

DOI: 10.11779/CJGE2015S2025

# 岩土本质性参数演绎的数值模型

章致一<sup>1</sup>, 吴渊洵<sup>2</sup>, 李明书<sup>3</sup>

(1. 台湾中联工程顾问股份有限公司, 台湾 台北 23155; 2. 台湾中华大学土木系, 台湾 新竹 30012; 3. 上海预安企业管理咨询有限公司, 上海 201103)

**摘 要:** 以至今为真的物理定律、数学及力学原理, 做为逻辑性演绎的骨架。同时将土壤抽象为理想散体粒子, 在粒间以摩擦力为主的相变时空中, 以假说为真的前提, 一个粒子群只有一个可代表摩擦力的本质性参数—正常压密态的动摩擦角 $\phi_k$ 。此种散体粒子间的成对剪应力向量, 皆是由粒间依时的主应力与粒间动摩擦角衍生。散体抽象为理想粒子与二个前提为真的假说。以逻辑的演绎, 得到本文的结论及数值模型。演绎法的特点: 若前提为真, 则结论必为真, 反之亦然。台湾中联工程顾问股份有限公司于近 5 年中将此数值模型与传统分析合并, 运用台北市正常压密态 (NC) 沉积地层的各种分析, 经过实际工程案例比对, 得到结论: 调查出各地层本质性参数值, 便可依数值模型分析, 得到可靠、具实用性的预测值。

**关键词:** 本质性参数; 演绎; 归纳; 抽象; 动摩擦角

**中图分类号:** TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2015)S2-0125-06

**作者简介:** 章致一(1949-), 开业技师及 CEO, 从事地质勘查、深开挖监测与安全预测、基础规画及散体态的摩擦力模型研究。E-mail: Jeffery@mail.cuc.com.tw.

## Numerical model for deduction of inherent parameters of geomaterial

ZHANG Zhi-yi<sup>1</sup>, WU Yuan-xun<sup>2</sup>, LI Ming-shu<sup>3</sup>

(1. China United Engineering Consultant, Inc., Taipei 23155, China; 2. Chung Hua University, Xinzhu 30012, China; 3. Shanghai Yu An Consultants Co., Ltd., Shanghai 201103, China)

**Abstract:** The laws of physics and the principle of mathematics and mechanics are used as the bases for logic deduction of a numerical model for the shear parameters. They all have been proved true. In addition, soil particles are attributed to ideal particulate materials. They are within a physical phase transition space-time whose inter-particle stress fields are governed by friction. With such premise, the deduction leads to the fact that there is only one inherent parameter – normally consolidated kinetic friction angle ( $\phi_k$ ) which represents the friction variations within a group of particulate materials. Such coupled shear stress vectors between particulate particles are all derived from time-dependent inter-particle principal stress and  $\phi_k$ . The feature of logic deduction has proved that if the premises are true, then the conclusions will also be true, and vice versa. In the recent 5 years, CUC has used the above numerical model to analyze the normally consolidated Taipei sedimentary deposits. It has been proved that once the inherent parameter for each layer is explored, the proper shear behavior for that particular soil can be predicted. The results are in good agreement with those anticipated by other geotechnical professionals.

**Key words:** inherent parameter; deduction; induction; abstraction; kinetic friction angle

## 0 引 言

### 0.1 尚处于经验公式总成的土壤力学

库伦 (Coulomb) 于 1776 年取应力式直剪仅有的尖峰剪应力值, 以归纳法得出库伦律 (Coulomb law) [1-3]。库伦的年代看待粒间摩擦力, 采用类似固结力材料的观念。库伦律必须同时以  $c$  与  $\phi$  值, 预测粒子群的临界剪应力。以相对论的时空观念检讨,  $c$  与  $\phi$  是否为相同时间的事件, 便可发现皆为 2 个本质性的参数不应该在同一相变时空。公式中的 2 个参数分量: 与剪裂面垂直向应力无关的分量, 称之为固有的凝聚

力  $c$  (Intrinsic Cohesion), 与剪裂面垂直向应力有关的分量, 称之为内摩擦角  $\phi$  (Angle of internal friction)。岩土的内摩擦角与物理学已证明为真的动摩擦力定律间, 至今仍无法建立对等的关联性。岩土大师 Holtz, 于书中表明: 依据目前各种剪力试验的流程, 易受操作者影响; 他认为, 目前的  $c$  与  $\phi$  均不是该材料 (指岩土粒子) 的固有本质 [2] (Inherent Properties)。

至 1929 年, 太沙基 (Terzaghi, K) 依据培根

(Bacon) 的归纳逻辑, 将归纳法得到的所有经验公式进行中间公理, 及普遍公理的整合与提升, 奠定今日土壤力学的雏型。但发展至今(2014 年)的土壤力学, 仍处于由无限多经验公式集合的总成<sup>[1-3]</sup>, 虽可做定性的数值分析, 但仍是依各自经验, 针对同一个问题依各自的选择性公式, 得到无限多可能的数值解结论。

观察大自然的灾变(塑性相变)皆是唯一结果。因此, 目前的土壤力学尚不符合数学与科学的领域。

## 0.2 期望演绎出符合自洽性的数值模型

台北市盆地是 OCR $\approx$ 1 标准的正常压密(NC)态沉积土层, 主要是由层状的 CL, ML, SM 构成。NC 地层中, 具有静止态的粒间主应力, 及主应力比系数。取任何土体, 解压状态泡于水中 24 h 以上, 完全瓦解成散体的粒子。证明沉积土层是由散体粒子组成, 粒子间应没有固结材料的固结凝聚力。

在 NC 地层中, 依笛卡尔坐标  $(z, x, y)$  点的 NC 态主应力场为  $[\sigma_{nc}]_{z,x,y} = [(\sigma_v)_{nc}, (\sigma_h)_{nc}]_{z,x,y}$ 。在 NC 主应力场的数学式中, 主应力是依时静止态, 可视为起始主应力。每一坐标点以 2 个起始主应力数值构成, 可由钻探资料与静止土压力系数  $k_0 = 1 - \sin \phi$  得到。因此, NC 地层的初始主应力数值, 即 NC 主应力场  $[\sigma_{nc}]_{z,x,y}$ , 便成为已知条件。

整合物理学动摩擦定律, Timoshenko 点平衡公式, 及 Mohr 定律。发现散体态的任何剪裂面, 皆有成对且向量相反的依时剪应力: 阻抗剪应力  $(\bar{\tau}_r)_t$ , 惯称摩擦力, 及驱动剪应力  $(\bar{\tau}_d)_t$ 。散体正在发生塑剪时剪裂面的成对剪应力是大小相等且向量相反, 即  $(\bar{\tau})_t = (\bar{\tau}_r)_t = (\bar{\tau}_d)_t$ 。因此, 每一坐标点的依时主应力可计算时, 便可依据动态的点应力平衡公式, 计算出每一坐标点依  $\alpha$  角的成对且随主应力变动的粒间剪应力。

与目前的土壤力学产生最大的冲突: 在散体以摩擦力主导的摩擦力相变时空, 以相对论检讨该时空, 发现动态的散体粒子间不存在固结态的凝聚力  $c$ , 只有唯一产生摩擦力的本质性参数。这个本质参数, 即符合广义弹性态时, 依动摩擦定律的动摩擦角  $\phi_k$ 。土壤试验中, 当试体的压密状态等于或大于 NC 态的残留摩擦角  $\phi_r$  应等同于  $\phi_k$  ( $\Delta u_t = 0$  条件)。

本文期望的贡献, 以抽象出的假说: 理想散体的 NC 态动摩擦角  $\phi_k$  是产生粒间剪应力(摩擦力)的唯一本质, 经由至今为真的物理定律、数学原理、统计定理等, 完全依逻辑法则, 在散体主动破坏的摩擦力相变时空, 演绎出内在完全符合自洽性、可预测出符合常态分布的数值模型。

## 1 摩擦力相变时空的边界与假说

### 1.1 摩擦力相变时空的边界

笔者定义理想散体发生主动态塑剪的摩擦力相变时空的边界: 恰好符合广义弹性态的 NC 主应力为起始点, 至恰好发生可视塑剪相变, 由粒间主应力及时间切割的时空, 称为摩擦力相变时空。

### 1.2 相对法则皆为真的假说<sup>[4]</sup>

在各别惯性参考系中, 已经证实的物理定律、数学原理及统计原理皆为真。

即物理学的定律对所有惯性参考系中的观测者皆相同, 没有一个惯性参考系是与众不同。采用已证实的大自然法则, 即已经证实的物理定律、数学原理及统计原理等。经由符合逻辑的法则连接不同惯性参考系的定律, 演绎得到的相对应公式, 便具有等同于该法则位阶的可信度。

### 1.3 NC 态时的动摩擦角为散体摩擦力唯一本质的假说

粒间主应力于 NC 态时的动摩擦角, 以假说为真的前提, 视为理想散体在摩擦力主导的相变时空范围, 是唯一本质参数<sup>[4]</sup>。

物理学认为粒间在弹性态时, 等速持续剪动状态, 便符合动摩擦定律。由相同粒子群压密至 NC 主应力的弹性态, 执行相同的剪力试验, 得该到粒子群符合常态分配的极限动摩擦力, 与垂直向应力间, 依动摩擦定律, 可求得符合常态分配所对应的动摩擦角  $\phi_k$ 。反之, 由已知该动摩擦角  $\phi_k$  角与依时的垂直向应力, 便可预测该粒子群的极限动摩擦力。依符合逻辑法则的推论, 该粒子群由正常压密主应力为起始点, 依时增加主应力差值, 便可依数学原理迭加得到粒间依时变动的主应力, 计算依时变动态主应力, 及  $\alpha$  剪力面的一对剪应力向量—依时阻抗摩擦力(剪应力)及依时驱动剪应力。

## 2 根据假说的演绎

### 2.1 代表摩擦力本质常数的摩尔包络线

在地球重力场或同时有水浮力场中, 形成粒间依自重压密。经足够时间, 体积皆收敛到依时不变, 即恰为广义弹性态所定义的时空边界, 即 NC 态的土层。在此时态, 所有粒间皆具有静止的 NC 态主应力。取 NC 态试体执行剪力试验, 得到符合常态分配的动摩擦角  $\phi_k$ 。依第 1.3 节假说, 假设该粒子群只有一个符合常态分配代表性的本质性常数, 绘于  $p-q$  标示的图 1 中, 即经过零点的摩尔圆破坏包络线  $OT$ , 此线的斜率定义为  $R_m = \tan \phi_k$ 。因为, 各别粒子群皆仅有一个符

合常态的动摩擦角  $\phi_k$  做为代表, 均可绘制各别粒子群的不同的摩尔包络线斜率  $\tan \phi_k$ , 代表该粒子群在剪动态粒间主应力的摩尔圆, 均与  $\tan \phi_k$  包络线相切, 符合如下数学式:

$$\tan \phi_k = \frac{(\bar{\tau})_f}{(\bar{\sigma}_\alpha)_f}, \quad (1)$$

式中  $(\bar{\tau})_f = (\bar{\tau}_R)_f = -(\bar{\tau}_D)_f$  为极限剪应力;  $(\bar{\sigma}_\alpha)_f$  为粒间剪动态时, 垂直  $\alpha$  角剪裂面的正向压应力。直剪试验即垂直向压应力。

## 2.2 依据临界状态时的点应力摩尔圆作图

绘制点应力摩尔圆流程 (图 1):

(1) 于  $p-q$  图中, 绘  $OT$  线, 使  $\angle TOP =$  动摩擦角  $\phi_k$ ,  $OT$  线即破坏包络线  $R_m = \tan \phi_k$ 。

(2)  $OT$  线上任一点  $F$ , 绘法线交  $P$  轴于  $A$  点, 令  $OA = X$ ,  $X$  可假设为任何数值。

(3) 以  $A$  点为圆心,  $AF$  为半径, 绘制切  $OT$  线的  $BFGC$  半圆, 代表剪动态的临界摩尔圆。

(4)  $1/2(OA+OB)$  之  $D$  点为圆心, 半径  $= 1/2(AB)$  绘  $BNA$  半圆。

(5) 连接  $O$  至  $BFGC$  半圆顶点为  $OG$  线, 以  $R_{fa}$  代表  $OG$  线的斜率。

(6) 连接  $O$  至  $BNG$  半圆顶点为  $ON$  线, 以  $R_{nc}$  代表  $ON$  线的斜率。

(7) 连接  $BNG$  三点为一直线,  $NG = 1/2BG$ 。此两项叙述皆可由平面几何证明为真。

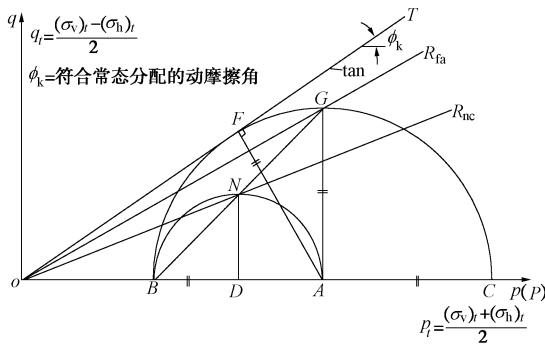


图 1 以解析几何图形演绎一个点的主应力摩尔圆

Fig. 1 Use of analytic geometry to deduce principal stress from one point of Mohr circle

## 2.3 由解析几何学的演绎的结果

于图 1 的  $OFA$  直角三角形, 令  $OA$  线段为一数值,  $OA = 1 \cdot (\sigma_v)_{nc} = \gamma' \cdot z$ , 赋予与  $NC$  地层坐标点具有主应力数值, 则  $AF = \sin \phi_k \cdot (\sigma_v)_{nc}$ 。因半径皆相等,

$$\therefore AB = AF = AG = AC = \sin \phi_k \cdot (\sigma_v)_{nc},$$

$$OB = (1 - \sin \phi_k) \cdot (\sigma_v)_{nc},$$

$$OC = (1 + \sin \phi_k) \cdot (\sigma_v)_{nc}.$$

定义主动态摩尔破坏圆的主应力比为  $K_{fa}$ ,  $OG$  为

所有塑剪时处于临界状态摩尔圆顶点联线的斜率  $R_{fa}$ 。正常压密态主应力比为  $K_{nc}$ ,  $ON$  线为所有正常压密态摩尔圆顶点联线的斜率  $R_{nc}$ 。依图 2 及解析几何学, 可得到演绎的公式 (2) ~ (5):

$$K_{fa} = \frac{(\sigma_h)_{fa}}{(\sigma_v)_{fa}} = \frac{OB}{OC} = \frac{OA - AF}{OA + AF} = \frac{1 - \sin \phi_k}{1 + \sin \phi_k}, \quad (2)$$

$$R_{fa} = \frac{AG}{OA} = \frac{AF}{OA} = \frac{\sin \phi_k}{1} = \sin \phi_k, \quad (3)$$

$$K_{nc} = \frac{(\sigma_h)_{nc}}{(\sigma_v)_{nc}} = \frac{OB}{OA} = \frac{OA - AB}{OA} = 1 - \sin \phi_k, \quad (4)$$

$$R_{nc} = \frac{ND}{OD} = \frac{0.5 \times AB}{0.5 \times (OA + OB)} = \frac{\sin \phi_k}{2 - \sin \phi_k}. \quad (5)$$

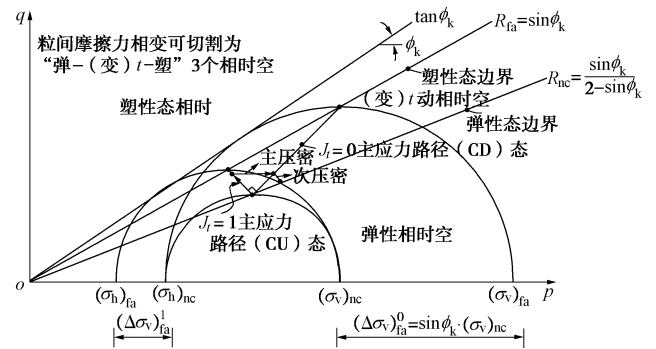


图 2 主动态摩擦力相变时空具有“弹-(变)t-塑”边界

Fig. 2 Boundaries of three-phase condition for active frictional phase transition space-time

公式 (2) ~ (5) 的 4 个参数皆依原生的本质性动摩擦角  $\phi_k$ , 依解析几何为真条件, 演绎得到衍生的次级参数, 皆为理想散体粒子在摩擦力相变时空, 发生摩擦力相变过程中重要的边界。每一个地层以一个符合常态分配的动摩擦角  $\phi_k$  为代表数值, 则依公式 (2) ~ (5), 得知各地层及各自的  $p-q$  图中有两个明显的边界线,  $R_{fa}$  及  $R_{nc}$ , 对应至粒间依时主应力比的边界条件为  $K_{fa}$  及  $K_{nc}$ 。由图 1 及图 2, 散体粒间具有唯一的动摩擦角  $\phi_k$  数值, 在  $p-q$  图中, 可切割出“弹-(变)t-塑”3 个相的时空, 及两个相与相交界的边界, 即代表恰好为弹性态与恰好发生塑性态的边界, 即  $R_{nc}$  及  $R_{fa}$  值。而粒间的主应力比,  $K_{nc}$  及  $K_{fa}$  亦相对应以依时主应力比, 将粒间依时主应力的时空切成“弹-(变)t-塑”3 个相时空, 如图 2。本文定义主动态的摩擦力相变时空, 始于弹性边界线  $R_{nc}$ , 终止于塑性边界线  $R_{fa}$ 。此点与本文第 1.1 节摩擦力相变时空边界的坐标定义是一致的。

## 2.4 依 $\phi_k$ 的演绎参数, 在主应力空间与时间的意义

目前的土壤力学中,  $K$  值表达粒间主应力比。本文之  $K_t$  表示粒间在依时变动时的主应力比,  $K_{nc}$  表示  $NC$  态土层中, 粒间主应力静止态的主应力比,  $K_{fa}$  为

发生主动可视剪裂相变时,剪裂面处的粒间主应力比。

土壤力学中,在  $c=0$ ,  $\phi$  常数值=本文的 NC 态动摩擦角  $\phi_k$  时,则公式 (4) 的  $K_{nc}=1-\sin\phi_k$ , 与 Jaky 用归纳法得到的静止土压力系数  $K_0=1-\sin\phi$  结果一致。

公式 (2)  $K_{fa}=\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}$  与朗金 (Rankine, 1857)

理论推导的  $K_a=\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}$  结果一致。

定义  $R_t=\frac{q_t}{p_t}=\frac{(\sigma_v)_t-(\sigma_h)_t}{(\sigma_v)_t+(\sigma_h)_t}$ , 以 NC 态土层的

$[\sigma]_{nc}$  为弹性态的起始主应力,则增加垂直向增量主应力,在  $p-q$  图中皆可用  $R_t$  表达。但由公式 (5)

$R_{nc}=\frac{\sin\phi_k}{2-\sin\phi_k}$  及公式 (3)  $R_{fa}=\sin\phi_k$  可推论当  $\phi_k$  是

唯一本质参数时,  $R_{nc}$  及  $R_{fa}$  皆是一条直线,分别代表粒间主应力恰为弹性静止态及恰为发生塑剪状态。两条线之间的主应力空间与时间切割出的明确相时空,不属于弹,亦不属于塑,是一个前人未明确标示的相时空。

## 2.5 发现摩擦力相变时空应由“弹-(变) $t$ -塑”3个相时空构成一只考虑主动态的摩擦力相变时空

NC 态时恰好符合广义弹性定义,粒间具 3 向度静止土压力,此时的空间主应力为  $[(\sigma_v)_{nc}, (\sigma_h)_{nc}]_{z,x,y}$ , NC 态主应力比为  $K_{nc}=1-\sin\phi_k$ ,  $p-q$  图上的 NC 态包络线斜率  $R_{nc}=\frac{\sin\phi_k}{2-\sin\phi_k}$ 。这两项指标皆指出此时间点及主应力条件处于恰好为弹性态,即弹性相时空。

试体发生可视塑剪裂面相变时,符合动摩擦定律的整体剪动,剪力面上的主应力比为  $K_{fa}=\frac{1-\sin\phi_k}{1+\sin\phi_k}$ ,  $p-q$  图上的主应力圆顶点的包络线斜率  $R_{fa}=\sin\phi_k$ 。这两项指标指出此时间的粒间主应力条件,剪力面上的粒子恰好为塑性态。

不论依据主应力比  $K$  值及  $p-q$  图的斜率  $R$  值,皆发现  $K_{nc}\sim K_{fa}$  之间由粒间主应力与时间所构成的时空,皆不是绝对的“弹塑”观念可完全解释。作者由实际案例的观察,发现散体粒子试体由弹性发展至塑性,必须包含一个依时变动的相时空即变动相时空。

散体粒子由弹性至塑性的摩擦力相变时空,必须以“弹-(变) $t$ -塑”3个相时空组成,才能连接由弹至塑间的非线性应力-应变问题。

## 2.6 瞬时主应力场的数学模型

(1) 正常压密态地层中的 NC 态主应力场

依据笛卡尔坐标,在 NC 态土层中的主应力  $[\sigma_{nc}]$ ,依时间轴皆为静止态主应力:

$$[\sigma_{nc}]_{z,x,y} = \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} \\ (\sigma_h)_{nc} \end{bmatrix}_{z,x,y} = \begin{bmatrix} \gamma' \cdot z \\ (1-\sin\phi_k) \cdot \gamma' \cdot z \end{bmatrix}_{z,x,y} \quad (6)$$

此公式中的 NC 态主应力比  $K_{nc}=1-\sin\phi_k$  的  $x, y$  方向主应力皆相等。

### (2) 瞬时的主应力场

地表增剪荷重在 NC 态地层中皆可由 Boussinesq 公式计算出每一坐标点的垂直向依时增量主应力  $(\Delta\sigma_v)_{t,z,x,y}$ 。当垂直向增量主应力  $(\Delta\sigma_v)_t$  为已知时,则瞬时主应力场  $[\sigma_t]$  表达为:

$$[\sigma_t]_{z,x,y} = [\sigma_{nc}]_{z,x,y} + (\Delta\sigma_v)_{t,z,x,y} = \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} + (\Delta\sigma_v)_t \\ (\sigma_h)_{nc} + 0 \end{bmatrix}_{z,x,y} \quad (7)$$

### (3) 瞬时的有效主应力场与瞬时孔隙压参数 $J$

定义式 (8) 中的  $J$  为瞬时的超额孔隙水压参数,

依逻辑必须介于 0 与 1 之间,即  $0 < J = \frac{(\Delta u)_t}{(\Delta\sigma_v)_t} < 1$ , 因

此 0 或 1 为两个极端的边界条件,对应三轴试验或实际地层,即 CD 与 CU 状态时的最极端的边界条件。

$$(\Delta u_w)_t = (\Delta u)_t = J \cdot (\Delta\sigma_v)_t \quad (8)$$

当增加  $(+\Delta\sigma_v)_t$  的瞬时,不可能超过两个极端状态。完全不产生粒间孔隙水压状态,取  $J=0$ ,即 CD 态;完全转化为粒间孔隙水压状态,取  $J=1$ ,即 CU 态。地下水位线以下,饱和的 NC 态地层,一定要考虑加载瞬时是否会产生瞬间的超额孔隙水压  $(\Delta u)_t$ ,公式 (8) 依粒间主应力 (即有效应力原理) 修正为同时包含 CD 及 CU 状态的数学式:

$$[\sigma_t]_{z,x,y} = [\sigma_{nc}]_{z,x,y} + (\Delta\sigma_v)_{t,z,x,y} = \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} + (\Delta\sigma_v)_t - J \cdot (\Delta\sigma_v)_t \\ (\sigma_h)_{nc} + 0 - J \cdot (\Delta\sigma_v)_t \end{bmatrix}_{z,x,y} \quad (9)$$

当  $J=0$  状态,即公式 (7)。当  $J=1$  状态的瞬时,有效主应力场:

$$[\sigma_t]_{z,x,y} = \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} - 0 \\ (\sigma_h)_{nc} - (\Delta\sigma_v)_t \end{bmatrix}_{z,x,y} \quad (10)$$

于 NC 态土体,瞬间加载  $(\Delta\sigma_v)_t$ ,依土体透水系数可由资深岩土工程师分析真实土体中  $J$  值决定土粒间主应力路径较适采用哪一个极端边界做为数值模型。 $J$  值一旦确认,可依公式 (9) 反映至  $p-q$  图中,便完全对应 Lambe 成  $90^\circ$  交角的两条边界态的主应力路径。

## 3 预测 NC 土体因量化加压的结果

取压密至 NC 主应力态土体,是否可事前预测增

加多少垂直向增量主应力会达到塑剪破坏结果? 若有符合力学的数值模型, 必须可以达到预测功能。

### 3.1 预测 $J=0$ 的 NC 土体, 发生塑剪时的垂直向增量主应力

$J=0$  状态,  $(\Delta u)_t = J \cdot (\Delta \sigma_v)_t = 0$ 。已知试体为 NC 主应力态, 预测试体达到临界态有效主应力比的垂直向增量主应力, 依据公式 (9) 得

$$[\sigma_{fa}]^0 = \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} + (\Delta \sigma_v)_{fa}^0 \\ (\sigma_h)_{nc} + 0 \end{bmatrix}_t, \quad (11)$$

其中  $(\Delta \sigma_v)_{fa}^0$  为达临界态的垂直向增量主应力, 上标的 0 表示  $J=0$  状态。

依公式 (2) 及 (4) 得

$$\left. \begin{aligned} K_{fa} &= \frac{(\sigma_h)_{nc}}{(\sigma_v)_{nc} + (\Delta \sigma_v)_{fa}^0} = \frac{1 - \sin \phi_k}{1 + \sin \phi_k}, \\ (\Delta \sigma_v)_{fa}^0 &= \sin \phi_k \cdot (\sigma_v)_{nc} = \sin \phi_k \cdot \gamma' \cdot z \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

此项预测值可由重模高透水性砂土, 或任何粒子组成的散体, 于三轴室中先压密至 NC 态, 其后执行 CD 试验进行验证。

数值模拟验证如下: 已知  $\phi_k = 30^\circ$ ,

$$[\sigma_{nc}] = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}, J=0, \text{ 求 } (\Delta \sigma_v)_{fa}^0. \text{ 由公式 (12) 得}$$

$$\text{到 } (\Delta \sigma_v)_{fa}^0 = \sin \phi_k \cdot (\sigma_v)_{nc} = 10, \quad [\sigma_{fa}]^0 = \begin{bmatrix} 20+10 \\ 10+0 \end{bmatrix}_{fa} =$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}_{fa}, \quad K_t = \frac{10}{30} = 0.3333 = K_{fa} = \frac{1 - \sin \phi_k}{1 + \sin \phi_k}, \text{ 符合公式}$$

$$(2), \quad \frac{30-10}{30+10} = 0.5 = \sin \phi_k = R_{fa}, \text{ 符合公式 (3).}$$

$$(\bar{\tau}_R)_f = \left[ \frac{30+10}{2} + \frac{30-10}{2} \cos 120^\circ \right] \cdot \tan 30^\circ = 8.66025,$$

$$(\bar{\tau}_D)_f = \frac{30-10}{2} \cdot \sin 120^\circ = 8.66025 = (\bar{\tau}_R)_f. \quad (\bar{\tau}_R)_f,$$

$(\bar{\tau}_D)_f$  为  $\alpha$  剪力面的一对相反的剪应力向量, 即阻抗及驱动剪应力。依据本文的数值模型, 验证此对剪应力, 符合动摩擦定律。

### 3.2 预测 $J=1$ 的 NC 态土体, 发生塑剪的垂直向增量主应力

$J=1$  状态,  $(\Delta u)_t = J \cdot (\Delta \sigma_v)_t = (\Delta \sigma_v)_t$ 。已知试体 NC 主应力态, 预测试体达到临界态有效主应力比的垂直向增量主应力, 依据公式 (9), (10) 得

$$[\sigma_{fa}]^1 = \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} + (\Delta \sigma_v)_{fa}^1 - (\Delta \sigma_v)_{fa}^1 \\ (\sigma_h)_{nc} + 0 - (\Delta \sigma_v)_{fa}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} - 0 \\ (\sigma_h)_{nc} - (\Delta \sigma_v)_{fa}^1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中,  $(\Delta \sigma_v)_{fa}^1$  为  $J=1$  状态时达临界态的垂直向增量主应力。

$$\left. \begin{aligned} K_{fa} &= \frac{(\sigma_h)_{nc} - (\Delta \sigma_v)_{fa}^1}{(\sigma_v)_{nc}} = \frac{1 - \sin \phi_k}{1 + \sin \phi_k}, \\ (\Delta \sigma_v)_{fa}^1 &= K_{fa} \cdot \sin \phi_k \cdot (\sigma_v)_{nc} = K_{fa} \cdot \sin \phi_k \cdot \gamma' \cdot z \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

此项预测值可取软弱饱和黏土试体, 亦可重模任何粒子组成的饱和散体, 于三轴室中先压密至 NC 主应力态, 其后执行 CU 试验进行实体验证。

$$\text{数值模拟验证如下: 已知 } \phi_k = 30^\circ, [\sigma_{nc}] = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$J=1, \text{ 求 } (\Delta \sigma_v)_{fa}^1. \text{ 由公式 (14), } (\Delta \sigma_v)_{fa}^1 = K_{fa} \cdot \sin \phi_k \cdot (\sigma_v)_{nc} = 3.3333, \quad [\sigma_{fa}]^1 = [\sigma_{nc}] + (\Delta \sigma_v)_{fa}^1 =$$

$$\begin{bmatrix} 20+3.333-3.333 \\ 10+0-3.333 \end{bmatrix}_{fa} = \begin{bmatrix} 20 \\ 6.666 \end{bmatrix}_{fa}. \quad K_t = \frac{6.666}{20} = 0.3333$$

$$= K_{fa} = \frac{1 - \sin \phi_k}{1 + \sin \phi_k}, \text{ 符合公式 (2), } \frac{20-6.666}{20+6.666} = 0.5 =$$

$$\sin \phi_k = R_{fa}, \text{ 符合公式 (3).}$$

依据点应力平衡公式, 检核  $\alpha$  角剪力面的一对剪应力向量:

$$(\bar{\tau}_R)_f = \left[ \frac{20+6.666}{2} + \frac{20-6.666}{2} \cdot \cos 120^\circ \right] \cdot \tan 30^\circ =$$

$$5.7735, \quad (\bar{\tau}_D)_f = \frac{20-6.666}{2} \cdot \sin 120^\circ = 5.7735 = (\bar{\tau}_R)_f.$$

以上 2 例证明, 由相同  $[\sigma_{nc}]$  主应力点, 当动摩擦角  $\phi_k$  为本质常数时, 不论  $J=0$  或  $J=1$  皆具有相同的临界状态, 即  $R_m = \tan \phi_k$  莫尔包络线, 同时符合  $R_{fa} = \sin \phi_k$  包络线, 剪力面的成对剪应力值大小相等, 方向相反, 符合动摩擦定律的定义。由前述 2 案例的数值结果, 验证与前提假说具有一致性。

### 3.3 预测 $J=0$ 状态, $+(\Delta \sigma_v)_t < (\Delta \sigma_v)_{fa}^0$ 的结果

$J=0$  状态,  $+(\Delta \sigma_v)_t$  且  $(\Delta u)_t = 0$ , 增加的垂直向的主应力依牛顿第三定律迅速迭加完成, 但次压密要非常冗长的调整与变动时间。数学式如下

$$[\sigma_t] = [\sigma_{nc}] + (\Delta \sigma_v)_t = \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} + (\Delta \sigma_v)_t \\ (\sigma_h)_{nc} + 0 \end{bmatrix}_t$$

$$\xrightarrow{\text{次压密}} \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} + (\Delta \sigma_v)_{fa}^0 \\ (\sigma_h)_{nc} + K_{nc} \cdot (\Delta \sigma_v)_{fa}^0 \end{bmatrix}_{nc,i} = [\sigma_{nc}]_i. \quad (15)$$

观察全世界的海相、河相及湖相的沉积地层, 经过足够长的压密时间, 最终皆为 NC 态地层, 或近似 NC 态地层。本文数学模型及图 1, 2 的总结: 只要压密时间足够, 原为  $[\sigma_{nc}]_0$  土体的粒间主应力, 因增加  $(\Delta \sigma_v)_t$ , 若  $(\Delta u)_t = 0$  时, 几乎可瞬间时迭加, 但水平向主应力的增加, 须移动很多粒子, 一层一层的完成次压密。经过冗长的时间及相关条件, 最终的 NC 态主应力比, 必定回复到  $K_{nc} = 1 - \sin \phi_k$  的弹性边界状态,

即图 1 的  $R_{nc}$  线。

### 3.4 预测 $J=1$ 状态, $+(\Delta\sigma_v)_t < (\Delta\sigma_v)_{fa}^I$ 的结果

$J=1$  状态, 瞬间加载的垂直向主应力除了遵守牛顿第三定律, 且必须遵守透水性的本质与有效应力原理。几乎达到不透水的土体, 必须先排除粒间因加压, 粒间迅速应变所产生的增量孔隙水压, 此过程即为冗长时间主压密, 再经过更冗长的次压密时间, 完成水平向主应力与垂直主应力及动摩擦角  $\phi_k$  间达到粒间 3 向度主应力系的平衡状态。在重力场中, 不论任何深度的散体粒子间, 最终的主应力比, 不论由实际的观测或本模型, 皆再度回复到皆为  $K_{nc}$  状态的正常压密态土层, 此点已可由台北市古老沉积层得到实际的验证。表达成数学式如公式 (16)。

$$\begin{aligned}
 [\sigma_t] &= \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} + (\Delta\sigma_v)_t^I - (\Delta\sigma_v)_t^I \\ (\sigma_h)_{nc} + 0 - (\Delta\sigma_v)_t^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} - 0 \\ (\sigma_h)_{nc} - (\Delta\sigma_v)_t^I \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\text{主压密}} \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} + (\Delta\sigma_v)_t^I \\ (\sigma_h)_{nc} - 0 \end{bmatrix}_t \\
 &\xrightarrow{\text{次压密}} \begin{bmatrix} (\sigma_v)_{nc} + (\Delta\sigma_v)_t^I \\ (\sigma_h)_{nc} + K_{nc} \cdot (\Delta\sigma_v)_t^I \end{bmatrix}_{nc,i} = [\sigma_{nc}]_i \quad (16)
 \end{aligned}$$

应用公式 (2) ~ (5) 及公式 (15) ~ (16), 已可由粒间的唯一的依时主应力, 将大地工程的极限剪应力及压密固结理论, 两个不相干理论, 整合在一个数值模型中。

## 4 结 论

(1) 依据本文前提为真的假说, 已演绎出具有自洽性, 只有一个本质参数的数值模型。本模型要成为放之四海而皆真的理论, 尚需有共识的团队一同深入发现研究与实务验证补强。此数值模型架构, 是“站

在前人的成果上整合至前人尚未到达的新境界”。

(2) 本文为了简化及绝对性地摆脱粒间具有各种凝聚力的干扰, 故原始的构想, 以没有任何粒间凝聚力的抽象理想散体粒子, 模拟大自然中的岩土粒子, 在地球重力场及浮力场中沉积, 依自重与冗长的压密时间成为正常压密态 (NC) 地层为主应力基准。

(3) 散体的粒子在本文的数值模型, 抽象成依笛卡尔固定坐标点, 每个坐标点存在 3 个方向主应力, 且依时间轴变动的粒间依时主应力。因此, 本文的数值模型中, 粒子仅是粒间依时主应力的载体, 主体是每个固定坐标点, 个别依时变动的主应力, 构成 4 度时空的主应力场, 亦衍生所有粒子间成对出现、方向相反, 向量性质的剪应力, 决定粒子间的平衡。

(4) 在本文的数值模型演绎过程 (图 1~2) 中, 发现摩擦力相变时空应由“弹- (变)  $t$ -塑”3 个相时空组成。

(5) 本文的贡献是散体粒子在摩擦力相变时空, 抽象出产生剪应力的本质性参数及粒间依时主应力观念, 演绎出可依真实坐标计算的力学模型。

### 参考文献:

- [1] LAMB T W, WHITMAN R V. Soil mechanics[M]. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- [2] HOLTZ R D, KOVACS W. An introduction to geotechnical engineering[M]. New Jersey: Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, 1981.
- [3] DAS B M. Principles of Geotechnical Engineering[M]. 4th ed. US: PWS Publishing Company, 2011.
- [4] HALLIDAY, RESNICK. Fundamentals of physics[M]. 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc, 2011.

(本文责编 明经平)