

DOI: 10.11779/CJGE2015S1034

基于分数阶微积分岩石的动态变形行为研究

何明明, 李 宁, 陈蕴生, 朱才辉

(西安理工大学岩土工程研究所, 陕西 西安 710048)

摘 要: 为了更合理地描述岩石环向与轴向动态变形之间的关系, 从分数阶微积分出发, 在黏弹性应力-应变组合模型理论上, 提出环向-轴向应变分数阶黏壶及环向-轴向应变关系的黏弹性组合模型, 构建了基于分数阶微积分的岩石在静态压缩及循环荷载条件下环向-轴向应变关系模型, 并给出了模型的解析解, 从而得到的分数阶体积应变公式可以作为体积应变求解的新方法。基于多种岩石、混凝土及石膏的实验数据, 对分数阶微积分环向-轴向应变关系模型的参数进行拟合分析, 对模型参数进行了敏感性分析, 揭示了围压、应变水平、分数阶导数阶数及模型参数对环向应变的影响规律。结果表明环向-轴向应变关系模型不仅可以更好地反映岩石体积变形的减缩减胀特性, 而且能够描述岩石在循环荷载及动态压缩条件下变形规律。

关键词: 分数阶微积分; 分数阶黏壶; 环向-轴向应变关系; 体积应变

中图分类号: TU45

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2015)S1-0178-07

作者简介: 何明明(1986-), 男, 博士研究生, 主要从事岩土工程等方面的研究工作。E-mail: 807658619@qq.com。

Dynamic deformation behavior of rock based on fractional order calculus

HE Ming-ming, LI Ning, CHEN Yun-sheng, ZHU Cai-hui

(Institute of Rock and Soil Mechanics, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048 China)

Abstract: In order to describe the dynamic strain of rock better, lateral-axial strain fractional dashpot and viscoelastic lateral-axial strain combined models are put forward on the basis of viscoelastic stress-strain combined model theory. The fractional lateral-axial strain relationship and the fractional volume strain model are proposed based on the fractional order calculus, and the corresponding equations under dynamic loading and cyclic loading are derived. The analytic solution for the model of lateral-axial strain relationship is given theoretically. Moreover, a multi-functional material testing set-up is employed to measure the lateral-axial strain of a variety of rock, concrete and gypsum samples under the dynamic loading and cyclic loading. The parameters of the lateral-axial strain model are determined by fitting to the experimental results of lateral-axial strain of rock. In addition, a sensitivity study for the analytic solution of the lateral-axial strain model is carried out, showing the effects of confining pressure, strain level, fractional derivative order and model coefficient on axial strain of rock samples. Furthermore, it's found that the new model can describe the volume strain phenomenon of negative and positive dilatancy and the variation law of deformation under dynamic loading and cyclic loading in rock.

Key words: fractional order calculus; fractional dashpot; lateral-axial strain relationship; volume strain

0 引 言

1829年, 法国科学家泊松用分子间相互作用的理论导出了弹性体的运动方程, 从理论上推演出各向同性弹性杆在受到纵向拉伸时, 横向收缩应变与纵向伸长应变之比是一常数——泊松比。此后, 泊松比便成为求取弹性材料横向应变最佳途径。

岩石的应变是岩石力学的核心概念之一, 其体现了岩石承受荷载时的变形能力。然而岩石并不是理想弹性材料, 力学性质常常具有时间依赖性, 其变形特性对于地下核工程、储能工程、水利工程、硐室工程、边坡处理和沉降等岩体工程问题至关重要。目前, 关

于岩石变形的研究仍然是将岩石假设为理想弹性体, 通过泊松比来描述两个方向的变形^[1-3]。岩石的体积变形特性与理想弹性材料有很大区别, 其最大的特点是体积变形的剪缩剪胀特性, 如果只通过泊松比来反映这些复杂的现象就似乎不太合理。因此, 本文利用分数阶微积分构建岩石的分数阶环向-轴向应变关系, 从而得到岩石体积应变表达式。

基金项目: 国家自然科学基金项目(51179153); 国家自然科学基金青年科学基金项目(51308456)

收稿日期: 2015-03-26

分数阶微积分最早可追溯到法国数学家Hospital和德国数学家Leibniz时代, 但其研究多集中于纯数学领域而应用研究较少。近年来, 分数阶微积分在工程领域得到广泛应用^[4-6]。分数阶微积分的阶数是连续变化的, 能够很好地体现自然界的连续性。基于分数阶微积分建立的物理模型, 能够良好描述具有记忆及时间依赖性的物理现象, 且具有参数少、适用性广泛等优点。分数阶微积分在力学中应用的较早成果始于黏弹性材料的本构模型研究, 也是目前最活跃的领域之一, 这其中包括黏弹性阻尼器研究^[7-8]、黏弹性流体研究^[9-10]和岩土流变模型研究^[11-15]等。

本研究从分数阶微积分出发, 在黏弹性应力 - 应变组合模型理论基础上, 提出环向 - 轴向应变分数阶黏壶及环向 - 轴向应变关系的黏弹性组合模型, 构建基于分数阶导数的岩石在等应变率静态压缩及循环荷载条件下环向 - 轴向应变关系模型, 并给出了模型的解析解。在岩石、混凝土及石膏试验的基础上, 参考文献[11]的Levenberg-Marquardt算法对分数阶导数环向 - 轴向应变关系模型的参数进行了拟合分析, 对模型参数进行了敏感性分析, 揭示了围压、应变水平、微分阶数及模型参数对环向应变的影响规律。研究发现, 提出的环向 - 轴向应变关系模型不仅可以更好反映岩石体积变形的减缩减胀特性, 而且能够描述岩石在循环荷载及动态压缩条件下泊松比变化规律。

1 分数阶黏弹性的变形模型

1.1 分数阶微积分

分数阶微积分的定义有很多方式^[16], 其中最常用的为Riemann-Liouville定义和Caputo定义, 这里选用Riemann-Liouville分数阶微积分。

Riemann-Liouville 分数阶积分形式为

$$D^{-r} f(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t f(t-\tau)^{r-1} f(\tau) d\tau \quad (t > 0, r \in R^+) , \quad (1)$$

式中, $\Gamma(r) = \int_0^\infty t^{r-1} e^{-t} dt$ 为 Gamma 函数^[16]。

Riemann-Liouville 分数阶微分形式为

$$D^r f(t) = \begin{cases} \frac{d^r [f(t)]}{dt^r} & (r=a), \\ \frac{d^a}{dt^a} \frac{1}{\Gamma(a-r)} \int_0^t f(t-\tau)^{a-r-1} f(\tau) d\tau & (a-1 < r < a). \end{cases} \quad (2)$$

为函数 $f(t)$ 的 r 阶 Riemann-Liouville 分数阶微分^[16]。

根据式 (1)、(2) 可得

$$\begin{cases} D^{-r} t^a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1+r)} t^{r+a} , \\ D^r t^a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1-r)} t^{a-r} \quad (r > 0, a > -1, t > 0) . \end{cases} \quad (3)$$

1.2 分数阶黏弹性横向 - 纵向应变关系

理想弹性材料的应力 - 应变关系遵循胡克定律, 即 $\sigma = E\varepsilon$ 。而非理想弹性材料的应力 - 应变关系并不完全遵循胡克定律。Smit等^[17]提出了分数阶本构模型:

$$\sigma(t) = E\theta^r \frac{d^r \varepsilon(t)}{dt^r} , \quad (4)$$

式中, E 和 θ 为材料常数, r 为微分阶数。

在弹性理论中, 环向 - 轴向应变关系为 $\varepsilon' = -\nu\varepsilon$ 。Wong等^[18]的研究中可以发现软骨在应力松弛时体积随时间的变化曲线与荷载随时间的变化曲线很相似。因此, Duan等^[19]在研究黏弹性材料的拉伸变形时, 认为存在一种与分数阶应力 - 应变关系相对应的横向 - 纵向应变关系, 提出

$$\varepsilon'(t) = -\lambda \frac{d^r \varepsilon(t)}{dt^r} , \quad (5)$$

式中, λ 是与材料性质有关的参数。并且推导出了等应变率加载情况下分数阶横向 - 纵向应变关系^[19]

$$\varepsilon'(t) = -\lambda \frac{v_0}{\Gamma(2-r)} t^{1-r} , \quad (6)$$

式中, v_0 为等应变速率。

2 环向 - 轴向应变组合模型假设

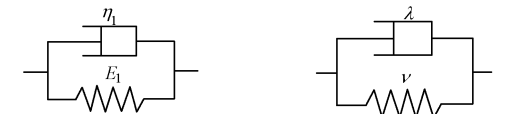
2.1 黏弹性环向-轴向应变组合模型

根据黏弹性组合模型理论提出一个假设: 黏弹性应力 - 应变关系与黏弹性环向应变 - 轴向应变关系具有相对应的等价关系, 称之为环向应变 - 轴向应变关系组合模型, 其对应关系如下:

(1) 胡克模型



(2) 麦克斯韦模型



2.2 环向 - 轴向应变分数阶黏壶

为了研究岩石在静动态压缩条件下的环向 - 轴向变形关系, 参考文献[11, 19]的思想, 提出环向 - 轴向应变分数阶黏壶:

$$\varepsilon(t)_{ve} = -\lambda \frac{d^r \varepsilon(t)'}{dt^r} \quad (7)$$

如果岩石在等应变率静态压缩条件下, 则 $\varepsilon(t)_{ve} = v_0 t$, v_0 是等应变率, 由式 (7) 写为

$$v_0 t = -\lambda \frac{d^r \varepsilon(t)'}{dt^r} \quad (8)$$

由于 v_0 是为常数, 根据式 (3), 可得

$$\varepsilon'(t)_{ve} = -\frac{v_0}{\lambda} \frac{t^{1+r}}{\Gamma(2+r)} \quad (9)$$

将 $v_0 = 1 \text{ mm/min}$, $\lambda = 0.3$, 可得 r 为不同值时的一组环向 - 轴向应变曲线 (图1)。

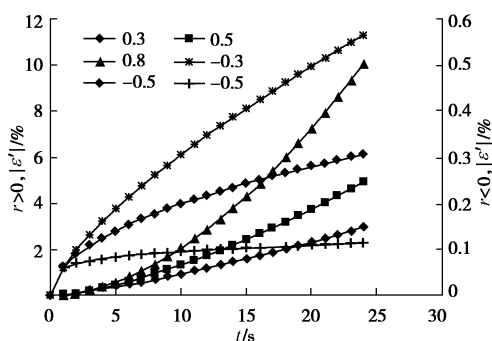


图1 不同 r 值时环向应变与时间关系曲线

Fig. 1 Sensitivity of $|\varepsilon'|$ to t

3 岩石环向应变 - 轴向应变关系

设理想弹性体的轴向应变为 ε_e , 黏弹性体的轴向应变为 ε_{ve} , 轴向总应变 ε 可写为

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} \quad (10)$$

(1) 理想弹性体的环向 - 轴向应变关系

$$\varepsilon_e = -\frac{1}{\nu} \varepsilon'_e \quad (11)$$

式中, ν 为泊松比。

(2) 根据第2节中的黏弹性环向 - 轴向应变组合模型的假设, 黏弹性应力 - 应变关系与黏弹性环向应变 - 轴向应变关系具有相对应的等价关系, 将式 (7)、(11) 代入式 (10) 可得

$$\varepsilon = -\frac{1}{\nu} \varepsilon' - \lambda \frac{d^r \varepsilon'}{dt^r} \quad (12)$$

根据式 (10) 等应变率静态压缩条件下的总应变可写为

$$v_0 t = -\frac{1}{\nu} \varepsilon' - \lambda \frac{d^r \varepsilon'}{dt^r} \quad (13)$$

结合初始条件 $t=0$ 时 $\varepsilon'=0$, 对式 (13) 进行Laplace变

换

$$\frac{v_0}{s^2} = -\frac{1}{\nu} E(s) - \lambda s^r E(s) \quad (14)$$

解得

$$E(s) = -\frac{v_0}{\lambda} \frac{s^{-2}}{\frac{1}{\lambda \nu} + s^r} \quad (15)$$

对式 (15) 进行Laplace逆变换得

$$\varepsilon'(t) = -\frac{v_0}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{\lambda \nu}\right)^k \left(\frac{\varepsilon}{v_0}\right)^{rk+r+1}}{\Gamma(rk+r+2)} \quad (16)$$

体积应变 ε_v 则为

$$\varepsilon_v(t) = \varepsilon - \frac{2v_0}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{\lambda \nu}\right)^k \left(\frac{\varepsilon}{v_0}\right)^{rk+r+1}}{\Gamma(rk+r+2)} \quad (17)$$

这里需要说明, 由于式 (7) 中对时间求导, 使得 λ 的量纲与泊松比 ν 并不相同, λ 是与岩石性质有关的常数, 虽然其物理意义尚不明确, 但分数阶微积分的建模优势不受其影响。将 $v_0 = 2 \text{ mm/min}$, $\nu = 0.25$, $\lambda = 0.75$ 代入式 (16) 可得 r 为不同时的一组环向 - 轴向应变曲线, 如图 (2) 所示。

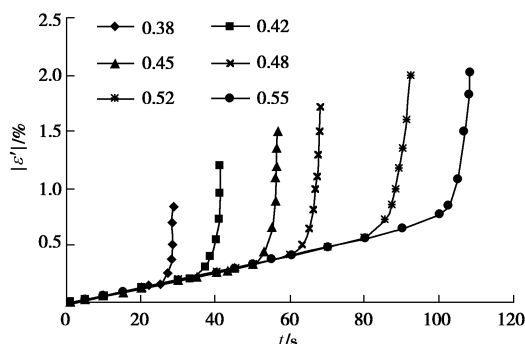


图2 不同 r 时环向应变与时间关系曲线

Fig. 2 Sensitivity of $|\varepsilon'|$ to t

如果岩石在等应变率 ($\Delta \varepsilon(t) = v_0 t$) 动态压缩时, 则环向应变幅值 $\Delta \varepsilon(t)'$ 与轴向应变幅值 $\Delta \varepsilon(t)_{ve}$ 的关系可假设为

$$\Delta \varepsilon(t)_{ve} = \lambda \frac{d^r \Delta \varepsilon(t)'}{dt^r} \quad (18)$$

同理静态压缩时的推导过程, 只需将式 (16) 中 $\varepsilon(t)'$ 和 ε 分别替换为 $\Delta \varepsilon(t)'$ 和 $\Delta \varepsilon$, 可得环向应变幅值为

$$\Delta \varepsilon' = \frac{v_0}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{\lambda \nu}\right)^k \left(\frac{\Delta \varepsilon}{v_0}\right)^{rk+r+1}}{\Gamma(rk+r+2)} \quad (19)$$

体积应变幅值 $\Delta \varepsilon_v$ 则为

$$\Delta \varepsilon_v(t) = \varepsilon - \frac{2v_0}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{\lambda \nu}\right)^k \left(\frac{\varepsilon}{v_0}\right)^{rk+r+1}}{\Gamma(rk+r+2)} \quad (20)$$

4 循环加载下岩石应力 - 应变关系

4.1 应变控制下循环加载环向 - 轴向应变关系

胡克体的环向应变幅值 - 轴向应变幅值关系

$$\Delta \varepsilon_e = \frac{\Delta \varepsilon'_e}{\nu}, \quad (21)$$

式中, ν 为胡克体的泊松比。

根据黏弹性组合模型理论, 有

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \varepsilon'(n)}{\nu} + \lambda \frac{d^r \Delta \varepsilon'(n)}{dn^r}. \quad (22)$$

由于循环加载在应变控制下, 式 (22) 中 $\Delta \varepsilon$ 为常数, $n = N/N_e$ 为循环比 (假设是连续的), N 为循环次数, N_e 为循环结束时的循环次数。结合初始条件 $t=0$ 时 $\Delta \varepsilon' = 0$, 对式 (22) 进行 Laplace 变换得

$$\lambda s^r E(s) + \frac{1}{\nu} E(s) = \frac{\Delta \varepsilon}{s}, \quad (23)$$

$$\text{解得} \quad E(s) = \frac{\Delta \varepsilon}{\lambda} \frac{s^{-1}}{\frac{1}{\lambda \nu} + s^r}. \quad (24)$$

对式 (24) 进行 Laplace 逆变换得

$$\Delta \varepsilon' = \frac{\Delta \varepsilon}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{\lambda \nu}\right)^k n^{r(1+k)}}{r(1+k)\Gamma[(1+k)r]}, \quad (25)$$

体积应变幅值 $\Delta \varepsilon_v$ 则为

$$\Delta \varepsilon_v(t) = \Delta \varepsilon - \frac{2\Delta \varepsilon}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{\lambda \nu}\right)^k n^{r(1+k)}}{r(1+k)\Gamma[(1+k)r]}. \quad (26)$$

4.2 应力控制下循环加载应力 - 轴向应变关系

胡克体的轴向应力幅值 - 轴向应变幅值关系为

$$\Delta \varepsilon_e = \frac{\Delta \sigma}{E_0}, \quad (27)$$

分数阶黏弹性应力 - 应变关系为

$$\Delta \sigma = \eta \frac{d^r \Delta \varepsilon(n)}{dn^r}, \quad (28)$$

式中, η 为分数阶粘性系数。根据黏弹性组合模型理论可得

$$\Delta \sigma = E_0 \varepsilon + \eta \frac{d^r \Delta \varepsilon(n)}{dn^r}, \quad (29)$$

以式 (29) 进行 Laplace 变换及逆变换解得

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \sigma}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{E_0}{\eta}\right)^k n^{r(1+k)}}{r(1+k)\Gamma[(1+k)r]}. \quad (30)$$

5 模型验证

利用绿砂岩, 砂岩及砾岩等岩石, 来验证等分数阶环向 - 轴向应变关系的正确性。本次试验采用西安

理工大学的 WDT-1500 多功能材料试验机, 试验机采用德国 DOLI 公司 EDC 全数字伺服测控器, 自平衡压力室, 轴向和径向变形引伸计等先进技术。配备声波检测系统, 可进行复杂应力条件下的单轴、三轴压缩试验, 剪切试验和疲劳试验, 并可进行试验过程中的实时声波检测。试验机的主要技术指标最大轴向试验力为 1500 kN; 位移测量范围为 0~100 mm; 轴向变形测量范围为 0~10 mm; 径向变形测量范围为 0~5 mm; 三轴室最大围压为 80 MPa; 变形为 0~0.5 mm; 频率为 0~10 Hz。

引入 Mittag-Leffler 函数:

$$E_{a,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ka + \beta)} \quad (\beta, z \in \mathbb{C}; \Re(a) > 0), \quad (31)$$

利用非线性最小二乘法对其参数的进行拟合。引入 Mittag-Leffler 函数渐进逼近^[11], 用 Levenberg-Marquardt 方法对式 (16)、(19)、(25)、(30) 进行拟合, 参考文献[11]给出的详细拟合过程, 可得到本文模型的参数。拟合结果如图3~7所示, 图3为砂岩、混凝土及石膏等应变速率单轴压缩下环向应变、体积应变与轴向应变关系曲线。图4为绿砂岩等应变速率三轴压缩下环向应变、体积应变与轴向应变关系曲线。由图3可知, 提出的分数阶环向 - 轴向应变关系不仅能够拟合类岩石材料在等应变速率压缩条件下的实验数据, 构建的体积应变 - 轴向应变模型还能够反应试件在峰后加载的体积发生膨胀现象, 同时还能描述岩石在加载初期、弹性阶段、塑性变形阶段及峰后变形阶段的变形规律。

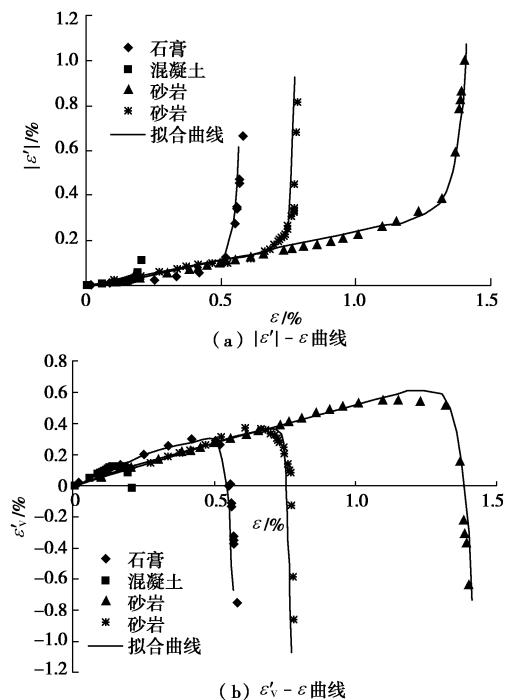


图3 类岩石材料等应变速率单轴压缩试验应变曲线

Fig. 3 Test curves for rock materials under uniaxial compression

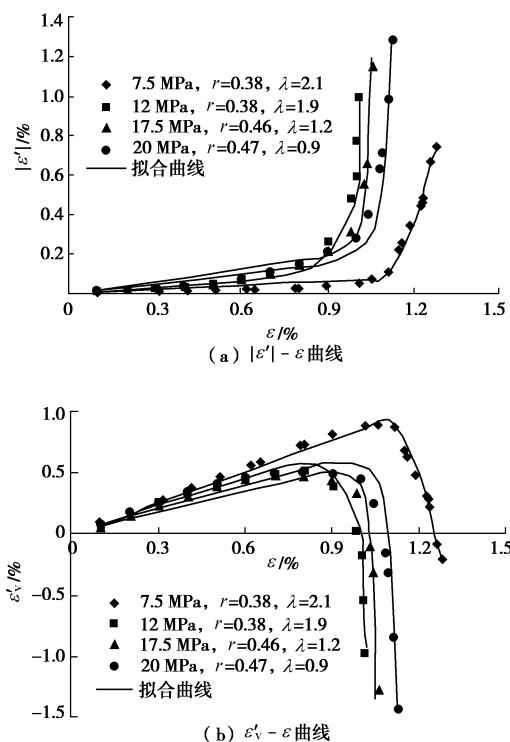


图4 绿砂岩等应变速率三轴压缩应变曲线

Fig. 4 Test curves for green sandstone under triaxial compression

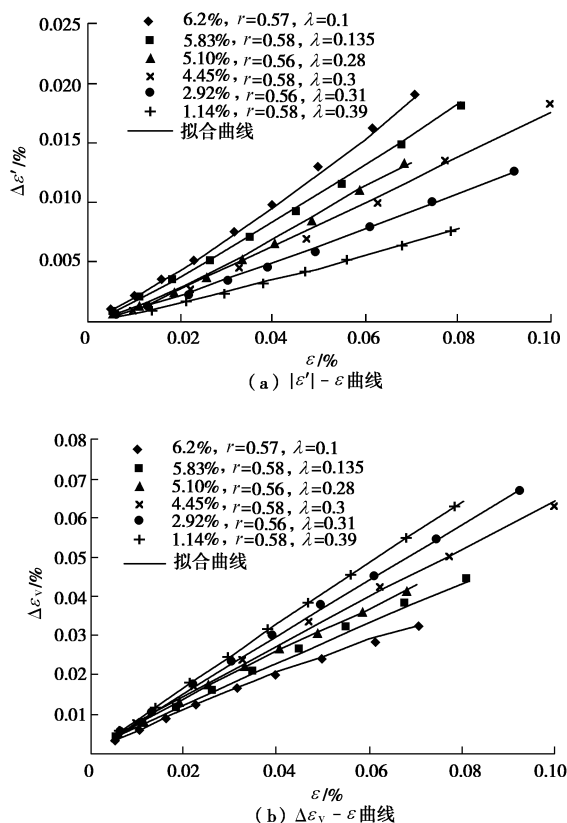


图5 不同含水率砾岩等应变速率动态压缩应变曲线

Fig. 5 Test curves for conglomerate under dynamic compression

从图4可以发现, 随着围压 σ_3 的增加, r 值不断增大和 λ 值不断减小, 这反映了常规三轴压缩试验围压

对于岩石剪缩剪胀性的影响。而岩石在动态压缩和循环加载条件下随着含水率的增大和应变水平的增大, λ 值不断增大, r 值几乎不变, 如图5, 6所示。说明 λ 和 r 还能反映含水率、围压及应变水平等试验条件的变化情况。由此可以得出, 参数 r 和 λ 可以作为岩石在不同围压, 应变水平及含水率等条件下, 其内部变形机理的宏观度量。

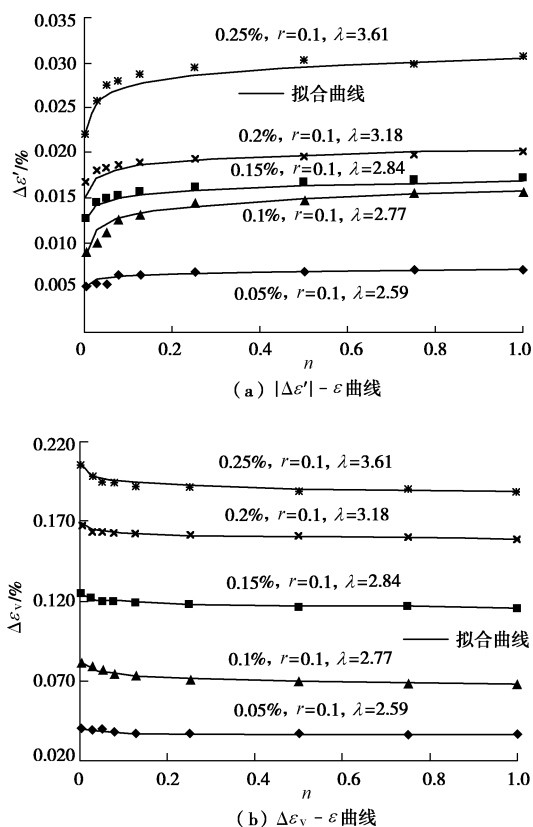
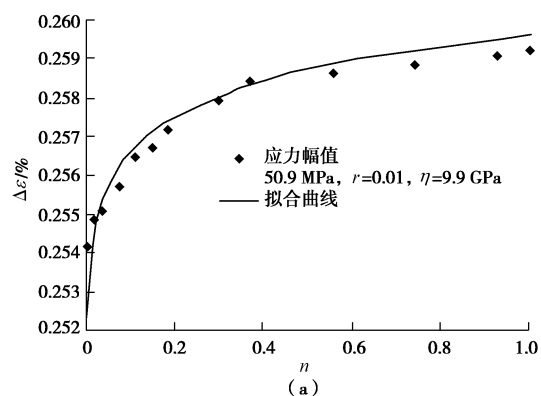


图6 应变控制下砂岩循环荷载试验应变曲线

Fig. 6 Test curves for sandstone subject to cyclic loading

图7为砂岩在循环荷载条件下轴向应变幅值的试验曲线, 拟合曲线是由分数阶麦克斯韦模型拟合得到。该模型大多用于描述黏弹性材料、高分子材料及岩土材料的流变特性。通过拟合结果发现, 分数阶麦克斯韦模型也能够描述岩石在循环荷载条件下应变幅值的演化规律及岩石的循环软化与循环硬化特性。



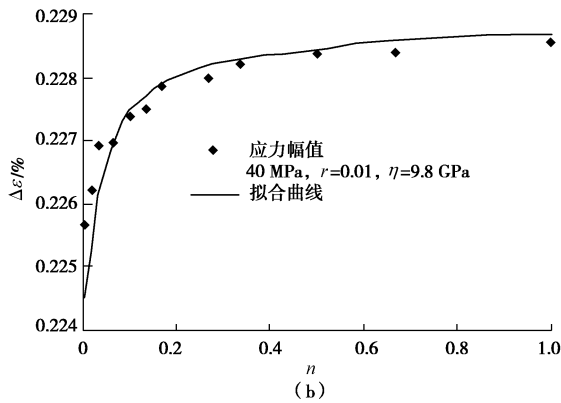


图 7 应力控制下砂岩循环荷载试验应变曲线

Fig. 7 Test curves for sandstone subjected to cyclic loading

6 结 论

本文在黏弹性应力-应变组合模型理论上, 提出环向-轴向应变分数阶黏壶及环向-轴向应变关系的黏弹性组合模型, 构建了基于分数阶导数岩石在静态压缩及循环荷载条件下环向-轴向应变关系模型, 并给出了模型的解析解。在岩石、混凝土及石膏试验的基础上, 讨论了该模型描述岩石体积-轴向应变关系的正确性, 得到以下 3 点结论。

(1) 构建的分数阶岩石环向-轴向应变关系模型, 能够合理地描述岩石变形的时间依赖性, 其不仅符合岩石常规单轴及三轴压缩条件下的实际环向-轴向应变关系, 还可以正确描述岩石体积变形的减缩减胀特性。

(2) 基于本文提出的环向-轴向应变分数阶黏壶, 构建的循环加载下环向-轴向应变关系模型, 能够较好地描述岩石在循环加载下循环软化与循环硬化特性。

(3) 分数阶环向-轴向应变黏壶参数 r 和 λ , 可以作为不同围压, 应变水平及含水率等环境下, 岩石内部变形机理的宏观度量, 可以反映不同加载环境下岩石的环向和体积变形特性。

在后续研究中, 分数阶环向-轴向应变关系模型参数 λ 和微分阶数 r 的物理意义和量纲进一步探究。

参考文献:

[1] WANG Qian, JI Shao-cheng, SUN Sheng-si, et al. Correlations between compressional and shear wave velocities and corresponding Poisson's ratios for some common rocks and sulfide ores[J]. *Tectonophysics*, 2009, **469**(1): 61 - 72.

[2] GERCEK H. Poisson's ratio values for rocks[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2007, **44**(1): 1 - 13.

[3] CAO Chen, REN Ting, COOK C. Calculation of the effect of Poisson's ratio in laboratory push and pull testing of resin-encapsulated bolts[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2013, **64**: 175 - 180.

[4] TORVIK P J, BAGLEY R L. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials[J]. *ASME J Appl Mech*, 1984, **51**(2): 294 - 298.

[5] JESUS I S, MACHADO J A T. Implementation of fractional-order electromagnetic potential through a genetic algorithm[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2009, **14**(5): 1838 - 1843.

[6] SCHMIDT A, GAUL L. On the numerical evaluation of fractional derivatives in multi-degree-of-freedom systems[J]. *Signal Proce*, 2006, **86**(10): 2592 - 2601.

[7] ROSSIKHIN Y A, SHITIKOVA M V. A new method for solving dynamic problems of fractional derivative viscoelasticity[J]. *Inte J Eng Sci*, 2001, **39**(2): 149 - 176.

[8] PARK S W. Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control[J]. *International Journal of Solids Structure*, 2001, **38**(44/45): 8065 - 8092.

[9] YANG D, ZHU K. Start-up flow of a viscoelastic fluid in a pipe with a fractional Maxwell's model[J]. *Computers and Mathematics with Application*, 2010, **60**(8): 2231 - 2238.

[10] WENCHANG T, WENXIAO P, MINGYU X. A note on unsteady flows of a viscoelastic fluid with the fractional Maxwell model between two parallel plates[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, **38**(5): 645 - 650.

[11] 周宏伟, 王春萍, 段志强, 等. 基于分数阶导数的盐岩流变本构模型[J]. *中国科学 (物理学 力学 天文学)*, 2012, **42**(9): 310 - 318. (ZHOU Hong-wei, WANG Chun-ping, DUAN Zhi-qiang, et al. Time-based fractional derivative approach to creep constitutive model of salt rock[J]. *Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica)*, 2012, **42**(9): 310 - 318. (in Chinese))

[12] ZHOU H W, WANG C P, HAN B B, et al. A creep constitutive model for salt rock based on fractional derivatives[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2011, **48**(1): 116 - 121.

[13] 殷德顺, 和成亮, 陈 文. 岩土应变硬化指数理论及其分数阶微积分理论基础[J]. *岩土工程学报*, 2010, **32**(5): 762 - 766. (YIN De-shun, HE Cheng-liang, CHEN Wen, et al. Theory of geotechnical strain hardening index and its rationale from fractional order calculus[J]. *Chinese Journal of*

- Geotechnical Engineering, 2010, **32**(5): 762 - 766. (in Chinese))
- [14] 殷德顺, 任俊娟, 和成亮, 等. 一种新的岩土流变模型元件[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, **26**(9): 1899 - 1903. (YIN De-shun, REN Jun-juan, HE Cheng-liang, et al. A new rheological model element for geomaterials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, **26**(9): 1899 - 1903. (in Chinese))
- [15] 吴 斐, 谢和平, 刘建锋, 等. 分数阶黏弹塑性蠕变模型试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, **33**(5): 964 - 970. (WU Fei, XIE He-ping, LIU Jian-feng, et al. Experimental study of fractional viscoelastic-plastic creep model[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, **33**(5): 964 - 970. (in Chinese))
- [16] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [17] SMIT W, DE VRIES H. Rheological models containing fractional derivatives[J]. Rheologica Acta, 1970, **9**(4): 525 - 534.
- [18] WONG M, PONTICIELLO M, KOVANEN V, et al. Volumetric changes of articular cartilage during stress relaxation in unconfined compression[J]. J Biomech, 2000, **33**(9): 1049 - 1054.
- [19] 段晓梦, 殷德顺, 安丽媛, 等. 基于分数阶微积分的黏弹性材料变形研究[J]. 中国科学 (物理学 力学 天文学), 2013, **43**(8): 971 - 977. (DUAN Xiao-meng, YIN De-shun, AN Li-yuan, et al. The deformation study in viscoelastic materials based on fractional order calculus[J]. Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica), 2013, **43**(8): 971 - 977. (in Chinese))

(本文责编 孙振远)