

DOI: 10.11779/CJGE2015S2032

# 移动荷载作用下周期性高架铁路的桩-土-结构耦合动力学模型

沙 萱, 范 增, 陆建飞

(江苏大学土木工程与力学学院, 江苏 镇江 212013)

**摘 要:** 在移动荷载作用下, 周期性高架铁路的上部结构、桩基础及地基会产生耦合振动。为了考虑上述耦合作用, 建立了桩土边界元模型来确定桩基础的柔度。根据墩和梁的振动方程推导了墩和梁的传递矩阵; 根据梁-梁-墩接头处的联结条件, 建立了接头处的传递矩阵。为提高精度, 采用铁木辛柯梁理论来描述墩和梁的弯曲振动。通过 Fourier 变换和序列 Fourier 变换, 把周期性高架铁路对单个移动荷载频域内的动力响应表示为响应函数沿代表跨的积分。利用上述墩和梁及接头处的传递矩阵和桩基础的柔度, 得出了耦合情形下高架铁路的响应函数。本文的数值结果表明, 刚性支撑和桩基础支撑的周期性高架铁路在单个移动荷载作用下的动力响应有明显差别。

**关键词:** 周期性高架铁路; 移动荷载; 桩-土-结构耦合; 边界元方法; 铁木辛柯梁理论

**中图分类号:** TU473.1; TU476.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2015)S2-0164-06

**作者简介:** 沙 萱(1984-), 女, 回族, 江苏南京人, 硕士研究生, 从事岩土工程研究。E-mail: ljfdoctor@yahoo.com。

## Coupled dynamic model for pile-soil-periodic-viaduct under moving loading

SHA Xuan, FAN Zeng, LU Jian-fei

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

**Abstract:** When a periodic viaduct is subjected to moving loadings, the vibrations of the superstructure, pile foundation and soil will be coupled. To investigate the dynamic response of the periodic viaduct considering the pile-soil-structure interaction, a boundary element model for the pile-soil system is established to determine the compliances of the pile foundation. By using the governing equations for piers and beams, the corresponding transfer matrices are derived. According to the joint conditions at the beam-beam-pier (BBP) junction, the transfer matrix at the junction is obtained. To improve the proposed model, the Timoshenko beam theory is used to describe the flexural vibrations of the piers and beams. By means of the Fourier and the sequence Fourier transforms, the frequency domain response of the periodic viaduct under a single loading is reduced to an integral of the frequency-wavenumber domain response function over the representative span of the viaduct. Employing the transfer matrices of the piers, beams and BBP junctions as well as the compliances of the pile foundation, the response function for the coupled vibration of the viaduct is obtained. The numerical results show that there are obvious differences between the dynamic responses of the rigidly-supported and pile-supported viaducts.

**Key words:** periodic viaduct; moving loading; pile-soil-structure coupling; boundary element method; Timoshenko beam theory

## 0 引 言

由于高架铁路在国内外迅速发展, 对其研究也日益深入。对建于坚硬场地上的高架铁路, 由于基础刚度大, 可近似假设墩底固定。但对建于深厚软弱地基上的高架铁路, 由于桩基刚度相对较小, 这种假设不再适用。随着计算机技术的发展, 越来越多关于高架桥动力响应的研究开始涉及上下部结构的耦合作用。边学成<sup>[1]</sup>提出了一种准解析方法来分析高速列车运行荷载作用下计及桥梁和地基相互作用的高架桥的动力

响应, 用阻抗函数来表示群桩基础对上部桥梁结构的支撑作用。Takemiya 和 Bian<sup>[2]</sup>数值模拟了考虑土-基础-桥梁相互作用的新干线在高速运行列车作用下的振动响应以及其附近的地面振动, 并把计算结果和现场实测结果进行了对比, 其计算模型每单元采用三跨连续梁。李忠献<sup>[3]</sup>采用等效的方法将群桩等效成一根

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11272137)

收稿日期: 2015-03-26

单桩, 桩侧土对桩的作用等效简化为作用在桩基节点处的弹簧阻尼器系统, 分析了轻轨铁路车-桥耦合系统振动问题。Devesa<sup>[4]</sup>研究了土的刚度对高速运行列车作用下桥的动力响应的影响, 发现考虑土作用时所得到的加速度值总是大于刚性支撑时的值。

值得指出的是, 虽然已有不少学者对固定在半空间土体表面的轨道系统及有限跨高架铁路在移动荷载作用下的动力响应展开了研究, 但对本文所讨论的无限周期性高架铁路在移动荷载作用下的动力响应尚缺少研究, 因此, 建立周期性高架铁路在移动荷载作用下的桩-土-结构耦合模型有其必要性。

## 1 桩基础支撑周期性高架铁路模型

本文将超长等跨的高架铁路简化为图 1 所示的周期性结构。如图 1 所示, 每跨上部结构的混凝土梁、钢轨及扣件等简化为左、右复合梁。梁间轨道简化为梁-梁联结弹簧。高架铁路的每跨通常包含多个桥墩, 为简便计, 本文中假设每跨只包含一个桥墩。复合梁和桥墩通过梁-墩联结弹簧连接。工程实际中, 高架铁路的每个桥墩由群桩基础支撑, 且桥墩和桩基础间通过承台连接。本文则把群桩基础简化为一根等效的桩基础, 这样高架铁路的基础便简化为周期性的排桩。

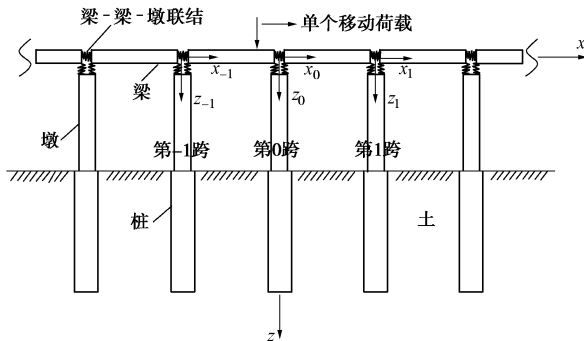


图 1 单个移动荷载作用下桩基础支撑周期性高架铁路示意图

Fig. 1 Illustration for a pile-supported periodic viaduct subjected to a moving loading

## 2 桩土相互作用的边界元模型

### 2.1 频率波数域内桩土耦合边界元模型的建立

如上所述, 本文中高架铁路的下部结构简化为埋置于半空间土体中的周期性排桩。周期性排桩对高架铁路上部结构响应的影响通过其柔度来体现。为求排桩柔度, 本文将引入频率波数域内桩土耦合边界元模型。由于此模型会涉及 Fourier 变换和序列 Fourier 变换, 因此, 下面引入 Fourier 变换和序列 Fourier 变换的定义。对时间函数  $f(t)$ , Fourier 变换的正、逆变换分别为<sup>[5]</sup>

$$\bar{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1)$$

上式中,  $t$  为时间,  $\omega$  为圆频率, 上标  $\sim$  表示频域内的变量。对空间函数  $f(x)$ , Fourier 变换的正、逆变换分别为

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk \quad (2)$$

其中,  $x$  表示空间变量,  $k$  表示波数, 上标  $\wedge$  表示波数域内的变量。

对定义于相邻格点距离为  $L$  的一维周期性格点上的函数  $f(nL)$ , 其一维序列 Fourier<sup>[5]</sup>正变换和逆变换可表示为

$$\tilde{f}(\kappa) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(nL) e^{in\kappa L}, \quad f(nL) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi/L}^{+\pi/L} \tilde{f}(\kappa) e^{-in\kappa L} d\kappa \quad (3)$$

上式中,  $n$  为任意整数,  $\kappa$  为波数, 上标  $\sim$  表示波数域内的变量。

本文中桩和土体均简化为弹性介质。弹性介质在频域内的运动方程为<sup>[6]</sup>

$$\mu \bar{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \bar{u}_{j,ji} = -\rho \omega^2 \bar{u}_i \quad (4)$$

式中,  $\bar{u}_i$  为弹性介质的位移,  $\lambda$  和  $\mu$  为弹性介质的拉梅常数,  $\rho$  为弹性介质的密度。上述弹性介质的本构关系为<sup>[6]</sup>

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\mu \bar{\varepsilon}_{ij} + \lambda \delta_{ij} \bar{\varepsilon} \quad (5)$$

式中,  $\bar{\sigma}_{ij}$  和  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  分别为弹性介质的应力和应变分量,  $\bar{\varepsilon}$  和  $\delta_{ij}$  分别为体积应变和克罗内克符号。基于动力互易定理, 弹性介质在频域内的边界积分方程为<sup>[7]</sup>

$$c_{ij} \bar{u}_j(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\Gamma} [\bar{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \bar{t}_j(\mathbf{y}, \omega) - \bar{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \bar{u}_j(\mathbf{y}, \omega)] d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (6)$$

式中  $\bar{u}_j$  和  $\bar{t}_j$  为频域内弹性介质的边界位移和面力;  $\bar{U}_{ij}$  和  $\bar{T}_{ij}$  为频域内弹性介质位移和面力的格林函数;  $c_{ij}$  为边界系数;  $\Gamma$  代表弹性介质的边界;  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  为边界点坐标。

鉴于本文中桩-土系统沿  $x$  轴方向呈周期性, 利用上述序列 Fourier 变换, 可得如下频率波数域内半空间土体的边界积分方程<sup>[8]</sup>:

$$c_{ij} \tilde{\tilde{u}}_j^{(S)}(\kappa, \mathbf{x}^{(e)}, \omega) = \int_{\Gamma_s^{(e)}} \tilde{\tilde{U}}_{ij}^{(S)}(\kappa, \mathbf{x}^{(e)} - \mathbf{y}^{(e)}, \omega) \tilde{\tilde{t}}_j^{(S)}(\kappa, \mathbf{y}^{(e)}, \omega) d\Gamma(\mathbf{y}^{(e)}) - \int_{\Gamma_s^{(e)}} \tilde{\tilde{T}}_{ij}^{(S)}(\kappa, \mathbf{x}^{(e)} - \mathbf{y}^{(e)}, \omega) \tilde{\tilde{u}}_j^{(S)}(\kappa, \mathbf{y}^{(e)}, \omega) d\Gamma(\mathbf{y}^{(e)}), \quad \mathbf{x}^{(e)} \in \Gamma_s^{(e)} \quad (7)$$

式中  $\tilde{\tilde{u}}_j^{(S)}$  和  $\tilde{\tilde{t}}_j^{(S)}$  为频率波数域内土体边界位移与面力;  $\tilde{\tilde{U}}_{ij}^{(S)}$  和  $\tilde{\tilde{T}}_{ij}^{(S)}$  为频率波数域内土体位移与面力的格林函数;  $\Gamma_s^{(e)}$  为代表性单元中土体的边界;  $\mathbf{x}^{(e)}$  和  $\mathbf{y}^{(e)}$  表示土体边界点  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  在代表性单元中所对应的坐

标。对于桩基础,利用序列 Fourier 变换,可得其频率波数域内边界积分方程:

$$c_{ij} \tilde{u}_j^{(p)}(\kappa, \mathbf{x}^{(e)}, \omega) = \int_{\Gamma_p^{(e)}} \bar{U}_{ij}^{(p)}(\mathbf{y}^{(e)} - \mathbf{x}^{(e)}, \omega) \tilde{t}_j^{(p)}(\kappa, \mathbf{y}^{(e)}, \omega) d\Gamma(\mathbf{y}^{(e)}) - \int_{\Gamma_p^{(e)}} \bar{T}_{ij}^{(p)}(\mathbf{y}^{(e)} - \mathbf{x}^{(e)}, \omega) \tilde{u}_j^{(p)}(\kappa, \mathbf{y}^{(e)}, \omega) d\Gamma(\mathbf{y}^{(e)}), \quad \mathbf{x}^{(e)} \in \Gamma_p^{(e)} \quad (8)$$

式中  $\tilde{u}_j^{(p)}$  和  $\tilde{t}_j^{(p)}$  为频率波数域内桩基础的边界位移与面力;  $\bar{U}_{ij}^{(p)}$  和  $\bar{T}_{ij}^{(p)}$  为频域内桩基础的位移及面力的格林函数;  $\Gamma_p^{(e)}$  为代表性单元中桩的边界;  $\mathbf{x}^{(e)}$  和  $\mathbf{y}^{(e)}$  为桩基础边界点  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  在代表性单元中所对应的坐标。值得指出的是,这里的格林函数  $\bar{U}_{ij}^{(p)}$  和  $\bar{T}_{ij}^{(p)}$  与波数  $\kappa$  无关,因此,其为一般弹性介质的格林函数<sup>[8]</sup>。由式(7)和(8)并应用边界元方法可得土体和桩基础边界元列式,进而建立频率波数域内桩土耦合的边界元模型<sup>[8]</sup>。

## 2.2 桩基础的柔度

高架铁路受移动荷载作用时,会产生面内的振动,桩顶在轴力、剪力和弯矩作用下将会产生竖向、横向位移以及  $xoz$  平面内的转角,桩顶的广义位移和广义力向量可分别表示为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_p(\kappa, \omega) &= \left\{ \tilde{u}_p(\kappa, \omega), \tilde{v}_p(\kappa, \omega), \tilde{\theta}_p(\kappa, \omega) \right\}^T, \\ \tilde{\mathbf{f}}_p(\kappa, \omega) &= \left\{ \tilde{N}_p(\kappa, \omega), \tilde{Q}_p(\kappa, \omega), \tilde{M}_p(\kappa, \omega) \right\}^T \end{aligned} \quad (9)$$

式中  $\tilde{\mathbf{q}}_p$  和  $\tilde{\mathbf{f}}_p$  分别为桩顶的广义位移向量和广义力向量;  $\tilde{u}_p$ ,  $\tilde{v}_p$  和  $\tilde{\theta}_p$  分别为桩顶竖向位移,水平位移和转角;  $\tilde{N}_p$ ,  $\tilde{Q}_p$  和  $\tilde{M}_p$  分别为桩顶轴力,剪力和弯矩。上述的桩顶广义位移及广义力有如下关系:

$$\tilde{\mathbf{q}}_p(\kappa, \omega) = \mathbf{C}_p(\kappa, \omega) \tilde{\mathbf{f}}_p(\kappa, \omega), \quad \mathbf{C}_p(\kappa, \omega) = \begin{bmatrix} C_{VV} & C_{VH} & C_{VM} \\ C_{HV} & C_{HH} & C_{HM} \\ C_{MV} & C_{MH} & C_{MM} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中  $\mathbf{C}_p$  是排桩的柔度矩阵;  $C_{VV}$ ,  $C_{VH}$ ,  $C_{VM}$ ,  $C_{HV}$ ,  $C_{HH}$ ,  $C_{HM}$ ,  $C_{MV}$ ,  $C_{MH}$  和  $C_{MM}$  为柔度矩阵的分量。根据动力互易定理,式(10)中排桩的柔度矩阵为对称阵。

## 3 周期性高架铁路在移动荷载下的动力响应

### 3.1 梁与墩的振动控制方程及传递矩阵

为便于描述高架铁路任意跨的响应,在高架铁路的每一跨上建立如图1所示的局部坐标系。假设移动荷载作用在高架铁路所在的平面内,因此,高架铁路只产生面内振动。发生面内振动时,梁和墩将产生轴向振动和弯曲振动。为提高精度,本文采用考虑剪切

变形的铁木辛柯梁理论来描述梁和墩的振动。因此,梁和墩的传递矩阵可利用杆件的轴向振动理论和铁木辛柯梁理论来推导。

发生轴向振动时,梁和墩频域内的振动方程为<sup>[6]</sup>

$$\bar{E}_\alpha \frac{d^2 \tilde{u}_\alpha(\kappa, x_\alpha, \omega)}{dx_\alpha^2} + \rho_\alpha \omega^2 \tilde{u}_\alpha(\kappa, x_\alpha, \omega) = 0, \quad \alpha = d, b \quad (11)$$

上式中,下标  $b$  和  $d$  分别表示对应于梁和墩的物理量(下同),  $\rho_\alpha$  为密度,  $\bar{E}_\alpha$  为弹性模量,  $\tilde{u}_\alpha$  表示轴向位移,  $\alpha = b$  时  $x_\alpha$  表示代表性单元局部坐标系中的水平坐标  $x$ ,  $\alpha = d$  时  $x_\alpha$  表示代表性单元局部坐标系中的垂直坐标  $z$ 。值得指出的是,公式(11)中的复弹性模量  $\bar{E}_\alpha$  根据标准线性固体模型来确定,可表示为<sup>[9]</sup>:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\alpha(\omega) &= E_{\alpha R} \left( \frac{1 + i\omega\tau_{\alpha\sigma}}{1 + i\omega\tau_{\alpha\epsilon}} \right), \quad E_{\alpha R} = \frac{E_{\alpha 1} E_{\alpha 2}}{E_{\alpha 1} + E_{\alpha 2}}, \\ \tau_{\alpha\sigma} &= \frac{\eta_\alpha}{E_{\alpha 1} + E_{\alpha 2}}, \quad \tau_{\alpha\epsilon} = \frac{\eta_\alpha}{E_{\alpha 2}}, \quad \alpha = d, b \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $E_{\alpha 1}$  和  $E_{\alpha 2}$  为梁的标准线性固体模型的弹性参数,  $\eta_\alpha$  为黏滞系数。

根据铁木辛柯梁理论,梁和墩发生面内弯曲振动时,其控制方程为<sup>[6]</sup>

$$\begin{aligned} G_\alpha A_\alpha \delta_\alpha \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \rho_\alpha A_\alpha \omega^2 \tilde{v}_\alpha &= 0, \\ G_\alpha A_\alpha \delta_\alpha \left( \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} - \tilde{\psi}_\alpha \right) + \bar{E}_\alpha I_\alpha \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_\alpha}{\partial x_\alpha^2} + \rho_\alpha I_\alpha \omega^2 \tilde{\psi}_\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

式中  $\tilde{v}_\alpha$  为横向位移;  $\tilde{\psi}_\alpha$  为弯曲引起的截面转角;  $I_\alpha$  为横截面惯性矩;  $A_\alpha$  为横截面面积;  $G_\alpha$  为剪切弹性模量;  $\delta_\alpha$  为铁木辛柯剪力系数。此外,本文定义  $\partial \tilde{v}_\alpha / \partial x_\alpha$  为梁截面的总转角  $\tilde{\theta}_\alpha$ , 其为弯曲所引起的转角  $\tilde{\psi}_\alpha$  和剪切所引起的转角  $(\partial \tilde{v}_\alpha / \partial x_\alpha - \tilde{\psi}_\alpha)$  的总和。

按文献[10]中指出的梁和墩的内力符号规定,可得如下的梁与墩的轴力、剪力和弯矩的表达式:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_\alpha &= \bar{E}_\alpha A_\alpha \frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad \tilde{Q}_\alpha = S_\alpha G_\alpha A_\alpha \delta_\alpha \left( \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} - \tilde{\psi}_\alpha \right), \\ \tilde{M}_\alpha &= -\bar{E}_\alpha I_\alpha \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha}{\partial x_\alpha} \end{aligned} \quad (14)$$

注意,对梁  $S_b = 1$ , 对墩  $S_d = -1$ 。

对于梁和墩的任意截面  $x_\alpha$ , 其状态向量可定义为:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_\alpha(\kappa, x_\alpha, \omega) &= \left\{ \tilde{\mathbf{q}}_\alpha^T(\kappa, x_\alpha, \omega), \tilde{\mathbf{f}}_\alpha^T(\kappa, x_\alpha, \omega) \right\}^T, \\ \tilde{\mathbf{q}}_\alpha(\kappa, x_\alpha, \omega) &= \left\{ \tilde{u}_\alpha(\kappa, x_\alpha, \omega), \tilde{v}_\alpha(\kappa, x_\alpha, \omega), \tilde{\theta}_\alpha(\kappa, x_\alpha, \omega) \right\}^T, \\ \tilde{\mathbf{f}}_\alpha(\kappa, x_\alpha, \omega) &= \left\{ \tilde{N}_\alpha(\kappa, x_\alpha, \omega), \tilde{Q}_\alpha(\kappa, x_\alpha, \omega), \tilde{M}_\alpha(\kappa, x_\alpha, \omega) \right\}^T \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{q}}_\alpha$  和  $\tilde{\mathbf{f}}_\alpha$  分别表示梁和墩的广义位移和力向量。

由上述式 (11)、(13)、(14) 和 (15) 便可推导出梁和墩面内振动的传递矩阵。

### 3.2 桩基础与上部结构耦合时梁-梁-墩 (BBP) 接头的联结传递矩阵

当波在周期性高架铁路中传播通过梁-梁-墩 (BBP) 接头时, 梁的状态向量在接头两端梁上会出现跳跃。为了描述这种跳跃, 本节将建立 BBP 接头的传递矩阵。如图 2 所示, 高架铁路代表性单元的 BBP 接头由梁-梁, 左、右梁-墩三根联结弹簧组成, 设上述三根联结弹簧的拉伸、剪切和弯曲刚度分别为:  $k_l^{(t)}$ ,  $k_l^{(s)}$ ,  $k_l^{(b)}$ ;  $k_r^{(t)}$ ,  $k_r^{(s)}$ ,  $k_r^{(b)}$  和  $k_r^{(t)}$ ,  $k_r^{(s)}$ ,  $k_r^{(b)}$ 。不同于文献[11]中的 BBP 接头, 为了更精确地描述 BBP 接头处的受力情况, 本文考虑了接头处梁、墩及支座的几何尺寸。为考虑 BBP 接头处的几何尺寸, 这里定义梁的高度为  $h_b$ , 梁-梁联结弹簧到梁的中性轴的距离为  $d_l$ , 左、右梁-墩联结弹簧到 BBP 接头中心的距离为  $d_s$ , 墩顶部到梁中性轴的距离为  $d_q$  (图 2)。

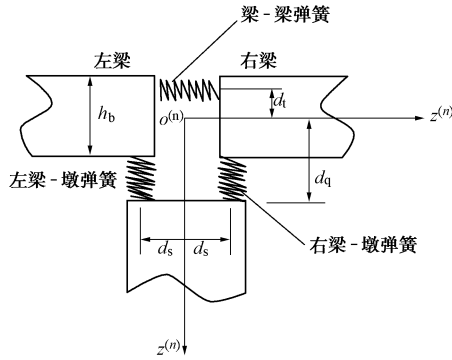


图 2 周期性高架铁路 BBP 接头示意图

Fig. 2 Sketch of BBP junctions

忽略联结弹簧的质量, 可得墩顶截面的力向量与 BBP 接头左、右两端梁截面的力向量所满足的关系式

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_d(\kappa, 0, \omega) &= \mathbf{E}_l^{(a)} \tilde{\mathbf{f}}_b(\kappa, 0_-, \omega) + \mathbf{E}_r^{(a)} \tilde{\mathbf{f}}_b(\kappa, 0_+, \omega), \\ \mathbf{E}_l^{(a)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ d_q & -d_s & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_r^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -d_q & -d_s & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

上式中,  $0_-$  和  $0_+$  分别代表在 BBP 接头左侧和右侧的梁截面,  $0$  代表墩顶截面。

利用高架铁路代表性单元墩的传递矩阵, 可得墩底和墩顶的状态向量所满足的关系式:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_d(\kappa, L_d, \omega) \\ \tilde{\mathbf{f}}_d(\kappa, L_d, \omega) \end{Bmatrix} &= \mathbf{T}^{(d)}(L_d, \omega) \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_d(\kappa, 0, \omega) \\ \tilde{\mathbf{f}}_d(\kappa, 0, \omega) \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{T}^{(d)}(L_d, \omega) &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{qq}^{(d)}(L_d, \omega) & \mathbf{T}_{qf}^{(d)}(L_d, \omega) \\ \mathbf{T}_{fq}^{(d)}(L_d, \omega) & \mathbf{T}_{ff}^{(d)}(L_d, \omega) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

上式中,  $\mathbf{T}^{(d)}$  为墩的传递矩阵,  $L_d$  为墩的高度。由于本文中周期性高架铁路桥墩和桩基础刚性联结, 因此,

桩顶的广义位移和力等于墩底的广义位移和力, 即

$$\tilde{\mathbf{q}}_d(\kappa, L_d, \omega) = \tilde{\mathbf{q}}_p(\kappa, \omega), \quad \tilde{\mathbf{f}}_d(\kappa, L_d, \omega) = \tilde{\mathbf{f}}_p(\kappa, \omega). \quad (18)$$

利用式 (10) 和式 (18), 可得高架铁路代表性单元墩底的位移和力向量满足如下关系式:

$$\tilde{\mathbf{q}}_d(\kappa, L_d, \omega) = \mathbf{C}_p(\omega) \tilde{\mathbf{f}}_d(\kappa, L_d, \omega). \quad (19)$$

利用式 (17) 和 (19), 可得墩顶的位移和力向量关系式:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_d(\kappa, 0, \omega) &= \mathbf{C}_d(\kappa, \omega) \tilde{\mathbf{f}}_d(\kappa, 0, \omega), \\ \mathbf{C}_d(\kappa, \omega) &= \left[ \mathbf{T}_{qq}^{(d)}(L_d, \omega) - \mathbf{C}_p(\omega) \mathbf{T}_{fq}^{(d)}(L_d, \omega) \right]^{-1} \times \\ &\quad \left[ \mathbf{C}_p(\omega) \mathbf{T}_{ff}^{(d)}(L_d, \omega) - \mathbf{T}_{qf}^{(d)}(L_d, \omega) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

上式中  $\mathbf{C}_d(\kappa, \omega)$  为墩的柔度矩阵。求得了墩的柔度后便实现了桩基础与上部结构的耦合。把公式 (16) 中的  $\tilde{\mathbf{f}}_d(\kappa, 0, \omega)$  代入公式 (20) 中, 得

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_d(\kappa, 0, \omega) &= \mathbf{E}_l^{(b)}(\kappa, \omega) \tilde{\mathbf{f}}_b(\kappa, 0_-, \omega) + \mathbf{E}_r^{(b)}(\kappa, \omega) \tilde{\mathbf{f}}_b(\kappa, 0_+, \omega), \\ \mathbf{E}_l^{(b)}(\kappa, \omega) &= \mathbf{C}_d(\kappa, \omega) \mathbf{E}_l^{(a)}, \quad \mathbf{E}_r^{(b)}(\kappa, \omega) = \mathbf{C}_d(\kappa, \omega) \mathbf{E}_r^{(a)}. \end{aligned} \quad (21)$$

根据力的平衡条件和式 (21) 可得 BBP 接头处的传递方程:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_b(\kappa, 0_+, \omega) \\ \tilde{\mathbf{f}}_b(\kappa, 0_+, \omega) \end{Bmatrix} &= \mathbf{S}_j(\kappa, \omega) \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_b(\kappa, 0_-, \omega) \\ \tilde{\mathbf{f}}_b(\kappa, 0_-, \omega) \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{S}_j(\kappa, \omega) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_l & \mathbf{J}_{ld} \mathbf{E}_r^{(b)}(\kappa, \omega) \\ \mathbf{J}_{lr} & \mathbf{J}_{rd} \mathbf{E}_r^{(b)}(\kappa, \omega) - \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}^{-1} \times \\ &\quad \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_{ll} & \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{J}_{ld} \mathbf{E}_l^{(b)}(\omega) \\ -\mathbf{J}_{rl} & -\mathbf{J}_{rd} \mathbf{E}_l^{(b)}(\omega) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

上式中,  $\mathbf{S}_j(\kappa, \omega)$  即为考虑了桩基础与上部结构耦合时的 BBP 接头传递矩阵, 其中  $\mathbf{J}_{ll}$ ,  $\mathbf{J}_{lr}$ ,  $\mathbf{J}_{ld}$ ,  $\mathbf{J}_{rl}$ ,  $\mathbf{J}_{rr}$  和  $\mathbf{J}_{rd}$  为系数矩阵, 其表达式见附录。

### 3.3 单个移动荷载下周期性高架铁路的动力响应

为了确定高架铁路频域内的动力响应, 本文采用文献[11]的方法, 基于 Fourier 变换和序列 Fourier 变换将高架铁路在单个移动荷载作用下频域内的响应表示为频率波数域内的响应函数沿代表性跨的积分, 即

$$\bar{\chi}(nL, \mathbf{x}^{(e)}, \omega) = \frac{g_0}{v} e^{-inL\kappa_p} \int_{-L/2}^{L/2} \tilde{h}(\kappa_p, \mathbf{x}^{(e)}, \xi^{(e)}, \omega) e^{-i\frac{\omega}{v}\xi^{(e)}} d\xi^{(e)}, \quad (23)$$

式中,  $\tilde{h}(\kappa_p, \mathbf{x}^{(e)}, \xi^{(e)}, \omega)$  为频率波数域内的响应函数,  $n$  是观察点所在的跨数,  $\mathbf{x}^{(e)}$  为观察点所对应的跨局坐标系中的点,  $\xi^{(e)}$  为积分横向坐标, 且  $\xi^{(e)} \in [-L/2, L/2]$ ,  $g_0$  是移动常载荷的幅值,  $\kappa_p = \omega/v - 2m_p\pi/L$ ,  $m_p$  为一整数且其取值使得波数  $\kappa_p \in [-\pi/L, \pi/L]$ 。高架铁路时域内的响应, 可通过对式 (23) 所示的频域内响应进行 Fourier 逆变换得到。式 (23) 中响应函数的求解与文献[11]相同, 值得指出的是, 为了提高计

算精度，本文采用了铁木辛柯梁理论，因此，梁与墩的传递矩阵及 BBP 接头联结传递矩阵都与文献[11]中的不同。

4 数值结果和分析

基于本文所建立的模型，本节分别计算了刚性支撑和桩基础支撑周期性高架铁路在单位移动载荷作用下的动力响应，并对比了两种情况下高架铁路计算跨左截面动力响应的差异。为了提高计算效率，本文在计算桩基础柔度时忽略桩间的相互作用，这样排桩的柔度便可用单桩来替代。

算例中上、下部结构材料及几何参数由表 1 给出，弹簧刚度的取值如表 2 所示。鉴于当频率大于 30 Hz 时，周期性高架铁路动力响应较小，故本文只给出了频域内响应 30 Hz 以内的计算结果。

表 1 桩土和梁墩的材料和几何参数

Table 1 Parameter values of materials and geometrical parameters of beams, piers, piles and soils

参数	取值
半空间土体的剪切模量、泊松比和密度 ( $\mu_s, \nu_s, \rho_s$ )	$1.0 \times 10^7 \text{ Pa}$ , 0.4, $2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
桩的杨氏弹性模量、泊松比和密度 ( $E_p, \nu_p, \rho_p$ )	$1.4 \times 10^{10} \text{ Pa}$ , 0.2, $2.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
墩的复模量、黏滞参数和剪力系数 ( $E_{d1}, E_{d2}, \eta_d, \delta_d$ )	$2.5 \times 10^{10} \text{ Pa}$ , $6.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$ , $3.0 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ , 0.75
梁的复模量、黏滞参数和剪力系数 ( $E_{b1}, E_{b2}, \eta_b, \delta_b$ )	$2.5 \times 10^{10} \text{ Pa}$ , $6.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$ , $3.0 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ , 0.667
墩的泊松比和密度 ( $\nu_d, \rho_d$ )	0.2, $2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
梁的泊松比和密度 ( $\nu_b, \rho_b$ )	0.2, $2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
桩的长度和半径 ( $L_p, R_p$ )	15.0 m, 1.0 m,
墩的高度和半径 ( $L_d, R_d$ )	8.0 m, 1.0 m
梁的宽度和高度 ( $w_b, h_b$ )	3.0 m, 1.0 m
高架铁路每跨的长度 ( $L_b$ )	24.0 m

表 2 BBP 接头处各联结弹簧刚度及几何参数值

Table 2 Stiffnesses of connecting springs of BBP junctions and geometric parameters

参数	取值
梁-梁的弹簧刚度 ( $k_1^{(t)}, k_1^{(s)}, k_1^{(b)}$ )	$9.0 \times 10^7 \text{ N/m}$ , $9.0 \times 10^7 \text{ N/m}$ , $9.0 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$
左梁-墩的弹簧刚度 ( $k_1^{(t)}, k_1^{(s)}, k_1^{(b)}$ )	$9.0 \times 10^7 \text{ N/m}$ , $9.0 \times 10^7 \text{ N/m}$ , $6.0 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$
右梁-墩的弹簧刚度 ( $k_r^{(t)}, k_r^{(s)}, k_r^{(b)}$ )	$9.0 \times 10^7 \text{ N/m}$ , $6.0 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}$ , $8.0 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$
BBP 接头几何参数 ( $d_1, d_s, d_q$ )	0.3 m, 0.6 m, 0.8 m

图 3 绘出了荷载移动速度  $v=100 \text{ m/s}$  时，刚性支撑高架铁路与桩基础支撑高架铁路计算跨左截面剪力

的频域响应。比较图 3 (a) 和 3 (b) 可发现，与桩基础支撑相比，刚性支撑情形频域内响应的低频部分占较多能量。图 4 给出了与图 3 相对应的计算跨左截面剪力的时域响应。从图 4 中可以看出当移动荷载到达计算跨左截面瞬间时，剪力发生跳跃，且剪力跳跃值等于 1 N，这间接验证了本文计算模型的有效性。当移动荷载离开观察截面后，计算截面的响应逐渐衰减。通过比较图 4 (a) 和 4 (b) 可以发现，其他条件相同时，考虑桩-土-结构相互作用与否，对响应峰值的影响不大，但考虑桩-土-结构耦合的情形，响应衰减要快于刚性支撑的情形。显然，这主要是因为桩基础支撑高架铁路的特征波阻尼要大于刚性支撑高架铁路的阻尼，因此，特征波在传播过程中衰减较快。

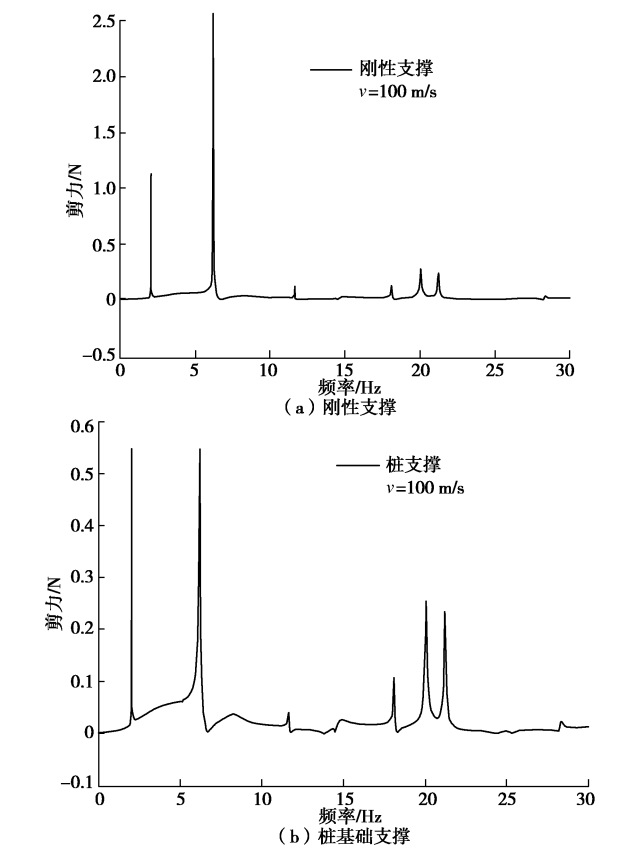
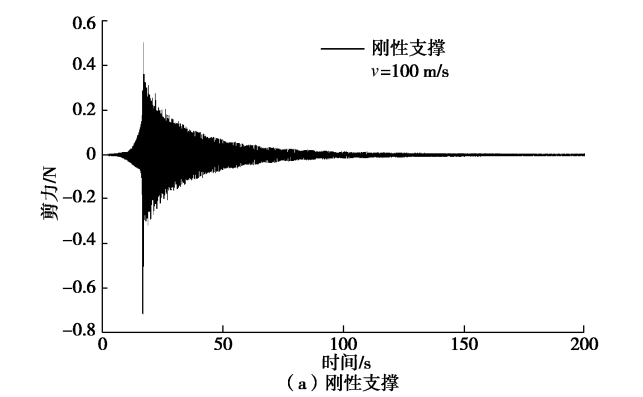


图 3 荷载速度  $v=100\text{m/s}$  时计算跨左截面的剪力频域响应  
Fig. 3 Shear forces of frequency domain at left end of span for  $v=100 \text{ m/s}$



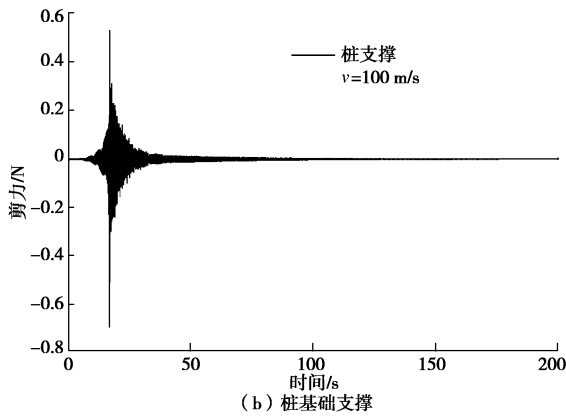


图 4 荷载速度  $v=100$  m/s 时计算跨左截面的剪力时域响应

Fig. 4 Shear forces of time domain at left end of span for  $v = 100$  m/s

## 5 结 论

基于 Fourier 变换, 序列 Fourier 变换及边界元方法, 本文建立了土、桩基础及高架铁路上部结构的耦合动力学模型。本文所建立的模型, 对分析单个移动荷载作用下高架铁路的动力响应具有重要意义, 还可方便地处理周期性高架铁路受系列移动荷载作用时的动力响应, 因此, 可用来模拟实际列车荷载所引起的高架铁路的动力响应。此外, 该模型还可推广到高架铁路每跨包含多个桥墩及多个桩基础的情形。

基于所建立的模型, 本文对移动荷载作用下刚性支撑与桩基础支撑高架铁路的动力响应进行了对比, 发现两者有明显不同。本文的研究表明: 与考虑桩-土-结构相互作用情形比较, 刚性支撑情形移动荷载所引起响应低频部分更为突出; 此外, 由于存在能量辐射, 因此, 桩基础支撑高架铁路的特征波阻尼要大于刚性支撑高架铁路特征波的阻尼, 故其动力响应衰减较快。

### 参考文献:

- [1] 边学成. 高速列车荷载作用下高架桥和地基振动分析[J]. 振动工程学报, 2006, **19**(4): 438 - 445. (BIAN Xue-cheng. Analysis of viaduct-ground vibrations due to high-speed train

moving loads[J]. Journal of Vibration Engineering, 2006, **19**(4): 438 - 445. (in Chinese))

- [2] TAKEMIYA H, BIAN X C. Shinkansen high-speed train induced ground vibrations in view of viaduct-ground interaction[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2007, **27**: 506 - 520.
- [3] 李忠献, 黄 健, 张国忱. 考虑土-结构相互作用的车桥系统耦合振动分析[J]. 天津大学学报, 2005, **38**(12): 1035 - 1041. (LI Zhong-xian, HUANG Jian, ZHANG Guo-chen. Coupled vibration analysis of train-bridge systems considering soil-structure interaction[J]. Journal of Tianjin University, 2005, **38**(12): 1035 - 1041. (in Chinese))
- [4] DEVESA J. Influence of soil stiffness on the dynamic behavior of bridges travelled by high-speed trains[J]. Structural Engineering International, 2009, **19**: 383 - 394.
- [5] OPPENHEIM A V, WILLISKY A S, NAWAB S H. Signals and systems[M]. New Jersey: Prentice Hall Englewood Cliffs, 1983.
- [6] GRAFF K F. Wave motion in elastic solids[M]. Oxford: Clarendon Press, 1975.
- [7] MANOLIS G D, BESKOS D E. Boundary element methods in elastodynamics[M]. London: Unwin Hyman, 1988.
- [8] ZHANG X, LU J F. A wavenumber domain boundary element method model for the simulation of vibration isolation by periodic pile rows[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, **37**: 1059 - 1073.
- [9] CARCIONE J M. Wave fields in real media-wave propagation in anisotropic, anelastic and porous media[M]. Oxford: Elsevier, 2007.
- [10] LU J F, YUAN H Y. The sequence Fourier transform method for the analysis of a periodic viaduct subjected to non-uniform seismic waves[J]. Acta Mechanica, 2013, **224**: 2143 - 2168.
- [11] LU J F, ZHONG L, ZHANG R. Dynamic response of a periodic viaduct to a moving point loading[J]. Archive of Applied Mechanics, 2015, **85**: 149 - 169.

附录: 公式 (24) 中的系数矩阵

$$J_{ll} = \begin{bmatrix} -k_t^{(t)} - k_l^{(s)} & 0 & -d_t k_t^{(t)} + h_b k_l^{(s)} / 2 \\ 0 & k_t^{(s)} - k_l^{(t)} & 0 \\ d_t k_t^{(t)} - h_b k_l^{(s)} / 2 & d_s k_t^{(s)} & k_l^{(b)} + d_t^2 k_t^{(t)} + k_t^{(b)} + h_b^2 k_l^{(s)} / 4 \end{bmatrix},$$

$$J_{rr} = \begin{bmatrix} k_t^{(t)} + k_r^{(s)} & 0 & d_t k_t^{(t)} - h_b k_r^{(s)} / 2 \\ 0 & k_t^{(s)} + k_r^{(t)} & 0 \\ -d_t k_t^{(t)} + h_b k_r^{(s)} / 2 & d_s k_t^{(s)} & -k_t^{(b)} - d_t^2 k_t^{(t)} - k_r^{(b)} - h_b^2 k_r^{(s)} / 4 \end{bmatrix},$$

$$J_{ld} = \begin{bmatrix} 0 & k_l^{(s)} & 0 \\ k_l^{(t)} & 0 & d_s k_l^{(t)} \\ 0 & h_b k_l^{(s)} / 2 & k_l^{(b)} \end{bmatrix}, \quad J_{rd} = \begin{bmatrix} 0 & -k_r^{(s)} & 0 \\ -k_r^{(t)} & 0 & d_s k_r^{(t)} \\ 0 & -h_b k_r^{(s)} / 2 & -k_r^{(b)} \end{bmatrix},$$

$$J_{lr} = \begin{bmatrix} k_t^{(t)} & 0 & d_t k_t^{(t)} \\ 0 & k_t^{(s)} & 0 \\ -d_t k_t^{(t)} & -d_s k_t^{(s)} & -k_t^{(b)} - d_t^2 k_t^{(t)} \end{bmatrix},$$

$$J_{rl} = \begin{bmatrix} -k_t^{(t)} & 0 & -d_t k_t^{(t)} \\ 0 & -k_t^{(s)} & 0 \\ d_t k_t^{(t)} & -d_s k_t^{(s)} & k_t^{(b)} + d_t^2 k_t^{(t)} \end{bmatrix}.$$

(本文责编 明经平)