

DOI: 10.11779/CJGE2015S1026

# 砂土流变行为的热力学本构模型研究

宋世雄<sup>1, 2</sup>, 张建民<sup>1, 2</sup>

(1. 清华大学岩土工程研究所, 北京 100084; 2. 清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

**摘 要:** 采用非平衡态热力学方法, 通过引入颗粒熵  $s_g$  和颗粒温度  $T_g$  描述砂土颗粒间碰撞、滑动、滚动等相互作用, 用颗粒温度引起的弹性弛豫反映砂土内部的不可逆变形, 构建了描述砂土宏观力学行为的热力学方程组。通过合理简化该热力学方程组分析了侧限压缩试验和各向同性压缩试验的流变规律, 分析表明: 简化的热力学模型能够较好地反映和预测砂土蠕变和松弛行为; 砂土在外力加载过程中, 颗粒熵 (颗粒温度) 被激发不断增大直至稳定值, 在停止加载后的流变过程中, 颗粒熵 (颗粒温度) 逐渐衰减, 理论上最终衰减为零 (排除外界扰动); 颗粒熵衰减过程中, 颗粒温度引发的弹性弛豫宏观表现为流变行为, 随着颗粒熵衰减为零, 理论上流变最终停止在一个稳定值。

**关键词:** 热力学; 颗粒温度; 流变; 本构模型; 砂土

中图分类号: TU473

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2015)S1-0129-05

**作者简介:** 宋世雄(1984-), 男, 博士, 主要从事砂土热力学本构模型研究。E-mail: ssx1984@tsinghua.edu.cn。

## Thermodynamic constitutive model for rheological behavior of sand

SONG Shi-xiong<sup>1, 2</sup>, ZHANG Jian-min<sup>1, 2</sup>

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. State Key Laboratory for Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Based on the non-equilibrium thermodynamics, a granular entropy  $s_g$  and a granular temperature  $T_g$  are introduced to describe the collisions, sliding, rolling of sand particles. The elastic relaxation caused by granular temperature variation is used to reflect the irreversible deformation of sand. The thermodynamic governing equations are derived to predict the macroscopic mechanical behavior of sand. Confined compression and isotropic compression tests are investigated using the proposed method. The results indicate that the proposed model can well describe sand relaxation and creep behavior. The granular entropy is excited and increases until a steady value in loading process, and the granular entropy gradually decays until to zero in the rheological process after loading. The elastic relaxation caused by granular temperature leads to the rheological behavior, and the rheology eventually stops at a steady value when the granular entropy decays to zero.

**Key words:** thermodynamics; granular temperature; rheology; constitutive model; sand

## 0 引 言

砂土的流变行为包括蠕变行为和松弛行为: 蠕变是指材料在恒定载荷作用下, 变形随时间的变化而增大的过程; 应力松弛是指材料在恒定应变下, 应力随着时间的变化而减小的过程。砂土流变行为的研究在工程建设中占有重要地位, 诸如地基沉降、边坡隧道变形、土石坝开裂等都与土体的蠕变行为息息相关。

目前砂土流变行为研究主要以蠕变的室内试验研究为主。近年来, 国内外学者开展了大量的室内试验研究。Lade 等<sup>[1-2]</sup>采用三轴排水试验方法观测了饱和 Antelope Valley 砂的蠕变和松弛特性, Murayama 等<sup>[3]</sup>也采用三轴排水试验研究了丰浦砂不同偏应力下的蠕变行为。张云等<sup>[4]</sup>采用单向压缩试验研究了常州不同含水层饱和砂性土的蠕变特性, 杨奇等<sup>[5]</sup>通过室内侧

限高压压缩试验研究了京沪高速铁路试验工点桩底土样在多级荷载作用下的蠕变形。王者超等<sup>[6]</sup>对土的蠕变性质和模型进行了总结。

建立砂土的流变本构模型是流变研究的核心内容。目前, 宏观模型大致分为 3 类: 经验-半经验模型、基于一般流变理论的模型和黏弹塑性模型。经验-半经验模型一般只适用于特殊的边界条件, 如侧限压缩等; 采用模拟材料弹性、黏性、塑性的元件组合而成的一般流变理论模型存在着参数多、难辨识的缺点; 黏弹塑性模型可以描述土的三维蠕变过程, 主要用于描述黏土的蠕变行为。

**基金项目:** 国家自然科学基金青年科学基金项目 (51408333); 国家自然科学基金重点项目 (51038007)

**收稿日期:** 2015-03-26

采用非平衡态热力学方法, 建立描述砂土宏观力学行为的热力学框架<sup>[7-11]</sup>, 是研究砂土蠕变力学行为的新思路。本文介绍了砂土非平衡态热力学框架, 并用其开展砂土流变行为的分析。

## 1 砂土热力学理论模型

基于线性非平衡态热力学的理论, 一些专家最早引入颗粒温度和颗粒熵的概念, 将其用于密集颗粒体系宏观力学行为的研究<sup>[12-14]</sup>。其理论框架为: ①普适方程: 不包含材料参数, 描述基本物理原理的严格方程, 包括3大守恒方程和熵增加方程; ②热力学关系, 包括独立状态变量集合、平衡条件、线性非平衡Onsager关系、热力稳定条件等; ③材料模型, 热力学势函数和迁移系数随状态变量变化的函数模型, 它们的具体形式和参数随不同材料而异。下面主要针对颗粒熵及其演化和颗粒体系的弹性及其弛豫做简单阐述。

### 1.1 颗粒温度和颗粒熵

从物质结构角度看, 颗粒材料与常见的水、空气等普通流体, 或晶体、金属等普通固体有显著区别。普通流体和固体只有宏观运动和微观分子电子运动两个空间层次, 但颗粒物质除此之外, 还有一个以颗粒平均粒径  $d$  为特征长度的颗粒层次, 称为细观层次。固体颗粒材料内细观层次上的摩擦、碰撞等相互作用会导致颗粒出现相对于宏观运动的无规则波动, 即颗粒的涨落运动, 这种涨落运动是颗粒体系能量耗散和不可逆变形出现的内在因素, 它的强弱决定了颗粒体系能量耗散和不可逆变形的强弱。土力学、弹塑性力学等连续介质力学方法中都缺乏一个能够直观描述这种涨落现象的独立状态变量。人们早已熟知, 微观分子的无规运动部分在宏观层次上的表现形式就是热力学熵或温度, 颗粒细观层次的结构和运动的无规则涨落也可以通过与热运动的简单类比, 引入颗粒熵  $s_g$  和颗粒温度  $T_g$  作为状态变量来表征。

细观层次的无规运动与微观分子的热运动有一个重要的不同: 普通气体的分子运动只要达到 Maxwell 速度分布, 气体就处于热力学平衡态下, 即使分子仍在不停碰撞作用, 也没有熵制造; 但运动颗粒之间的相互作用一般是非弹性的, 动态颗粒物质不在局域平衡态下, 有熵制造, 即使被激发达到 Maxwell 速度分布状态, 所携带的动能在相互作用时也会向微观原子运动衰减或弛豫, 总是伴随着熵制造或发热, 直到颗粒涨落为零。这些特征是颗粒物质与普通弹性物体的主要区别。所以引入的颗粒熵  $s_g$  必需同时反映颗粒细观层次的无规则运动和弛豫性, 属于非平衡态热力学中描写偏离局域平衡的弛豫型变量。颗粒温度和颗粒熵的概念最早在 Haff 研究低密度的颗粒气体流体动

力学中提出, 蒋亦民等<sup>[12-14]</sup>将其引入研究密集颗粒体系, 类比热力学熵建立了描述颗粒熵的演化方程

$$\partial_t s_g = R_g / T_g - I, \quad (1)$$

式中,  $s_g$  为颗粒熵密度, 即单位体积土体颗粒中的颗粒熵, 它是密度和颗粒温度的函数, 为了简化模型, 这里取线性模型

$$s_g = \phi b T_g. \quad (2)$$

$R_g$  表示颗粒熵产生率, 忽略空间不均匀性时, 颗粒熵只能通过如振动、对流等机械方式激发。颗粒体系的受外力变形 (可用土体骨架应变率  $v_{ij}$  表征) 作为激发颗粒熵产生的作用力, 在线性非平衡态热力学中称之为耗散力, 与之相对应的热力学共轭量称为耗散流。颗粒熵产生率  $R_g$  即为耗散流和耗散力的乘积, 因此有

$$R_g = \sigma_{ij}^g v_{ij}, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}^g = \eta_{ijkl}^g v_{kl}. \quad (4)$$

实际颗粒之间相互作用是非弹性的, 有热产生, 颗粒熵  $s_g$  会向热力学熵  $s$  转移, 引入颗粒熵转移率  $I$  表示单位体积、单位时间颗粒熵  $s_g$  向热熵  $s$  的转移值。这种转移是单向的, 热熵  $s$  不能向  $s_g$  转移。也就是说, 描述颗粒无规则运动的颗粒熵  $s_g$  不能通过加热的方式来得到。

颗粒体系具有双熵行为, 其能量的耗散相应有两种途径: 一是外界输入能量和体系弹性能等直接耗散为热, 即转化为熵  $s$ ; 另一种是外界输入能量和体系弹性能的释放激发颗粒产生颗粒熵  $s_g$ , 但由于颗粒熵的弛豫性, 它最终转化为热力学熵  $s$ , 如图 1 所示。

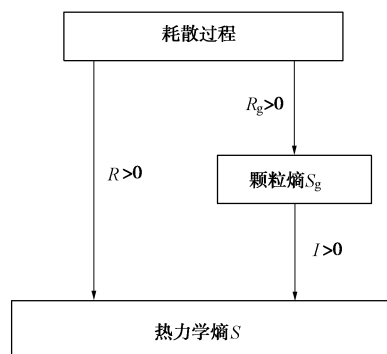


图 1 颗粒体系能量的两种不可逆耗散

Fig. 1 Two-stage irreversibility of granular system

### 1.2 弹性模型

土体在受力变形过程中, 外力对土体做功, 其中弹性应力  $\sigma_{ij}$  在弹性应变  $u_{ij}$  上做功转变为土体的弹性势能  $w_e$ 。在无水或排水三轴试验条件下, 土体的粘滞应力往往可以忽略不计, 可以近似认为弹性应力  $\sigma_{ij}$  即为土体的有效应力  $\sigma'_{ij}$ 。Houlsby<sup>[15]</sup>证明了外力对土体骨架做功  $dw = \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}$ 。对于给定的弹性势能模型  $w_e$ ,

则土体的有效应力和弹性应变  $u_{ij}$  满足关系

$$dw_e = \sigma'_{ij} du_{ij} \quad (5)$$

对于无黏性的砂土颗粒, 本文弹性势能函数为

$$w_e = B\Delta^{2.5} \left( 1 + \xi \frac{u_s^2}{\Delta^2} + \zeta \frac{u_t^3}{\Delta^3} \right) \quad (6)$$

式中,  $B$  反映砂土骨架的刚度, 为体积分数  $\phi$  的函数,  $\Delta = u_{kk}$  为弹性体应变,  $u_s, u_t$  分别为偏应变张量  $u_{ij}^0 = u_{ij} - \Delta\delta_{ij}/3$  的第二、第三应变不变量,  $u_s^2 = u_{ij}^0 u_{ij}^0$ ,  $u_t^3 = u_{ij}^0 u_{jk}^0 u_{ki}^0$ 。则可以得到弹性应力应变关系

$$\sigma_{ij} = B\Delta^{1.5} \left( \frac{5}{2} + \frac{\xi - 2\zeta}{2} \frac{u_s^2}{\Delta^2} - \frac{\zeta}{2} \frac{u_t^3}{\Delta^3} \right) \delta_{ij} + B\Delta^{1.5} \left( 2\xi \frac{u_{ij}^0}{\Delta} + 3\zeta \frac{u_{ik}^0 u_{kj}^0}{\Delta^2} \right) \quad (7)$$

砂土材料在静止的条件下能够保持固有的形状, 这时其变形均为弹性变形。但是一旦受力加载, 颗粒之间的碰撞、滑动、滚动等相互作用会导致力链结构的断裂和重组, 宏观上表现为弹性的弛豫, 导致不可逆变形, 故而弹性应变的演化方程为 (详见文献[7, 11])。

$$d_t u_{ij} = v_{ij} - Y_{ij} \quad (8)$$

式中,  $u_{ij}$  为弹性应变张量,  $v_{ij}$  为土体骨架总应变率,  $Y_{ij}$  为弛豫引发的不可逆变形率。

弹性松弛与橡胶等高分子材料的暂弹性不同, 弹性弛豫是由于颗粒细观层面的动力学过程引起的, 而高分子暂弹性是由于分子间距的改变而引起的。并且, 即使没有持续的外界激发, 高分子材料的弹性经过足够的时间后, 由于内部热运动涨落, 进而将最终弛豫消失掉; 而颗粒材料的暂弹性是与颗粒动力学的涨落运动息息相关的, 热力学的涨落不足以改变动力学的弹性等, 因此如果没有细观层次的涨落, 即  $T_g = 0$ , 则颗粒就不能表现出弹性的弛豫, 而能够长久保持有限的剪应力并保持形状不变。可以说, 颗粒材料的暂弹性是由  $T_g$  激发的, 而不能通过热运动  $T$  激发。所以演化方程可以写为

$$\partial_t u_{ij} = v_{ij} - \lambda T_g u_{ij}^0 + \lambda_0 T_g \Delta \delta_{ij} / 3 \quad (9)$$

### 1.3 本构方程组

对于三轴条件, 其弹性应变  $u_{zz} > u_{xx} = u_{yy}$ , 定义弹性剪应变  $u_q = u_{zz} - u_{xx}$ , 应变比  $\hat{u} = u_q / \Delta$ , 由式 (7) 得平均应力和剪应力分别为

$$p = B\Delta^{1.5} (2.5 + \xi \hat{u}^2 / 3 - \zeta \hat{u}^3 / 9) \quad (10)$$

$$q = B\Delta^{1.5} (2\xi \hat{u} + \zeta \hat{u}^2) \quad (11)$$

式 (9) 可以写为

$$\partial_t \Delta = v - \lambda_0 T_g \Delta \quad (12)$$

$$\partial_t u_q = v_q - \lambda T_g u_q \quad (13)$$

简单取  $\eta_{ijkl} = T_g \delta_{ik} \delta_{jl}$ ,  $I = T_g^2$ , 则式 (1) 可以写为

$$\phi b \partial_t T_g = 2v_q^2 / 3 + v^2 / 3 - T_g^2 \quad (14)$$

质量守恒方程可以写为

$$\partial_t \phi - \phi v = 0 \quad (15)$$

式 (10) ~ (15) 即为三轴加载条件下的热力学方程组。

## 2 砂土的流变本构模型

### 2.1 侧限压缩模型

Miksic 等<sup>[16]</sup>开展了玻璃珠的侧限压缩流变试验, 他们采用粒径在 300~400  $\mu\text{m}$  之间的玻璃珠, 将其填充在侧向刚性的容器内, 为使试样有较好重复性并充分密实, 先加载轴向应力到  $\sigma_{zz} = 650 \text{ kPa}$ , 再卸载到 10 kPa, 此时试验体积分数  $\phi \approx 0.655$ 。然后轴向应力从 10 kPa 加载到 627 kPa, 此时保持轴向应变不变以观测应力松弛或保持轴向应力不变来观测蠕变。

对于试验中的侧限压缩条件, 由式 (7) 得轴向应力和水平应力分别为

$$\sigma_{xx} = B\Delta^{1.5} \left( 2.5 - \frac{2}{3} \xi \hat{u} + \frac{1}{3} (\xi - \zeta) \hat{u}^2 - \frac{1}{9} \zeta \hat{u}^3 \right) \quad (16)$$

$$\sigma_{zz} = B\Delta^{1.5} \left( 2.5 + \frac{4}{3} \xi \hat{u} + \frac{1}{3} (\xi + 2\zeta) \hat{u}^2 - \frac{1}{9} \zeta \hat{u}^3 \right) \quad (17)$$

其应力比为

$$K = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{zz}} = \frac{45 - 12\xi \hat{u} + 6(\xi - \zeta) \hat{u}^2 - 2\zeta \hat{u}^3}{45 + 24\xi \hat{u} + 6(\xi + 2\zeta) \hat{u}^2 - 2\zeta \hat{u}^3} \quad (18)$$

对于蠕变和松弛试验, 在有限的时间内其应力和应变的改变量不大, 故可假定  $K$  为常数, 即  $\hat{u}$  为常数, 则定义常数

$$a = 2.5 + \frac{4}{3} \xi \hat{u} + \frac{1}{3} (\xi + 2\zeta) \hat{u}^2 - \frac{1}{9} \zeta \hat{u}^3 \quad (19)$$

定义模型参数  $B = B_0 (\phi - \phi_c)^n$ ,  $B_0$  为常数,  $\phi$  为体积分,  $\phi_c = 0.655$  为模型初始体积分。有  $\sigma_{zz} = a B_0 (\phi - \phi_c)^n \Delta^{1.5}$ ,  $\sigma_{xx} = a B_0 K (\phi - \phi_c)^n \Delta^{1.5}$ 。

对于蠕变和松弛情况, 由于没有外界机械加载激发, 颗粒温度表达式 (14) 可简化为

$$\phi b \partial_t T_g = -T_g^2 \quad (20)$$

故而颗粒温度随时间变化

$$T_g = \frac{1}{\phi b t + c} \quad (21)$$

式中,  $c = 1/T_g^0$ ,  $T_g^0$  为流变开始时的颗粒温度值。对于松弛和蠕变, 均没有外界机械加载, 弹性应变演化方程 (12) 简化为

$$\partial_t \Delta = -\lambda_0 T_g \Delta = -\frac{\lambda_0 \Delta}{\rho b t + c} \quad (22)$$

积分得弹性体应变的演化方程为

$$\Delta / \Delta_0 = \left( \frac{c}{\rho b t + c} \right)^{\frac{\lambda_0}{\rho b}} \quad (23)$$

对于松弛试验, 体应变率  $v = 0$ , 体积分数  $\phi$  为常



数, 松弛时应力变化

$$\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{zz0}} = \left( \frac{c}{\rho b t + c} \right)^{\frac{3\lambda_0}{2\rho b}}, \quad (24)$$

利用试验给出的松弛应力拟合曲线

$$\sigma_{zz} / \sigma_{zz0} = 1 - 9.71 \times 10^{-3} \ln(1 + t/10.01), \quad (25)$$

拟合可以得到参数

$$c = 10\rho b, \lambda_0 = \rho b/150, \quad (26)$$

即理论给出的松弛曲线为

$$\sigma_{zz} / \sigma_{zz0} = (0.1t + 1)^{-0.01}. \quad (27)$$

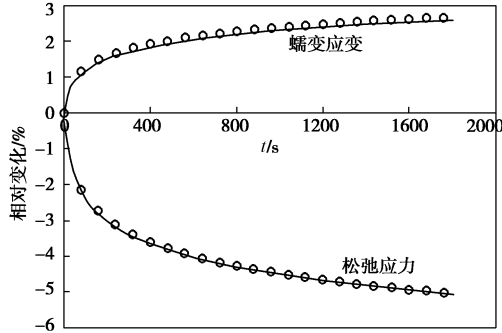


图2 松弛和蠕变相对该变量随时间变化曲线

Fig. 2 Relative change in stress for relaxation tests and compressive strain during creep vs. waiting time

对于蠕变试验,  $B$  随体积分数  $\phi$  变化, 取  $\phi_c$  为试验初始是体积分,  $\phi_0$  为蠕变开始时的体积分 (对应的体应变为  $\varepsilon_{v0} \approx 0.01$ ), 体应变  $\varepsilon_v = 1 - \phi_c / \phi$ . 蠕变时保持  $\sigma_{zz}$  为常数, 其体积分数变化为

$$\phi = \phi_c + (\phi_0 - \phi_c)(\Delta / \Delta_0)^{-3/2n}, \quad (28)$$

故而模型中蠕变体变  $\varepsilon_v$  是模型参数  $n$  的函数, 取  $n=2$ , 理论与实验结果对比见图2。图中, 圆点根据试验给出的拟合曲线计算所得, 实线是模型计算结果, 两种吻合良好。

## 2.2 各向同性压缩模型

Lade 等<sup>[1-2]</sup>对 Antelope Valley 砂进行了一系列排水试验。该砂颗粒比重为 2.81, 最大孔隙比  $e_{\max} = 1.24$ , 最小孔隙比为  $e_{\min} = 0.98$ 。制备试样的初始孔隙比  $e_0 \approx 0.96$ , 试验分五次施加各向同性加载-等压蠕变过程, 应力-应变曲线见图3黑色圆点。对于各向同性压缩-蠕变过程, 热力学控制方程组可以简化为

$$p = 2.5B_0(\phi - \phi_c)^n \Delta^{1.5}, \quad (29)$$

$$\partial_t \Delta = v - \lambda_0 T_g \Delta, \quad (30)$$

$$\phi b \partial_t T_g = v^2/3 - T_g^2, \quad (31)$$

$$\partial_t \phi - \phi v = 0. \quad (32)$$

试验中采用的热力学参数为:  $B_0 = 5 \text{ GPa}$ ,  $\phi_c = 1/(1 + e_{\max}) = 0.446$ ,  $b = 0.001$ ,  $\lambda = \lambda_0(\phi - \phi_c)^2$ ,  $\lambda_0 = 3040$ , 得到的应力应变曲线如图3实线所示。

本文热力学模型预测的体应变蠕变量与实验结果

对比如图4所示, 可以看出, 5种不同初始应力条件下蠕变的预测值与试验结果吻合良好。

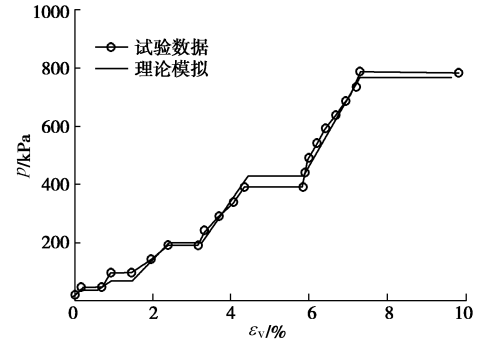


图3 加载和蠕变时应力-体应变关系

Fig. 3 Isotropic stress vs. volumetric strain for Antelope Valley sand

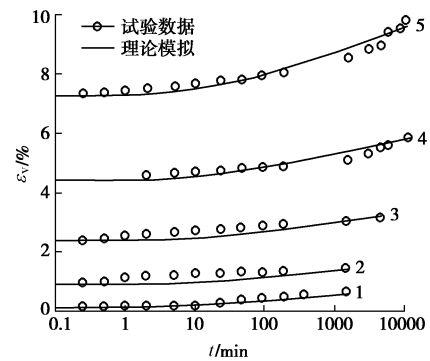


图4 不同初始应力时体积蠕变-时间关系

Fig. 4 Volumetric strain vs. waiting time for various isotropic stresses

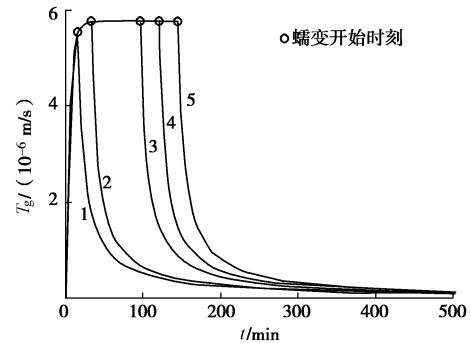


图5 压缩-蠕变过程中颗粒温度-时间关系

Fig. 5 Granular temperature vs. waiting time for isotropic compression-creep

5次压缩-蠕变过程中的颗粒温度变化如图5所示, 可以看出, 砂土在外力加载过程中, 颗粒熵 (颗粒温度) 被激发不断增大直至稳定值,  $T_g = v/\sqrt{3}$ , 在停止加载后的流变过程中, 颗粒熵 (颗粒温度) 迅速衰减, 排除外界扰动引发的颗粒熵波动, 理论上最终衰减为零。

颗粒温度是颗粒体系内部出现不可逆变形和能量耗散的本质原因。而在蠕变和松弛过程中, 尽管外力加载停止, 颗粒熵衰减过程中, 颗粒温度引起的弹性弛豫仍然进行, 颗粒碰撞、滑动、滚动等排列重组引发

的不可逆变形, 宏观上表现为砂土的流变行为, 随着颗粒熵衰减到零, 理论上流变最终停止在一个稳定值。

### 3 结 论

本文通过非平衡态热力学基本理论, 构建了描述颗粒体系宏观力学行为的热力学方程组, 用于分析砂土材料的流变行为, 通过模型简化, 得到如下结论:

(1) 简化的热力学模型能够较好地反映和预测砂土侧限压缩和各向同性压缩条件下的蠕变和松弛行为。

(2) 砂土在外力加载过程中, 颗粒熵(颗粒温度)被激发不断增大直至稳定值, 在停止加载后的流变过程中, 颗粒熵(颗粒温度)逐渐衰减, 排除外界扰动引发的颗粒熵波动, 理论上最终衰减为零。

(3) 颗粒熵衰减过程, 伴随着颗粒温度引起的弹性弛豫, 引发的不可逆变形宏观上表现为砂土的流变行为, 随着颗粒熵衰减到零, 理论上流变最终停止在一个稳定值。

本研究给出了砂土流变行为的热力学机理, 可以进一步开展砂土不同三轴应力路径的理论研究工作, 加深对砂土流变行为的理论认识, 最终可以为砂土流变行为的研究和工程实践提供理论依据。

### 参考文献:

- [1] LADE P V, LIU C. Experimental study of drained creep behavior of sand[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, **124**(8): 912 - 920.
- [2] LADE P V. Experimental study and analysis of creep and stress relaxation in granular materials[C]// Advances in Measurement and Modeling of Soil Behavior. ASCE, 2007: 1 - 11.
- [3] MURAYAMA S, MICHIIRO K, SAKAGAMI T. Creep characteristics of sand[J]. Soils and Foundations, 1984, **24**(5).
- [4] 张 云, 薛禹群, 施小清, 等. 饱和砂性土非线性蠕变模型试验研究[J]. 岩土力学, 2005, **26**(12): 1869 - 1873. (ZHANG Yun, XUE Yu-Qun, SHI Xiao-Qing, et al. Study on nonlinear creep model for saturated sand[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, **26**(12): 1869 - 1873. (in Chinese))
- [5] 杨 奇, 冷伍明, 聂如松, 等. 砂土蠕变特性试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, **33**(2): 4282 - 4286. (YANG Qi, LENG Wu-ming, NIE Ru-song, et al. Laboratory test study of creep behavior of sandy[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, **33**(2): 4282 - 4286. (in Chinese))
- [6] 王者超, 乔丽苹. 土蠕变性质及其模型研究综述与讨论[J]. 岩土力学, 2011, **32**(8): 2251 - 2260. (WANG Zhe-chao, QIAO Li-ping. A review and discussion on creep behavior of soil and its models[J]. Rock and soil Mechanics, 2011, **32**(8): 2251 - 2260. (in Chinese))
- [7] SONG S, SUN Q, JIN F, ZHANG C. Analysis of parameters in granular solid hydrodynamics for triaxial compression tests[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2014, **27**(1): 15 - 27.
- [8] 宋世雄, 孙其诚, 费明龙, 等. 颗粒材料热力学理论在简单剪切流中的应用[J]. 中国科学: 物理学, 力学, 天文学, 2013, **43**(7): 881 - 889. (SONG Shi-xiong, SUN Qi-cheng, FEI Ming-long, et al. Thermodynamic analysis of simple shear granular flows[J]. Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica, 2013, **43**(7): 881 - 889. (in Chinese))
- [9] SUN Q, SONG S, JIN F, et al. Elastic energy and relaxation in triaxial compressions[J]. Granular Matter, 2011, **13**(6): 743 - 750.
- [10] 孙其诚, 宋世雄, 蒋亦民, 等. 基于颗粒物质流体动力学的三轴力学分析[J]. 力学学报, 2012, **44**(2): 447 - 450. (SUN Qi-cheng, SONG Shi-Xiong, JIANG Yi-Min et al. Granular solid hydrodynamics and analyses on triaxial compressions[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, **44**(2): 447 - 450. (in Chinese))
- [11] 宋世雄. 基于非平衡态热力学的砂土本构关系研究[D]. 北京: 清华大学, 2013. (SONG Shi-xiong. Study on the constitutive relationship of sands based on non-equilibrium thermodynamics[D]. Beijing: Tsinghua University, 2013. (in Chinese))
- [12] JIANG Y, LIU M. Granular solid hydrodynamics[J]. Granular Matter, 2009, **11**(3): 139 - 156.
- [13] 蒋亦民, 刘 佑. 砂土的流体动力学方程与本构模型比较[J]. 岩土力学, 2010(6): 1729 - 1738. (JIANG Yi-Min, LIU Mario. Hydrodynamic method versus constitutive modeling in geotechnical materials[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, **31**(6): 1731 - 1738. (in Chinese))
- [14] JIANG Y, LIU M. Granular solid hydrodynamics (GSH): a broad-ranged macroscopic theory of granular media[J]. Acta Mechanica, 2014, **225**(8): 2363 - 2384.
- [15] HOULSBY G T. The work input to a granular material[J]. Géotechnique, 1979, **29**(3): 354 - 358.
- [16] MIKSIC A, ALAVA M J. Evolution of grain contacts in a granular sample under creep and stress relaxation[J]. Physical Review E, 2013, **88**(3): 032207.