1)^2}{4H^2} C_{v0} t}}{(2m+1)^2} F_m, \quad (26)$$

式中,

$$F_m = (2m+1)^2 \frac{\pi^2 C_{v0}}{H^2} t - \frac{16}{\pi^2} \sum_{p=\text{odd}} \sum_{q=\text{odd}}.$$

$$\frac{(2m+1)^4 [1 - e^{-\frac{(p^2+q^2-(2m+1)^2)\pi^2 C_{v0} t}{H^2}}]}{[p^2 - (q - (2m+1))^2][p^2 - (q + (2m+1))^2][(2m+1)^2 - q^2 - p^2]}, \quad (27)$$

式中,  $\alpha$  为摄动参数。Poskitt 证明, 高阶摄动近似解的影响已非常小, 可以略去。经过一般等式变换, 式 (26) 可写为

$$\bar{U}_s = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4H^2} D_v(t)t}, \quad (28)$$

式中,

$$D_v(t) = C_{v0} \left( 1 - \frac{4H^2}{(2m+1)^2 \pi^2 C_{v0} t} \ln(1 - \alpha F_m) \right). \quad (29)$$

可以看到, Poskitt 解式 (28) 与之前的所有解析解的形式是相同的, 他们之间的差别主要表现为不同  $D_v(t)$  的形式。当不考虑非线性和大变形因素时,  $\alpha = 0$ ,  $D_v(t) = C_{v0}$ , Poskitt 解回到式 (2) Terzaghi 解。

### 1.8 Merchant 与 Gibson 和 Lo 流变固结理论

Merchant<sup>[10]</sup>和Gibson等<sup>[10-11]</sup>都采用了图1的模型, 将弹簧和Kelvin体并联来模拟次固结流变, 而Terzaghi主固结模型则由单根弹簧来表示。Christie<sup>[10]</sup>证明Merchant解与Gibson等解是相同的。该理论可看成是Terzaghi理论的直接引伸。其保留了Terzaghi的全部假设, 同时增加了次固结流变的模拟。Gibson等的流变固结方程,

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial z^2} = a \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \lambda \sigma' - \frac{\lambda^2}{b} \int_{t_0}^t \sigma'(z, t) \exp\left(\frac{\lambda}{b}(t - t_0)\right) dt, \quad (30)$$

式中,  $a$ ,  $b$  为弹簧变形系数,  $\lambda$  为黏壶变形系数。对式 (30) 两边作拉普拉斯变换, Gibson 等的流变固结理论解<sup>[10-11]</sup>为

$$\bar{U}_s = 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=\text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \left[ \frac{\frac{n^2 \pi^2}{M} - x_1}{x_1 - x_2} \right] e^{-\frac{x_2 T_1}{4}} - \left[ \frac{\frac{n^2 \pi^2}{M} - x_2}{x_1 - x_2} \right] e^{-\frac{x_1 T_1}{4}} \right\}, \quad (31)$$

式中,

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ 4MN + n^2 \pi^2 \pm \sqrt{(4MN + n^2 \pi^2)^2 - 16Nn^2 \pi^2} \right\}, \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{a+b}{a}, \\ N &= \frac{\lambda H^2}{b\theta}, \\ T_1 &= \frac{\theta t}{H^2}, \\ \theta &= \frac{k}{a\gamma_w}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

经过等式变换, 式 (31) 可以写为

$$\bar{U}_s = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4H^2} D_v(t)t}, \quad (34)$$

式中,

$$D_v(t) = \theta \left[ 1 - \frac{4H^2}{(2m+1)^2 \pi^2 \theta t} \ln \left( \frac{\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{M} - x_2}{x_1 - x_2} \right) e^{-\frac{(x_1 - (2m+1)^2 \pi^2) \theta t}{4H^2}} - \frac{\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{M} - x_1}{x_1 - x_2} e^{-\frac{(x_2 - (2m+1)^2 \pi^2) \theta t}{4H^2}} \right]. \quad (35)$$

不考虑流变作用时,  $\lambda = 0$ ,  $N = 0$ ,  $b = 0$ ,  $M = 1$ , 由式 (35),  $D_v(t) = \theta$ , 同时式 (34) 回到 Terzaghi 解。 $\theta$  的定义见式 (33)。

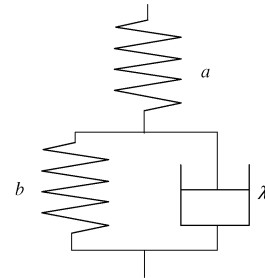


图 1 Gibson 等<sup>[11]</sup>流变固结模型

Fig. 1 Secondary consolidation model

将以上的分析结果汇总列入表 1, 可以看到: ①各种固结模型的解析解, 包括经典的 Terzaghi 固结理论、Davis 等非线性固结理论、Gibson 有限变形固结理论、谢康和非线性大应变固结理论、Amiri 非线性固结理论、Poskitt 非线性有限变形固结理论、Merchant、Gibson 等流变固结理论具有相同形式的一般解析解。②不同的  $D_v(t)$  函数形式实际上反映了固结模型中的不同假定, 与固结模型中采用的变形关系、渗流关系、是否考虑有限变形、是否考虑次流变等因素有关。③  $D_v(t)$  的量纲与 Terzaghi 固结系数  $C_v$  相同,  $D_v(t)$  是初始固结系数  $C_{vi}$  的函数, 当固结模型去掉附加的特殊考虑 (如非线性、大变形等) 时,  $D_v(t) = C_{vi}$ 。考虑到 Terzaghi 固结系数  $C_v$  为常数,  $D_v(t)$  是变量, 定义  $D_v(t)$  为固结变量系数。

## 2 固结过程计算方法

通过以上的分析, 可以看出, 固结时间过程的计算有两种方法与途径。①方法一, 是常规计算方法, 将试验获得的参数直接代入相应的解析解, 可计算求得固结的时间过程。如采用流变固结模型可用 Gibson 等解式 (31) 计算, 如不考虑流变可用 Poskitt 解式 (26) 计算, 用 Terzaghi 模型则可代入式 (2) 计算, 等等。

表 1 固结理论的一般解

Table 1 General solution to one-dimension consolidation theories

| 固结模型                                | 一般解   | $D_v(t)$   |
|-------------------------------------|---|--|
| Terzaghi                            |   | $C_v$  |
| Davis 等 <sup>[4]</sup> 非线性理论        |   | $C_v$  |
| Lekha 等 <sup>[5]</sup> 非线性固结理论      |   | $C_{vi} \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 + \Delta\sigma / \sigma_i)^{(1-C_v/M)} \right] \right\}$   |
| Gibson 等 <sup>[6]</sup> 非线性有限变形固结理论 |   | $C_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{C_0} (e_0 - e) \right)$  |
| 谢康和等 <sup>[7]</sup> 大应变固结理论         | $\overline{U}_s = 1 -$  | $C_{v0}$   |
| Amiri 等 <sup>[8]</sup> 非线性固结理论      | $\frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4H^2} D_v(t)t}$ | $C_{vi} \left( 1 - \frac{(\alpha - \beta)t - (1 - e^{-(\alpha - \beta)t})}{(\alpha - \beta)t} \right)$   |
| Poskitt <sup>[9]</sup> 非线性有限变形固结理论  |   | $C_{v0} \left( 1 - \frac{4H^2}{(2m+1)^2 \pi^2 C_{v0} t} \ln(1 - \alpha F) \right)$   |
| Gibson 等 <sup>[10]</sup> 流变固结理论     |   | $\frac{k}{\alpha \gamma_w} \left[ 1 - \frac{4H^2}{(2m+1)^2 \pi^2 \theta t} \ln \left( \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{M} - x_2 \frac{(x_1 - (2m+1)^2 \pi^2) \theta t}{4H^2} - \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{M} - x_1 \frac{(x_2 - (2m+1)^2 \pi^2) \theta t}{4H^2} \right) \right]$ |

②方法二, 表 1 提示了与常规方法不同的计算路径和步骤。即先根据试验参数, 按照表 1 计算  $D_v(t)$ , 将得到的  $D_v(t)$  代入一般解, 也可得到固结变形的时间过程。

显然, 对于表 1 中的任一固结模型而言, 这两种不同计算路径得到的结果是完全一致的。即把  $D_v(t)=C_v$ =常数, 代入表 1 一般解得到的结果是 Terzaghi 解, 而若用 (29) 式计算  $D_v(t)$ , 则从一般解得到结果必定是 Poskitt 解。同理, 如果  $D_v(t)$  是符合实际的真实变化规律, 那么按照一般解得到的就一定是真实正确的结果。这样就可以把固结时间过程问题转化为如何求  $D_v(t)$  的问题。

从表 1 可以看到, 不同固结模型理论的  $D_v(t)$  差异很大, 如 Terzaghi 理论是常数, 而 Poskitt 理论式 (29) 却非常繁复。可以确定的是, 不同的  $D_v(t)$  反映了固结模型的不同假定条件, 且由于那些假定的条件并不完全符合实际, 它们都是近似的。表 1 有几个问题需要说明, 首先, 表 1 中的解析解是针对 Terzaghi 理论的几个基本缺陷, 从一个或几个方面进行的改进, 目前并没有得到包含所有影响因素的理论解析解, 如 Poskitt 解考虑了非线性和有限变形问题, 但没有考虑次固结流变的影响, 而 Gibson 等理论则是在 Terzaghi

假定下建立的, 没有考虑非线性和有限变形问题。目前情况下要得到包含所有影响因素的理论解析解在数学上仍有很大的难度。其二, 对土的基本特性的认识把握仍有差距, 如对渗透特性与孔隙比、密度、应力、变形的变化规律的认识与实际尚有距离, 表 1 各模型采用的渗透特性关系差异很大, 并没有统一的认识, 认识的不足必定会影响解析解的准确性。另外, 有的理论模型参数获取难度大, 甚至获取模型试验参数本身就是一项复杂而经验性的工作 (如渗透特性  $e - \lg k$  参数和流变次固结参数), 使这些方法难以在工程实际中应用。

因此, 表 1 的意义在于, 它表明各种固结理论的解析解, 包括经典理论、非线性理论、有限变形理论和流变固结理论具有一个相同形式的一般解, 而不是  $D_v(t)$  的具体形式, 因为不同的  $D_v(t)$  是在不同的假定条件下得到的, 而这些假定并不完全符合实际。显然, 如能通过试验直接求得  $D_v(t)$ , 不仅可以排除人为假定的影响, 弥补认识的不足, 也可以简化计算参数的试验过程, 简化计算的过程, 应是一个合理的选择。

2.1  $D_v(t)$  试验值的反演方法

表 1 的一般解与经典 Terzaghi 解式 (2) 相同, 是一个无法求和的无穷级数。分析表明, 该级数的收敛

速度非常快, 当无量纲时间  $T_v (D_v(t)t/H^2) > 0.1$  时, 取第一项的截断误差  $< 3\%$ , 当  $T_v > 0.3$ , 误差  $< 0.2\%$ 。根据这一特性, 可以取第一项替代级数的计算<sup>[15-17]</sup>, 即表 1 的一般解可以写为

$$U = 1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2 D_v(t)}{4 H(t)^2} t} \quad (36)$$

由式 (24) 可以得到<sup>[15, 18]</sup>

$$D_v(t) = \frac{4H(t)^2}{\pi^2 t} \ln \left( \frac{8}{\pi^2 (1-U(t))} \right) \quad (37)$$

在固结试验中, 式 (25) 中的  $U(t)$ ,  $H(t)$ ,  $t$  是已知的, 其中  $U(t)$  可按式 (38) 计算:

$$U(t) = \frac{S(t)}{S_\infty} \quad (38)$$

式中,  $S(t)$  是  $t$  时刻的沉降变形,  $S_\infty$  是最终沉降变形。

这样就可以通过常规的固结试验直接得到固结变量系数  $D_v(t)$  的试验值, 无须进行复杂的渗透特性 ( $e - \lg k$ ) 等专门的特殊试验, 所得  $D_v(t)$  试验值的截断误差仍可用:  $T_v$  为 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 误差为 12%, 2.8%, 0.21%, 0.018%, 0.00018%。可以看到, 多数条件下, 本方法得到的试验值误差满足工程研究的需要。

## 2.2 $D_v(t)$ 试验值的拟合

进行试验数据的拟合是为了找到合理的  $D_v(t)$  表达形式及其参数。表 1 的  $D_v(t)$  函数形式复杂多样, 不适合作为拟合的函数。经过大量的试验数据分析, 本文建议采用下式来拟合  $D_v(t)$  的试验数据:

$$D_v(t) = D_{v\infty} + \frac{D_{v0} - D_{v\infty}}{1 + \left( \frac{t}{t_0} \right)^n} \quad (39)$$

式中,  $t=0$  时,  $D_v(t)=D_{v0}$ 。  $t=\infty$ ,  $D_v(t)=D_{v\infty}$ 。  $t=t_0$  时,  $D_v(t)$  为中值, 是曲线的转折点,  $n$  是系数。参数  $D_{v0}$ ,  $D_{v\infty}$ ,  $t_0$ ,  $n$  可通过拟合试验获得。考虑到加载初期瞬时沉降和不稳定渗流的影响, 本文从  $D_v(t)$  试验值的最大值开始拟合。结果表明, 式 (39) 与试验结果的拟合很好, 见图 2。

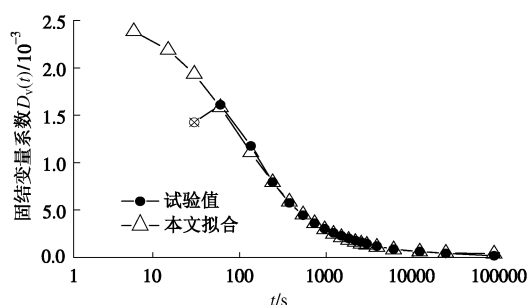


图 2  $D_v(t)$  试验数据的拟合

Fig. 2 Variation of  $D_v(t)$  with time

## 2.3 固结过程的计算方法

根据固结试验可以得到式 (39)  $D_v(t)$  的参数, 将  $D_v(t)$  代入表 1 一般解, 便可得到固结变形的时间过程。这便是本文建议的简便计算方法, 其方法虽然简单, 但从表 1 可以看出, 通过试验拟合得到的  $D_v(t)$  实际上包含了非线性、大变形与次固结等各种影响因素。

## 3 试验结果对比

图 3 是本文方法与传统 Terzaghi 方法的对比。图中的 Terzaghi 解采用了 3 个不同的常数  $C_v$ , 以使 Terzaghi 方法尽可能接近试验结果, 可以看到, 无论如何调整  $C_v$  值, 只能使某一小段与试验接近, 不可能使全部或大部分与试验重合, 原因是 Terzaghi 方法得到的过程曲线在形态上与试验结果不同, 曲线形态不同, 提示了内在规律的差异, 传统 Terzaghi 方法得到与试验完全一致结果的可能性极小。而本文建议的方法则可以很好地再现试验过程, 与试验结果基本重合, 见图 3。

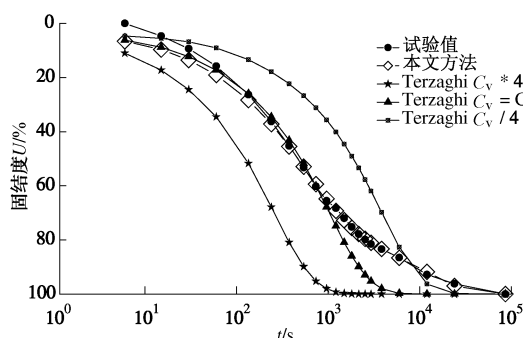


图 3 本文方法与 Terzaghi 方法的对比

Fig. 3 Comparison between proposed method and Terzaghi method

图 4 是本文方法与试验结果的对比。可以看到本文方法与试验沉降时间过程线基本重合, 有很好的 consistency。此外图中还给出了 Terzaghi 方法的计算结果。为了便于比较, 用对数坐标给出了全过程的比较 (图 4 (a)), 在笛卡尔坐标中给出了前 3000 s 的结果 (图 4 (b))。

图 5 是一个次固结流变试验的试验结果<sup>[19]</sup>, 试验时间长达 30 d。可以看到, 本文建议方法与试验值基本吻合, 表现了良好的一致性。固结沉降变形过程线的计算结果显示, 对于次固结流变问题, 本文方法亦很好地实现了全过程的模拟, 证实了表 1 的理论结果。作为对比, 图中还给出 Terzaghi 方法的计算结果, Terzaghi 方法的沉降过程与试验结果相去甚远。

图 6 是浙江玉环某工程原状土样的固结试验结果。图 6 (a) 是试验得到的固结变量系数  $D_v(t)$  随时间

的变化过程。可以看到, 在一个分级加荷的标准固结试验中, 不同固结压力条件下固结变量系数  $D_v(t)$  的变化规律基本类似, 呈从大到小逐渐减小, 每级荷载重复的特性, 表现为一个以加载过程为周期循环变化的过程因子。图 6 (b) 是本文方法得到沉降过程线与试验值的对比, 可以看到, 本文方法基本再现了试验过程, 与试验值吻合很好。

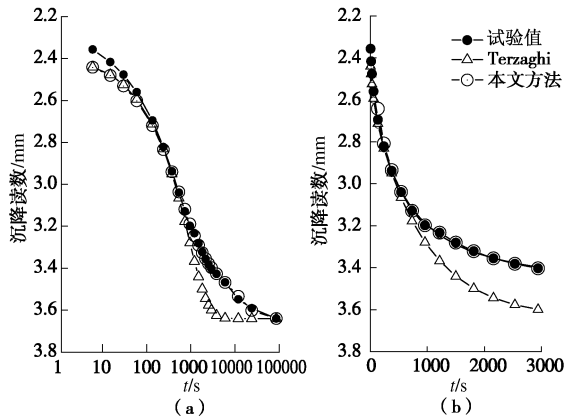


图4 本文方法与试验结果的对比

Fig. 4 Comparison between proposed method and experiments

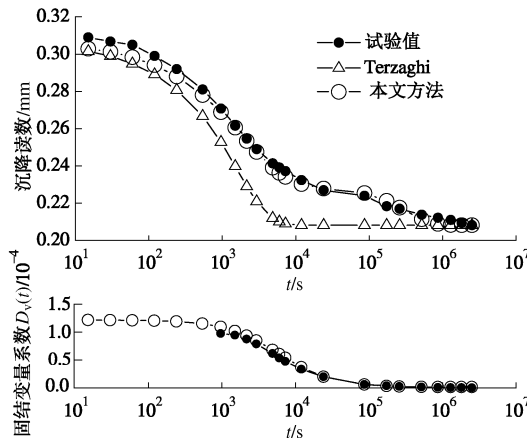


图5 本文方法与次固结试验结果

Fig. 5 Comparison between proposed method and secondary consolidation tests

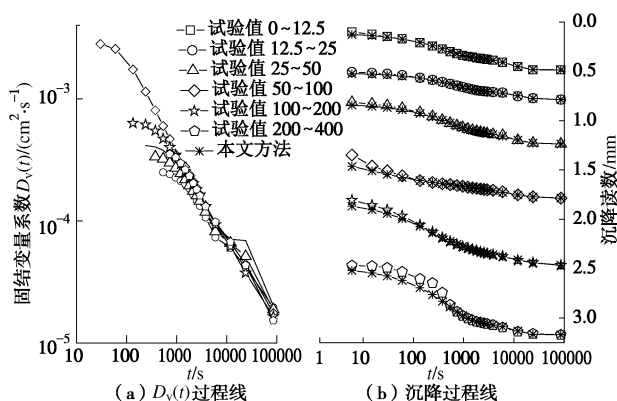


图6 本文方法与固结试验对比

Fig. 6 Comparison between proposed method and staged loading consolidation tests

## 4 结 论

(1) 本文对目前已得到解析解的几个代表性固结理论进行了分析研究, 结果表明, 线性、非线性、大变形、流变次固结等条件下的固结理论解析解均可用一个一般解来表示, 而一般解的形式与经典 Terzaghi 固结理论解相同, 只需将常数固结系数  $C_v$  用变量  $D_v(t)$  代替。

(2) 研究表明, 不同的  $D_v(t)$  函数形式反映了固结模型中的不同假定。通过拟合试验得到的  $D_v(t)$  实际上包含了非线性、大变形与次固结等影响因素。

(3) 试验结果证明, Terzaghi 固结系数  $C_v$  不是常数, 固结过程中  $C_v$  呈从大到小逐渐减小的变化规律。在分级加荷的标准固结试验中,  $C_v$  呈现出每级荷载重复的特性, 表现为一个以加载过程为周期循环变化的过程因子。

(4) 建议的固结变形过程计算方法, 理论物理背景清楚, 无须另行复杂的参数试验, 方法简单实用。结果表明, 建议方法与试验的吻合很好。

## 参考文献:

- [1] BRAND E W, BRENNER R P. Soft clay engineering[M]. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1981.
- [2] DUNCAN J M. Limitations of conventional analysis of consolidation settlement[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1993, **119**(9): 1333 - 1359.
- [3] OLSON R E. Settlement of embankment on soft clays[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 1998, **124**(4): 278 - 288.
- [4] DAVIS E H, RAYMOND G P. A non-linear theory of consolidation[J]. Géotechnique, 1965, **15**(2): 161 - 173.
- [5] LEKHA K R, KRISHNASWAMY N R, BASAK P. Consolidation of clays for variable permeability and compressibility[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2003, **129**(11): 1001 - 1009.
- [6] GIBSON R E, ENGLAND G L, HUSSEY M J L. The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays I, finite nonlinear consolidation of thin homogeneous layers[J]. Géotechnique, 1967, **17**(3): 261 - 267.
- [7] 谢康和, 郑 辉, LEO C J. 软黏土一维非线性大应变固结解析理论[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(6): 680 - 684. (XIE K H, ZHENG H, LEO C J. An analytical theory for 1-D nonlinear large strain consolidation of soft clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(6): 680 - 684.

- (in Chinese)).
- [8] AMIRI S N, ESMAEILI A. A realistic theory of soils consolidation[C]// Advances in Geotechnical Engineering, Geo-Frontiers Congress 2011. Dallas, 2011: 3828 - 3837.
- [9] POSKITT T J. The consolidation of saturated clay with variable permeability and compressibility[J]. Géotechnique, 1969: 234 - 252.
- [10] CHRISTIE I F. A re-appraisal of merchant's contribution to the theory of consolidation[J]. Géotechnique, 1964, 14: 309 - 320.
- [11] GIBSON R E, LO K Y. A theory of consolidation for soils exhibiting secondary compression[M]. Oslo: Norwegian Geotechnical Institute, 1961: 1 - 16.
- [12] SCHIFFMAN R L, GIBSON R E. Consolidation of non-homogeneous clay layers[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1964, 90(SM5): 1 - 30.
- [13] BARDEN L. Consolidation of clay with non-linear viscosity[J]. Géotechnique, 1965, 15(2): 345 - 362.
- [14] MESRI G, CHOI Y K. Settlement analysis of embankments on soft clays[J]. J Geotech Eng ASCE, 1985, 111(4): 441 - 464.
- [15] 章为民, 顾行文, 王 芳. 土的卸荷回弹试验及其时间过程的计算方法[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(6): 979 - 987. (ZHANG Wei-min, GU Xing-wen, WANG Fang. The swelling test of soils and the simulation method of unloading-swelling process[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(6): 979 - 987. (in Chinese))
- [16] 武汉水利电力学院土力学教研组. 土力学地基与基础[M]. 北京: 中国工业出版社, 1961: 174 - 174. (Soil Mechanics Laboratory, Wuhan Institute of Water conservancy and Electric Power. Soil mechanics and foundation[M]. Beijing: China Industry Press, 1961: 174 - 174. (in Chinese))
- [17] 龚晓南. 高等土力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1996: 99 - 99. (GONG Xiao-nan. Advanced soil mechnics[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1996: 99 - 99. (in Chinese))
- [18] 周 健, 闫东霄, 贾敏才, 等. 某深水港土层固结系数反演及工后长期沉降预测[J]. 岩土力学, 2008, 29(5): 407 - 410. (ZHOU Jian, YAN Dong-xiao, JIA Min-cai, et al. Back analysis of consolidation coefficient of soils and prediction of long term post-load settlement of a deep-water port[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(5): 1407 - 1410. (in Chinese))
- [19] 殷宗泽. 土体沉降与固结[M]. 北京: 中国电力出版社, 1998: 36 - 36. (YIN Zong-ze. Soil settlement and consolidation[M]. Beijing: China Electric Power Press, 1998: 36 - 36. (in Chinese))

### 向审稿人致谢

[编者按]在广大读者特别是审稿人的支持下,本刊2015年的出版工作顺利完成,并取得了较好成绩。在此公布2015年本刊审稿人的名单,向审稿人表达诚挚的尊敬和衷心的感谢!①本统计结果为审稿完成时间2014年12月16日—2015年12月15日;②本排名不分先后,但相同姓氏审者分列不同行列时,则前者群体审稿频次多于后者。

|     |     |     |     |     |     |     |        |        |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------|--------|-----|
| 闫澍旺 | 付文光 | 任建喜 | 丁洲祥 | 黄 博 | 李大勇 | 李树忱 | 施成华    | 谭晓慧    | 王星华 |
| 王幼清 | 陈晓平 | 迟世春 | 邓荣贵 | 王来贵 | 王元战 | 张林洪 | 张 明    | 郑俊杰    | 谢伟平 |
| 蔡国庆 | 陈 勇 | 崔光耀 | 高 谦 | 黄 雨 | 姜福兴 | 介玉新 | 雷国辉    | 梁正召    | 刘吉福 |
| 年廷凯 | 姚仰平 | 咎月稳 | 张先伟 | 张振南 | 周 健 | 刘 洋 | 吕玺琳    | 邵生俊    | 王伯军 |
| 王奎华 | 王者超 | 杨 敏 | 曾亚武 | 张尚根 | 赵延林 | 陈 盼 | 陈仁朋    | 高广运    | 梁 波 |
| 楼梦麟 | 卢运虎 | 芮 瑞 | 沈振中 | 王 清 | 曹卫平 | 柴华友 | 陈国兴    | 陈善雄    | 党发宁 |
| 丁选明 | 樊敬亮 | 冯志强 | 傅洪贤 | 耿克勤 | 宫凤强 | 顾欢达 | 何满潮    | 洪振舜    | 黄宏伟 |
| 雷胜友 | 李建林 | 李雄威 | 刘建锋 | 柳厚祥 | 卢萌盟 | 潘俊锋 | 饶为国    | 沈水龙    | 盛金昌 |
| 苏永华 | 王 成 | 王贵君 | 王国波 | 王明年 | 王卫军 | 王小军 | 王 哲    | 武 科    | 晏长根 |
| 杨圣奇 | 俞 峰 | 张 嘎 | 张建海 | 张乐文 | 艾智勇 | 白 冰 | 程展林    | 丁文其    | 孔令伟 |
| 刘建达 | 马 巍 | 苗强强 | 宁建国 | 钱建固 | 谭卓英 | 王保田 | 王成华    | 王建华(沪) | 王学滨 |
| 夏元友 | 叶 飞 | 张玉军 | 洪 鑫 | 乔春生 | 赵明华 | 包卫星 | 蔡晓鸿    | 蔡袁强    | 曹文贵 |
| 陈立宏 | 陈 群 | 陈忠辉 | 丛蒿森 | 戴自航 | 丁春林 | 董新平 | 杜守继    | 龚秋明    | 郭爱国 |
| 韩 煊 | 郝 喆 | 何蕴龙 | 侯 冰 | 侯朝炯 | 侯瑜京 | 胡卸文 | 胡再强    | 黄雪峰    | 季顺迎 |
| 姜朋明 | 康红普 | 雷祥义 | 李连崇 | 李 宁 | 李树清 | 李庶林 | 李顺群    | 李夕兵    | 李兴高 |
| 李元海 | 李志清 | 梁建文 | 刘春原 | 刘恩龙 | 刘红岩 | 刘 润 | 刘斯宏    | 刘文白    | 刘元雪 |
| 楼晓明 | 鲁晓兵 | 陆建飞 | 马崇武 | 缪协兴 | 潘立友 | 彭明祥 | 齐吉琳    | 史旦达    | 孙德安 |
| 谭忠盛 | 唐朝生 | 唐红梅 | 童小东 | 王凤池 | 王 刚 | 王家臣 | 王建华(津) | 王金安    | 王丽霞 |
| 王年香 | 王铁行 | 王小岗 | 王元汉 | 吴顺川 | 项 伟 | 谢康和 | 邢皓枫    | 徐日庆    | 徐永福 |
| 徐志伟 | 杨小林 | 杨雪强 | 杨志银 | 姚海林 | 姚建国 | 叶观宝 | 叶为民    | 张常光    | 张季如 |
| 张文杰 | 郑明新 | 周德培 | 周国庆 | 周顺华 | 朱权洁 | 朱彦鹏 | 邹德高    | 邹维列    | 陈 勉 |

(下续 90 页)