

DOI: 10.11779/CJGE2015S2026

冻土水热耦合方程及数值模拟研究

白青波¹, 李旭^{1, 2}, 田亚护¹, 房建宏²

(1. 北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044; 2. 多年冻土地区公路建设与养护技术交通行业重点实验室青海研究观测基地, 青海 西宁 810001)

摘要: 路基冻胀融沉是多年冻土区路基的主要病害。冻胀融沉病害与土体水分迁移以及温度变化密切相关, 而冻土温度变化和水分迁移又会相互影响。基于非饱和土渗流和热传导理论, 建立冻土水热耦合问题的联合求解微分方程; 然后采用 COMSOL Multi-physics 软件进行二次开发, 实现冻土温度场和水分场全耦合数值模拟; 进而将数值模拟结果与土柱冻结和融化实验的结果进行对比, 验证水热耦合数值模拟模型的有效性; 最后以青海省玛多县地区路基为例, 研究多年冻土路基中温度场与水分场的分布和变化规律。

关键词: 冻土; 水热耦合; 非饱和土; 冻胀融沉; 路基

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2015)S2-0131-06

作者简介: 白青波(1990-), 硕士研究生, 主要从事冻土路基的水热稳定性的研究工作。E-mail: 1169400405@qq.com。

Equations and numerical simulation for coupled water and heat transfer in frozen soil

BAI Qing-bo¹, LI Xu^{1, 2}, TIAN Ya-hu¹, FANG Jian-hong²

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 2. Qinghai Research and Observation Base, Key

Laboratory of Highway Construction & Maintenance Technology in Permafrost Regions, Ministry of Transport, Xining 810001, China)

Abstract: Frost heaving and thaw collapsing are the main defects of subgrade in permafrost areas and are highly related to the coupled heat-moisture migration. Based on the water flow theory of unsaturated soil and the heat transfer theory of soil, the differential equations for coupled water and heat transfer are established. The coupled water and heat transfer problem of frozen soil is solved using the secondary development of COMSOL Multi-physics. To verify the method for simulating the heat-moisture coupled process, the freezing and thawing processes of soil columns are simulated, and the results are compared with the measured data from laboratory tests. Finally, a case study is carried out for the subgrade in Maduo county, Qinghai Province, and the characteristics of the coupled heat-moisture migration in permafrost subgrade are analyzed.

Key words: frozen soil; coupled water and heat transfer; unsaturated soil; frost heaving and thaw collapsing; subgrade

0 引言

多年冻土区路基易在辐射、蒸发、降水等环境因素作用下诱发不均匀沉降、冻胀融沉等病害。这些冻土病害大多和土体中水分迁移以及相变有关。冻土水分迁移和相变是一个水热耦合问题: ①水分迁移会导致土体热参数发生显著变化^[1-2], 且冻融状态的土体热参数也有较大差异^[1], 这些都会对温度场造成深刻影响; ②冻融界面处冰晶对周围未冻水的抽吸作用产生相变界面水头^[3], 而冻土区中未冻水的扩散率因固态冰阻滞作用迅速降低^[4], 这些会对水分迁移造成深刻影响; ③相变潜热对温度场影响巨大^[5]; ④土体温度低于冻结温度时, 土体中仍存在未冻水, 且其含量与负温保持动态平衡关系^[6]。

目前, 国内外学者已经提出了不少冻土水热耦合模型。田亚护^[5]和孙增奎^[7]以土体的状态焓为变量模

拟了相变潜热对温度场的影响; 王俊智^[8]采用等效显热容法计算了考虑相变潜热的路基温度场; 这些方法未考虑水分迁移的影响。G.S.Taylor^[4]通过传热学和非饱和土渗流理论建立了水热耦合数值模型, 但没有给出孔隙冰含量与温度和未冻水含量的关系形式; 毛雪松^[9]提出了路基水热耦合问题中的联系方程, 指出固态水含量是温度的单变量函数, 但没有考虑未冻水迁移对固态冰的影响。

在以上水热耦合模型基础上, 本文将建立考虑孔隙冰含量和土体负温、水分迁移之间动态平衡关系的冻土水热耦合模型。基于非饱和土渗流和热传导理论,

基金项目: 科技部 973 项目 (2012CB026104); 国家自然科学基金项目 (51109003, 41271072)

收稿日期: 2015-04-26

*通讯作者

引入孔隙冰含量和土体负温、未冻水含量之间的经验关系,进而建立冻土水热耦合求解微分方程。

本文通过 COMSOL 软件的二次开发功能,实现了冻土路基中温度场和水分场全耦合数值模拟;并通过与冻结和融化实验结果对比,验证了水热全耦合模拟的有效性;进而将耦合模拟应用于分析青海玛多县地区路基温度场与水分场的分布和变化规律。

1 冻土水热耦合求解微分方程组

1.1 温度场控制方程

考虑二维水热耦合问题,根据傅里叶定律,将相变潜热作为热源处理,冻土热传导微分方程为^[10]

$$\rho C(\theta) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda(\theta) \nabla^2 T + L \cdot \rho_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (1)$$

式中 ∇ 为微分算子,对于二维问题为 $[\partial/\partial x, \partial/\partial y]$; T 为土体的瞬态温度 ($^{\circ}\text{C}$); t 为时间 (s); θ 为体积含水率, θ_i 为孔隙冰体积含量; x, y 为水平和深度方向坐标 (m); ρ 和 ρ_i 为土的密度和冰的密度 (kg/m^3); L 为相变潜热,取值为 $334.5 \text{ kJ}/\text{kg}$; $\lambda(\theta)$ 为导热系数 ($\text{W}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$); $C(\theta)$ 为体积热容 ($\text{J}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$)。土体的 λ 和 C 随含水量变化的取值可以参考文献[1]。

需要说明的是,土体水由孔隙冰和孔隙水两部分构成。如定义 θ_u 为冻土中未冻水的体积含量, ρ_w 为水的密度,考虑到冰和水的密度不同,本文将冻土体积含水率定义为 $\theta = \theta_u + \rho_i/\rho_w \cdot \theta_i$,进而用于冻土导热系数和体积热容计算。

1.2 水分场控制方程

冻融状态下的路基中始终存在未冻水,其迁移变化遵循达西定律。根据 Richard 方程^[11],并考虑孔隙冰对未冻水迁移的阻滞作用^[4],非饱和冻土中的未冻水迁移微分方程为

$$\frac{\partial \theta_u}{\partial t} + \frac{\rho_i}{\rho_w} \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \nabla [D(\theta_u) \nabla \theta_u + k_g(\theta_u)] \quad (2)$$

式中 θ_u 为冻土中未冻水的体积含量; k_g 为重力加速度方向的非饱和土体渗透系数。冻土中水的扩散率计算如下:

$$D(\theta_u) = \frac{k(\theta_u)}{c(\theta_u)} \cdot I \quad (3)$$

式中 $k(\theta_u)$ 为非饱和土的渗透率 (m/s); $c(\theta_u)$ 为比水容量 ($1/\text{m}$),由滞水模型确定^[11]; I 为阻抗因子^[4],表示孔隙冰对未冻水迁移的阻滞作用,由下式计算:

$$I = 10^{-10\theta_i} \quad (4)$$

1.3 相变动态平衡关系

冻土温度场和水分场中包含温度、孔隙冰体积含量和未冻水体积含量 3 个未知量,故还必须引入一个联系方程才能实现水热耦合模型求解,即建立 θ_i 、 θ_u

和 T 三者之间的联系。本文通过冻土的相变动态平衡关系建立这个联系方程。

徐学祖^[1,6]基于实验数据,给出了冻土中未冻水含量经验关系表达式:

$$\frac{w_0}{w_u} = \left(\frac{T}{T_f} \right)^B, \quad T < T_f \quad (5)$$

式中 T_f 为土体冻结温度 ($^{\circ}\text{C}$),可根据文献[6]提供的经验公式计算; w_0 为土体的初始含水率 (%); w_u 为负温度为 T 时的未冻水含水率 (%); B 为常数,与土类和含盐量有关,可根据文献[6]中的一点法测定,当没有实验数据时, B 可按砂土 0.61,粉土 0.47,黏土 0.56 选取经验值。

为了便于理论模型的建立,本文提出了“固液比”的概念,表示冻土中孔隙冰体积与未冻水体积之比,记为 B_1 表示。根据公式 (5),可知:

$$B_1 = \frac{\theta_i}{\theta_u} = \begin{cases} 1.1 \left(\frac{T}{T_f} \right)^B - 1 & (T < T_f) \\ 0 & (T \geq T_f) \end{cases} \quad (6)$$

式中,系数 1.1 为水与冰的密度之比 ρ_w/ρ_i 。

由式 (6) 可知,固液比 B_1 为温度的单值函数。因此,冻土中孔隙冰、未冻水和温度的联系方程为

$$\theta_i = B_1(T) \cdot \theta_u \quad (7)$$

综上所述,联立温度场微分方程 (1)、水分迁移微分方程 (2) 和相变动态平衡关系方程 (7),即为冻土水热耦合求解方程组。需要指出的是:该方程组具有强非线性特点;其联系方程表达式明确,且能合理地描述孔隙冰含量、未冻水含量和温度三者之间的关系。

2 基于 COMSOL 二次开发的水热耦合数值模型

COMSOL Multi-physics 是一款基于有限元的数值仿真软件,具有强大的多物理场耦合能力和强非线性微分方程组求解能力。本文通过 COMSOL 中系数型偏微分方程模块 (PDE) 进行二次开发^[12],建立冻土的水热耦合数值模型,软件中的偏微分方程自定义界面见图 1。

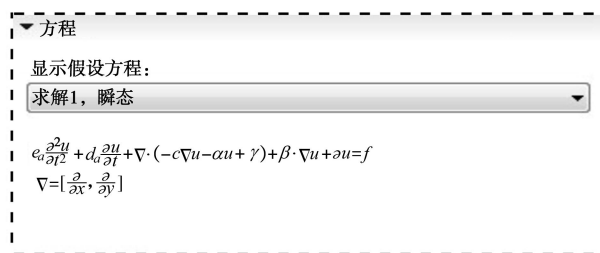


图 1 COMSOL 偏微分方程自定义界面

Fig. 1 Customer interface of PDEs in COMSOL

表 1 冻土水热耦合模拟函数及参数表

Table 1 Functions and parameters embedded in simulation of coupled water and heat flow in frozen soil					
符号	名称	物理意义	公式	参数	文献来源
$B_l(T)$	固液比	孔隙冰与未冻水的体积之比	$1.1(T/T_f)^B-1$	T_f, B	文献[6]
$k(\theta_u)$	渗透率	单位水力梯度下流量	$k_s \cdot S^l (1-(1-S^{1/m})^m)^2$	k_s, l, m	Gardner(1958)
$I(\theta_l)$	阻抗因子	冰对未冻水迁移阻滞作用	$10^{-10\theta_l}$	θ_l	Taylor(1978)
$c(\theta_u)$	比水容量	基质势变化引起含水量变化	$a_0 m / (1-m) \cdot S^{1/m} (1-S^{1/m})^m$	a_0, m	VG(1980)
$D(\theta_u)$	扩散率		$k(S) \cdot I / (\theta_s - \theta_l) / c(S)$		文献[11]

注： a_0 、 m 和 l 是根据土体性质确定的本构参数； k_s 为饱和土的渗透系数。

软件中的偏微分方程和边界条件函数表达形式见公式（8）～（10）：

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + \beta \cdot \nabla u + au = f \quad \text{in } \Omega, \tag{8}$$

$$\mathbf{n} \cdot (c \nabla u + \alpha u - \gamma) + qu = g - h^T \mu \quad \text{on } \Gamma, \tag{9}$$

$$u = r \quad \text{on } \Gamma. \tag{10}$$

式中 Ω 为计算区域； Γ 为计算区域的边界； \mathbf{n} 为边界 Γ 的外法线方向； e_a 为质量系数； d_a 为阻滞系数； c 为扩散系数； a 为吸收系数； f 为源项； α 为保守通量对流系数； β 为对流系数； γ 为保守通量源项； q 为边界上的吸收系数； g 为边界上的源项； μ 为拉格朗日乘子； h 、 r 为方程系数。式（8）为求解域上的方程；式（9）为 Neumann 边界条件；式（10）为 Dirichlet 边界条件。

将式（1）和式（2）转换为 COMSOL 提供的系数型偏微分方程组形式：

$$\begin{cases} \rho C(\theta) \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-\lambda(\theta) \nabla T) = L \cdot \rho_l \frac{\partial \theta_l}{\partial t}, \\ \frac{\partial \theta_u}{\partial t} + \nabla \cdot (-D(\theta_u) \nabla \theta_u - k_g(\theta_u)) + \frac{\rho_l}{\rho_w} \cdot \frac{\partial \theta_l}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

在非饱和渗流分析中，本文选用 Van Genuchten(VG)滞水模型（1980）和 Gardner 渗透系数模型（1958）^[11]；并将冻土相对饱和度 S 定义为

$$S = \frac{\theta_u - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}, \tag{12}$$

式中， θ_r 和 θ_s 分别代表土的残余含水率和饱和含水率。

综上，冻土水热耦合模拟所需要的参数汇总于表 1 中。

3 数值模型验证

为验证以上水热耦合数值模型的有效性和可行性，使用该水热耦合模型反演文献[1]中封闭条件下的土柱融化和冻结试验。土柱试验装置的简化示意图如图 2。

3.1 融化试验模拟及分析

融化试验的数值模拟中采用文献[1]中图 4.31(c)

的材料属性和实验结果，试验结果见图 3。试验土样为粉土，其材料属性和试验条件见表 2；数值模拟使用的渗流模型参数参见表 3。土柱初始状态为冻结状态，温度约为-1℃。采用 COMSOL 软件反演一维土柱试验，得到 120 h 后的含水率的分布图见图 3。

表 2 融化试验中的土性及边界条件参数

Table 2 Soil properties and boundary conditions in thawing tests						
试验	土性	高度	初始 含水率	上部 温度	下部 温度	固液比
融化	粉土	10 cm	32.2%	1.0℃	-1.0℃	-0.24
						$2.15 T ^{0.47}-1$

表 3 非饱和土渗流模型参数

Table 3 Parameters in seepage model for unsaturated soil							
参数	a_0	m	l	θ_r	θ_s	$k_s/(m^2 \cdot s^{-1})$	$\rho/(g \cdot cm^{-3})$
粉土	2.65	0.26	0.5	0.42	0.05	10^{-7}	2.06

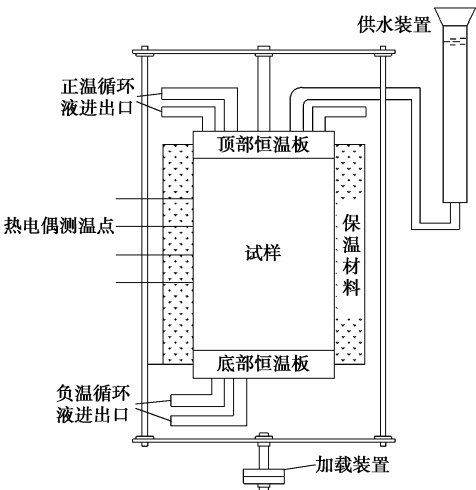


图 2 土柱试验示意图

Fig. 2 Sketch map of soil column experiment

图 3 所示的融化试验的数值模拟结果与试验实测结果基本一致。土柱在融化过程中，土柱高度约 5 cm 处为冻融区界面，冻融界面温度模拟值约为-0.24℃；上部融化区水分受重力和抽吸作用向下迁移到冻融界面，部分冻结成冰，部分仍以液态形式存在但受到聚冰层阻滞作用而难以继续入渗；来自融化区的水滞留在冻融界面附近导致该位置形成含水率的峰值点，融化区的含水率明显低于初始含水率；下部冻结区的含

水率较初始值变化不大。

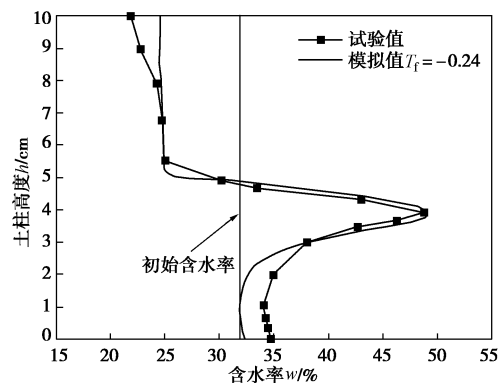


图 3 融化试验中的含水率分布图 (120 h)

Fig. 3 Distribution of water content in thawing tests on frozen soil (120 h)

3.2 冻结试验模拟及分析

冻结试验采用文献[1]中图 4.8 (a) 中第二组试验结果, 试验结果见图 4。土柱冻结试验采用内蒙古黏土, 其材料属性和试验条件见表 4; 数值模拟使用的渗透模型参数见表 5。土柱初始状态为融化状态, 温度约为 1℃。采用 COMSOL 软件反演一维土柱试验, 得到 120 h 后的含水率的分布见图 4。

表 4 冻结试验中的土性及边界条件参数

试验土性	高度	初始	上部	下部	T_f	固液比
		含水率	温度	温度		
冻结黏土	15 cm	18.6%	0.9℃	-2.1℃	-0.54	$1.55 T ^{0.56}-1$

表 5 非饱和土渗流模型参数

参数	a_0	m	l	θ_r	θ_s	$k_s/(m^2 \cdot s^{-1})$	$\rho/(g \cdot cm^{-3})$
数值	2.59	0.22	0.5	0.50	0.02	10^{-8}	1.53

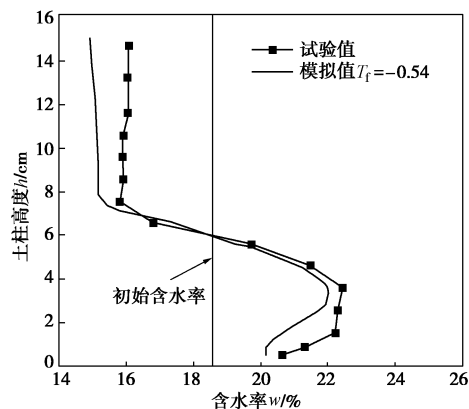


图 4 冻结试验中的含水率分布图 (120 h)

Fig. 4 Distribution of water content in freezing tests on soil (120 h)

图 4 所示的冻结试验的数值模拟结果与试验实测结果基本一致。在冻结过程中, 施加-2.1℃后土柱从下向上开始发生冻结, 冻结锋面不断上移; 冻结区的未冻水减少, 吸力升高, 在抽吸作用下, 土柱上部融

化区的水分会向冻结锋面迁移, 部分在冻融界面附近冻结, 部分受到冰的阻滞作用而滞留, 两者共同作用导致冻结区含水率增加并出现峰值点。最终的冻融界面高度约为 7 cm, 冻融界面温度模拟值约为-0.54℃; 土柱中融化状态区的含水率显著减少, 冻结状态区的含水率明显增加, 冻融界面下部出现含水率的峰值点。

3.3 小结

综上所述, 基于本文建立的水热耦合联合求解方程组, 采用 COMSOL 的 PDE 模块较准确地反演冻土在冻结和融化过程中的水分场和温度场变化规律, 模拟冻土水分迁移和相变, 实现冻土水热全耦合问题的数值求解。

4 多年冻土区路基水热耦合模拟

4.1 几何模型及物理参数

将以上水热耦合数值仿真方法应用于青海省玛多县地区^[13]多年冻土路基的温度场和水分场耦合分析。计算中采用如图 5 所示的对称二维路基模型, 土体深度为 10 m; 路基高 2 m, 宽度为 10 m, 坡角为 1:1.5。土层热参数和热边界条件参见文献[13], 部分数据整理如下表 6。

表 6 土层厚度及物理参数

Table 6 Thicknesses and physical parameters of soil layers				
岩性	深度	厚度	质量含水率	$\gamma_d/(kg \cdot m^{-3})$
粉质土	-10~0 m	10	12%	1600
砂砾石土	0~2 m	2 m	6%	1700

4.2 边界条件和模拟过程

模型底部热边界条件取为温度梯度, 0.03℃/m; 模型上部热边界条件取为附面层条件^[13], 路基、边坡和天然地表分别设为以年为周期的第一类热边界:

$$T(t) = T_0 + 10 \sin\left(\frac{2\pi}{3.1104 \times 10^7} \times t + \pi/2\right) \quad (13)$$

式中 T_0 为年平均温度; t 为时间 (s)。对于路基边坡和天然地表, T_0 取-2℃; 对于路基表面, T_0 取 1℃。

首先在没有路基的情况下, 求解 100 a 后土体温度场, 其中上部热边界条件按照式 (13) 选取, 以此稳定后的温度场作为地基温度初始值。

然后考虑路基修筑, 初始路基土体温度为 100 a 后地基表面年平均温度, 增加路基表面, 路基边坡热边界条件 (式 (13)), 模拟路基修筑后 5 a 内的水分场和温度场分布及变化特点。

4.3 模拟结果及分析

路基温度场初始条件为稳态, 考虑经过 5 个周期 (5 a) 后, 路基温度场趋于稳定。图 5 为第 5 年 10 月份的温度场和水分场。图 5 (a) 给出了 10 月份路基温度场分布云图。图中路面吸热效应明显, 其温度

高于两侧土体。而水分在路基下部和路基侧下方土体中富集。

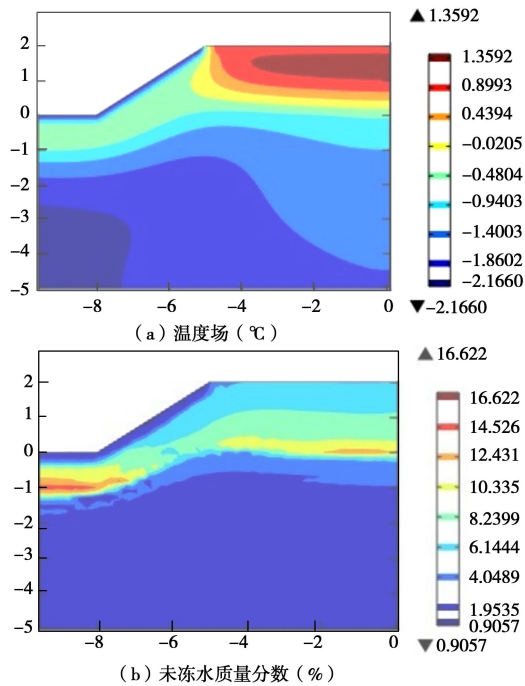


图 5 10 月份路基温度场和水分场

Fig. 5 Temperature and moistures fields in subgrade (October)

图 6 为路基中心线以下土体沿垂直方向上的温度变化的等值线图。由图 6 可知, 路表温度最低值和最高值分别出现在 1 月和 7 月; 红色等值线表示冻融界面, 最大冻融深度为 2.3 m, 与根据斯蒂芬方程^[14]得到的冻融深度解析值 2.1 m 吻合, 说明温度场计算结果较为准确, 并且得到了冻土上限的深度和出现时间。

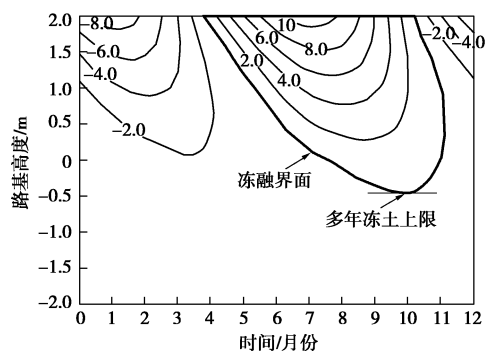


图 6 路基中心线下温度场随时间变化图

Fig. 6 Temperature fields over time of centerline in subgrade

图 7 为路基中心线以下土体中固态水含水率、液态水含水率和总含水率在一年内随时间变化的等值线图。如图 7 (a) 所示, 冻土分为上下两个区域: 季节冻土层和终年冻土层, 以冻土上限为分界线; 季节冻土中, 固态水在 10 月到第二年的 4 月存在, 而在 4~10 月内大部分固态水随着土体温度升高而融化消失; 下部分为终年冻土, 固态水始终存在。在 3~6 月, 路基内会出现固态水聚集现象, 符合冻土中的聚冰带形成理论^[15]; 其中含水率超过 9% 的聚冰层厚度约达到

0.8 m, 成为路基冻胀和产生裂缝的最直接因素。根据图 7 (b) 知, 在终年冻土区液态水含水率低于 4%, 且在一年内的变化微小; 在季节冻土区中液态水会随时间发生显著变化, 冻结时期液态水含水率低于 3%; 融化时期, 液态水含水率出现聚集, 最大值超过 10% (参见图 5 (b))。图 7 (c) 为土体中总含水率。从图 7 可知, 冻土上限以下部分含水率随时间变化微小, 说明终年冻土区的水分场和温度场是比较稳定的; 冻土上限以上土体的含水率和温度随时间变化剧烈, 路基的水热稳定性较差。

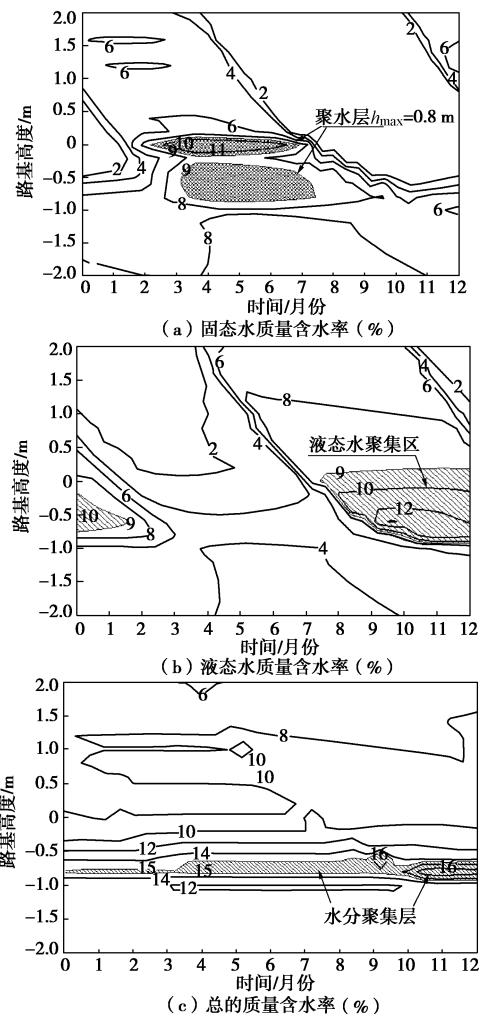


图 7 路基中心线下水分场随时间变化图

Fig. 7 Moisture fields over time of centerline in subgrade

固态冰的聚集形成和融化是导致路基的冻胀和融沉变形的主要原因。通过以上耦合分析, 能够模拟土体聚冰的冻结和融化过程, 为进一步的冻土路基冻胀和融沉变形量估算提供依据。

5 结 论

冻土中的水分迁移和相变是一个复杂的水热耦合问题。本文在现有冻土水热耦合模型基础上, 引入孔隙冰含量和土体负温、水分迁移之间的动态平衡关系,

建立了更加合理的水热耦合联合求解方程组。进而通过 COMSOL Multi-physics 软件二次开发功能,实现了冻土温度场和水分场全耦合数值模拟。将水热耦合数值模拟方法应用于土柱冻结和融化试验模拟以及玛多县多年冻土路基水热耦合模拟,其结果说明:本文建立的水热耦合模型能够较准确地预测冻土温度场变化规律以及孔隙水迁移、相变、固态冰聚集规律。本文模拟的聚冰层厚度和含水率可作为进一步的路基冻胀和融沉变形量估算的基础。本文研究成果能够用于冻土水热耦合问题的求解,服务于冻土工程设计和病害防治工作。

参考文献:

- [1] 徐学祖, 王家澄, 张立新. 冻土物理学[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 75-98. (XU Xue-zu, WANG Jia-cheng, ZHANG Li-xin. Permafrost physics [M]. Beijing: Science Press, 2001: 75 - 98. (in Chinese))
- [2] 李述训, 程国栋. 冻融土中的水热输运问题[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1995. (LI Shu-xun, CHENG Guo-dong. Problem of heat and moisture transfer in freezing and thawing soils[M]. Lanzhou: Lanzhou University Press, 1995. (in Chinese))
- [3] 王铁行, 胡长顺. 多年冻土地区路基温度场和水分迁移场耦合问题研究[J]. 土木工程学报, 2003, **36**(12): 93 - 97. (WANG Tie-xing, HU Chang-shun. Study on the problem of coupled temperature field and moisture migration field of subgrade in permafrost region[J]. China Civil Engineering Journal, 2003, **36**(12): 93 - 97. (in Chinese))
- [4] TAYLOR G S, LUTHIN J N. A model for coupled heat and moisture transfer during soil freezing[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1978, **15**: 548 - 555.
- [5] 田亚护, 刘建坤, 钱征宇, 等. 多年冻土区含保温夹层路基温度场的数值模拟[J]. 中国铁道科学, 2002, **23**(2): 59 - 64. (TIAN Ya-hu, LIU Jian-kun, QIAN Zheng-yu, et al. Numerical simulation for temperature field of roadbed on permafrost with insulation[J]. China Railway Science, 2002, **23**(2): 59 - 64. (in Chinese))
- [6] 徐学祖, 邓友生. 冻土中水分迁移的实验研究[M]. 北京: 科学出版社, 1991. (XU Xue-zu, DENG You-sheng. Experimental research of moisture migration in permafrost[M]. Beijing: Science Press, 1991. (in Chinese))
- [7] 孙增奎, 王连俊, 魏庆朝, 等. 青藏铁路多年冻土区路基温度场的模拟与预测[J]. 北京交通大学学报, 2004, **28**(1): 55 - 59. (SUN Zeng-kui, WANG Lian-jun, WEI Qing-chao, et al. Simulation and Prediction of temperature field of Qinghai-Tibet railway roadbed on permafrost regions[J]. Journal of Northern Jiaotong University, 2004, **28**(1): 55 - 59. (in Chinese))
- [8] 王俊智, 梁四海, 万力, 等. 高寒地区冻土活动层温度场数值模拟[J]. 人民黄河, 2013, **35**(3): 20 - 23. (WANG Jun-zhi, LIANG Si-hai, WAN Li, et al. Numerical simulation of the thermal regime of permafrost active layer in alpine regions[J]. Yellow River, 2013, **35**(3): 20 - 23. (in Chinese))
- [9] 毛雪松, 王秉刚, 胡长顺, 等. 冻土路基水热迁移问题的理论模型及数值模拟[J]. 中外公路, 2006, **26**(1): 23 - 26. (MAO Xue-song, WANG Bing-gang, HU Chang-shun, et al. The theoretical model and numerical simulation of water-heat transfer problems in permafrost roadbed[J]. Journal of China & Foreign Highway, 2006, **26**(1): 23 - 26. (in Chinese))
- [10] 陶文铨. 传热学[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2006. (TAO Wen-quan. Heat Transfer[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2006. (in Chinese))
- [11] 卢宁(美), LIKOS William J. 非饱和土力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012: 269 - 287. (LU Ning, LIKOS William J. Unsaturated soil mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2012: 269 - 287. (in Chinese))
- [12] COMSOL Multiphysics User's Guide (Version:4.3a)[R]. Stockholm: COMSOL AB, 2012.
- [13] 曹元兵, 盛煜, 吴吉春, 等. 上边界条件对多年冻土地温场数值模拟结果的影响分析[J]. 冰川冻土, 2014, **36**(4): 802 - 810. (CAO Yuan-bing, SHENG Yu, WU Ji-chun, et al. Influence of upper boundary conditions on simulated ground temperature field in permafrost regions[J]. Journal of Glaciology and Geocryology, 2014, **36**(4): 802 - 810. (in Chinese))
- [14] 吴紫旺. 冻土的温度水分应力及相互作用[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1989: 21 - 36. (WU Zi-wang. Interaction among Temperature, Moisture and Stress Fields in Frozen Soil[M]. Lanzhou: Lanzhou University Press, 1989: 21 - 36. (in Chinese))
- [15] 毛雪松, 马翥. 基于水热耦合效应的冻土路基稳定性研究[M]. 北京: 人民交通出版社, 2011: 76 - 85. (MAO Xue-song, MA Biao. Studies on the stability of permafrost subgrade based on coupled water and heat transfer[M]. Beijing: China Communications Press, 2011: 76 - 85. (in Chinese))

(本文责编 明经平)