

DOI: 10.11779/CJGE2015S1024

# 山区桩柱式桥梁基桩水平变形可靠性分析研究

尹平保<sup>1, 2</sup>, 贺 炜<sup>1</sup>, 成 澄<sup>3</sup>, 周尚志<sup>1, 2</sup>

(1. 长沙理工大学土木与建筑学院, 湖南 长沙 410114; 2. 长沙理工大学桥梁结构安全控制湖南省工程实验室, 湖南 长沙 410114;  
3. 湖南省交通规划勘察设计院, 湖南 长沙 410008.)

**摘要:** 为研究桩柱式桥梁基桩水平变形及其可靠性。首先, 分析了山区桩柱式桥梁基桩的承载特性, 建立了相应的简化受力模型及挠曲微分方程, 并对其进行求解得到了基桩内力与位移计算的表达式; 在此基础上, 分析了影响基桩水平变形的主要因素, 建立了桩柱式桥梁基桩水平变形可靠度计算极限状态方程, 并借助验算点法对其进行求解, 得到了基桩水平变形可靠度指标及失效概率指标的计算表达式; 最后, 以某桥梁基桩为例, 利用该方法计算了可靠度指标, 对比分析表明, 该方法与改进响应面法及蒙特卡罗法计算结果吻合较好, 验证了该计算方法的可行性。

**关键词:** 桩基础; 水平变形; 可靠度; 验算点法;  $m$  法

中图分类号: TU473 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2015)S1-0120-05

**作者简介:** 尹平保(1984- ), 男, 湖南邵阳人, 讲师, 博士, 从事桩基础及支挡结构设计计算与应用研究。E-mail: pingbaby921@163.com。

## Reliability analysis of horizontal displacement of a pile beneath column-supported bridge located in mountainous area

YIN Ping-bao<sup>1, 2</sup>, HE Wei<sup>1</sup>, CHENG Yin<sup>3</sup>, ZHOU Shang-zhi<sup>1, 2</sup>

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China; 2. Hunan Province Engineering Laboratory of Bridge Structure (Changsha University of Science & Technology), Changsha 410114, China; 3. Hunan Provincial Communications Planning Survey & Design Institute, Changsha 410008, China)

**Abstract:** The displacement and the relevant reliability of a pile beneath column-supported bridge are investigated. Firstly, the bearing characteristics of the bridge pile in mountainous area are analyzed, and its differential equations are established and solved, by which the internal force and displacement along the pile shaft are obtained. Secondly, the main influence factors for the horizontal displacement are analyzed. Based on the displacement distribution solved by the limit state equations, the reliability index and failure probability indexes are solved by the checking point method. Finally, an real case of a bridge pile is analyzed by the proposed method, and the results agree well with those of the improved response surface method and Monte Carlo method.

**Key words:** pile foundation; horizontal displacement; reliability; checking point method;  $m$  method

## 0 引言

近年来, 随着高速公路或铁路在中国西部山区的进一步推进, 桩柱式桥梁基桩在桥梁工程建设中的应用也越来越广泛。然而受山区地质、地形、地貌等外界环境的影响, 导致这类基桩的承载机理、受力与变形特性、破坏模式等问题更为复杂, 给设计与施工带来一系列新问题<sup>[1-3]</sup>。为确保山区桩柱式桥梁基桩顺利建成, 很有必要对基桩的水平受力与变形计算方法及其可靠性开展相关的研究。

关于水平荷载下基桩受力与变形方面, 国内外已有学者对其开展了相关的理论与试验研究, 如: Poulos等针对水平受荷桩, 提出了基桩内力与变形计算的弹

性理论法<sup>[4]</sup>; Meyerhof 等针对倾斜受荷桩, 开展了相关的模型试验研究, 探讨了基桩的承载机理及破坏模式<sup>[5]</sup>; 赵明华等对多层地基中的水平受荷嵌岩桩进行了深入的理论研究, 提出了基桩内力与位移计算的幂级数解答<sup>[6-7]</sup>; 吴恒立提出了水平推力桩的综合刚度原理及双参数解析法<sup>[8]</sup>; 陈仁朋等针对饱和粉土地基中的基桩, 开展了水平循环加载试验, 探讨了基桩的水平承载与变形响应<sup>[9]</sup>。而有关基桩水平变形可靠度方

基金项目: 国家自然科学基金项目(51408066, 51478051); 湖南省交通科技计划项目(201014); 长沙理工大学土木工程重点学科创新性项目(13ZDXK09); 长沙理工大学桥梁工程领域开放基金项目(14KA06)

收稿日期: 2015-03-26

面, 主要有: Ronold 等针对近海桩基工程, 提出了一次矩概率统计分析模型, 并考虑水平受荷桩的承载特性, 研究了水平受荷群桩的可靠度<sup>[10]</sup>; 赵明华等<sup>[11]</sup>、曾昭宇等<sup>[12]</sup>采用数理统计方法对倾斜荷载作用桩的工作性能及可靠性进行了理论研究; 孙安建立了水平受荷管桩的功能函数, 推导了管桩的极限弯矩公式, 并对其水平承载可靠性进行了深入研究<sup>[13]</sup>。总的来说, 上述研究主要从基桩竖向及水平向承载力方面来分析研究其可靠性, 而有关基桩水平变形可靠性分析的研究尚不是很多<sup>[14]</sup>。然而实际工程中, 基桩水平变形对桥梁上部结构安全稳定性的影响应引起足够重视, 且必须对其开展深入系统的研究。

鉴于此, 本文拟从桩柱式桥梁基桩的承载机理入手, 分析了基桩的水平受力与变形特性, 据此建立桩柱式桥梁基桩简化受力模型, 进而根据  $m$  法等基本假定建立挠曲微分方程, 并导出基桩水平变形计算表达式; 在此基础上, 进一步借助验算点法对桩柱式桥梁基桩水平变形可靠性进行求解分析, 获得基桩可靠度指标及失效概率计算表达式, 并通过工程实例, 验证该方法的合理性, 以期为类似工程提供参考。

## 1 桩柱式桥梁基桩水平受力与变形分析

对于山区桩柱式桥梁基桩, 除了承受上部结构传递下来的竖向承载外, 往往还会承受一定的水平荷载, 如: 风荷载、制动力、地震作用、桩侧岩土体压力等。已有研究表明, 仅承受水平推力(桩顶)作用的基桩, 其破坏模式主要与桩身抗弯刚度、桩顶与桩端约束条件以及桩周岩土体强度等因素有关。

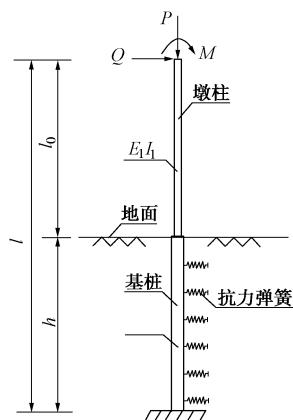


图 1 桩柱式桥梁基桩简化受力模型

Fig. 1 Simplified model of pile

对于既承受竖向荷载作用, 又承受各种水平荷载作用的山区桩柱式桥梁基桩, 其承载特性异常复杂, 有关其破坏模式及承载机理的研究尚无定论。桩柱式桥梁基桩, 可以分为露在外面的墩柱段和埋入岩土体

当中的基桩段, 当基桩受桩侧岩土体推力作用时, 根据推力作用深度, 还需将入土部分的基桩再分为受荷段和嵌固段。综上, 可建立如图 1 所示的桩柱式桥梁基桩简化受力模型。

### 1.1 基本假定

桥梁桩基设计时, 应用最多属  $m$  法。基于  $m$  法假定可得基桩的桩-土变形系数:

$$\alpha = \sqrt[5]{\frac{mb_1}{EI}} \quad (1)$$

式中  $m$  为水平地基抗力系数的比例系数;  $EI$  为基桩桩身抗弯刚度;  $b_1$  为基桩的有效计算宽度, 可根据下式取值<sup>[15]</sup>:

$$b_1 = \begin{cases} kk_f(d+1) & (d \geq 1.0 \text{ m}) \\ kk_f(1.5d+0.5) & (d < 1.0 \text{ m}) \end{cases} \quad (2)$$

式中  $k$  为平行于水平力作用方向的桩间相互影响系数;  $d$  为基桩桩径或垂直于水平外力作用方向桩的宽度;  $k_f$  为基桩形状换算系数, 视水平力作用面而定。

根据桩-土变形系数  $\alpha$  和基桩长度  $h$  的乘积  $\alpha h$  可将其分为弹性长桩、半刚性桩和刚性短桩 3 种类型。对于桥梁基桩, 一般来说属于弹性长桩, 因此, 以下基本假定及后续分析均限于弹性长桩的情况。

(1) 国内外一些研究表明<sup>[16-17]</sup>, 当桩顶竖向荷载不大时, 竖向荷载、基桩自重及桩侧摩阻力对基桩水平受力与变形的影响不大, 即可忽略基桩  $P - \Delta$  效应的影响。

(2) 基于  $m$  法, 假定桩周岩土体地基抗力  $q(x, z)$  沿深度呈线性分布, 其表达式为

$$q(x, z) = b_1 mxz \quad (0 < z < h) \quad (3)$$

式中,  $x$  为基桩水平变形,  $z$  为计算点到桩顶的距离,  $h$  为基桩入土长度, 其他参数同前。

(3) 山区桩柱式桥梁基桩通常为嵌岩桩, 故可假定其桩端边界条件为嵌固。山区环境复杂多变, 墩柱高度也不尽相同, 当墩柱较高时(如超过 30 m 的高墩), 假定其桩顶边界条件为自由更为安全。与之对应的边界条件微分方程为<sup>[16]</sup>

桩顶自由:

$$\begin{cases} EIx''|_{z=0} = M \\ EI[x''' + \lambda^2 x']|_{z=0} = Q \end{cases} \quad (4)$$

桩端嵌固:

$$\begin{cases} \varphi|_{z=l} = 0 \\ x|_{z=l} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

### 1.2 微分方程建立

取桩柱式桥梁基桩某一微元段进行受力分析, 如图 2 所示, 进而可建立基桩挠曲微分方程:

$$\frac{d^4 x}{dz^4} + \alpha^5 xz = 0 \quad . \quad (6)$$

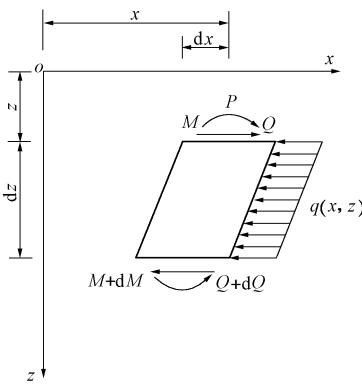


图 2 基桩微元受力分析示意图

Fig. 2 Analysis of pile element

### 1.3 基桩受力与变形计算

方程式 (6) 为一变系数四阶常微分方程, 可采用幂级数法联合边界条件对其进行求解。设方程解答为

$$x = \sum_{i=0}^n a_i z^i \quad , \quad (7)$$

式中,  $a_i (i=0 \sim n)$  为待定系数。

求解可得基桩水平位移、转角、弯矩及剪力沿深度方向的表达式为

$$\begin{cases} x_z = \frac{Q}{\alpha^3 EI} A_x + \frac{M}{\alpha^2 EI} B_x \\ \varphi_z = \frac{Q}{\alpha^2 EI} A_\varphi + \frac{M}{\alpha EI} B_\varphi \\ M_z = \frac{Q}{\alpha} A_M + M B_M \\ Q_z = Q A_Q + \alpha M B_Q \end{cases} \quad , \quad (8)$$

式中,  $A_x$ ,  $B_x$ ,  $A_\varphi$ ,  $B_\varphi$ ,  $A_M$ ,  $B_M$ ,  $A_Q$  及  $B_Q$  均为无量纲系数, 具体可编制相应的程序进行求解计算, 限于篇幅这里不再详述。

## 2 桩柱式桥梁基桩水平变形可靠性分析

### 2.1 功能函数方程建立

由前述可知, 影响山区桩柱式桥梁基桩水平受力与变形的因素非常多且极其复杂, 为便于分析, 往往选取一些比较重要的设计指标作为可靠度计算的随机变量, 如: 桩长  $l$ , 桩径  $d$ , 桩身抗弯刚度  $EI$ , 地基抗力比例系数  $m$ , 桩顶水平荷载  $Q$ , 桩顶偏心弯矩  $M$ 。上述影响因子中变异系数较大的可作为基桩水平变形可靠性分析的基本随机变量  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ , 其对应的随机向量为:  $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ , 则基桩水平变形  $x$  与各随机变量间的关系式为

$$x = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad . \quad (9)$$

### 2.2 基于验算点法的基桩水平变形可靠度计算

设桩柱式桥梁基桩桩顶水平变形容许值为  $[x]$ , 则其极限状态方程可表示为

$$Z = g(X) = [x] - x \quad , \quad (10)$$

即,

$$Z = [x] - f(X) = [x] - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad . \quad (11)$$

将式 (11) 在设计验算点  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$  处按照 Taylor 级数展开, 并取其中的一次项可得

$$Z = g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^*} (x_i - x_i^*) \quad , \quad (12)$$

式中,  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$  表示功能函数对  $x_i$  的一阶导数, 考虑到功能函数的复杂性, 本文采用差分法计算  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ 。

由于设计验算点位于失效边界上, 因而有

$$g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad , \quad (13)$$

则  $Z$  的均值和方差分别为

$$\mu_z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^*} (\mu_{x_i} - x_i^*) \quad , \quad (14)$$

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sigma_{x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^*} \right)^2 \quad , \quad (15)$$

则敏感度系数  $\alpha_i$  为

$$\alpha_i = -\sigma_{x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^*} / \sigma_z \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad , \quad (16)$$

于是  $Z$  标准差可写为

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_{x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^*} \quad , \quad (17)$$

式中, 在已知变量方差的情况下,  $\alpha_i$  可以完全由  $x$  确定, 且当  $-1 \leq \alpha_i \leq 1$  时, 有

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1 \quad . \quad (18)$$

根据可靠度指标的定义得到其计算式为

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \sum_{i=1}^n (\mu_{x_i} - x_i^*) \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^*} / \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_{x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x^*} \right) \quad , \quad (19)$$

式中,

$$x_i^* = \mu_{x_i} - \alpha_i \beta \sigma_{x_i} \quad . \quad (20)$$

若  $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$  为任意分布的随机变量, 则可将其转换成当量正态分布随机变量, 其转换式为

$$\begin{cases} \mu_{x_i}^* = X_{x_i}^* - \Phi^{-1}[F_{x_i}(X_i^*)] \sigma_{x_i}^* \\ \sigma_{x_i}^* = \phi\{\Phi^{-1}[F_{x_i}(X_i^*)]\} / f_{x_i}(X_i^*) \end{cases} \quad . \quad (21)$$

式中  $\Phi(\cdot)$ ,  $\Phi^{-1}(\cdot)$  分别为标准正态分布概率密度函数及其反函数;  $F_{x_i}(X_i^*)$  为在设计验算点处变量  $X_i^*$  的概率分布函数值;  $f_{x_i}(X_i^*)$  为在设计验算点处变量  $X_i^*$

的概率密度函数值。

由式(19)可以得到失效概率  $P_f$  为

$$P_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (22)$$

### 3 算例验证

为验证本文计算方法的可行性, 现以文献[12]中的桥梁工程桩为算例进行可靠度指标及失效概率的计算与分析。该桥基本概况为: 基桩冲刷线以上墩柱高度  $l_0$  为 30.12 m, 柱身直径为 1.8 m, 弹性模量为 23 GPa; 基桩自由段长度为 22.2 m, 桩径平均值为 2.2 m, 弹性模量平均值为 26 GPa; 基桩入土段长度为 42.1 m, 地基抗力比例系数  $m=20 \text{ MN/m}^4$ 。柱顶容许最大水平位移  $[x]=300 \text{ mm}$ , 其他参数统计值如表 1 所示。

表 1 桩土计算指标统计值

Table 1 Statistical values of pile and soil

参数名称	均值	方差	分布形式
桩径 $d/\text{m}$	2.2	0.11	正态分布
桩身弹性模量 $E/\text{GPa}$	26.0	78.00	正态分布
桩顶横向荷载 $Q/\text{kN}$	165.0	24.75	正态分布
地基抗力比例系数 $m/(\text{MN}\cdot\text{m}^4)$	20.0	4.50	正态分布

假设上述桩土计算值均服从标准正态分布, 且各参数之间相互独立。根据表 1, 可将墩柱高度  $l_0$ , 柱子直径, 柱身弹性模量, 地基抗力比例系数  $m$  及桩顶弯矩  $M$  看成是确定参数, 而将桩径  $d$ , 桩顶水平荷载  $Q$ , 桩身弹性模量  $E$ , 地基抗力比例系数  $m$  看成是随机变量, 从而可以得到如下随机向量:

$$X = (d, Q, E, m) \quad (23)$$

从而可建立基桩水平变形可靠度计算的极限状态方程式:

$$Z = g(X) = 300 - f(d, Q, E, m) \quad (24)$$

设收敛条件为  $\varepsilon = 0.005$ , 计算得到的可靠度指标如表 2 所示。

表 2 计算结果对比表

Table 2 Comparison among calculated results

计算方法	可靠度	失效概率	相对误差
	指标	$P_f/10^{-4}$	/%
蒙特卡罗法	3.712	1.028	—
响应面法 <sup>[12]</sup>	3.683	1.153	3.11
验算点法	3.642	1.162	2.35

由表 2 可知, 利用本文验算点法计算得到的可靠度指标、失效概率值均与蒙特卡罗法及文献[12]响应面法计算结果吻合较好, 验证了利用验算点法分析桩柱式桥梁基桩水平变形可靠性是合理可行的; 与响应面法相比, 验算点法的计算精度较高, 但计算效率欠佳; 与蒙特卡罗法相比, 验算点法的计算效率具有显

著优势。因此, 在实际工程中, 应从计算精度和效率方面选择更加符合实际要求的计算方法。

### 4 结 论

(1) 本文分析了山区桩柱式桥梁基桩的承载特性, 建立了相应的简化受力模型及挠曲微分方程, 并对其进行求解得到了基桩内力与位移计算的表达式。

(2) 分析了影响山区桩柱式桥梁基桩水平变形的主要因素, 建立了桩柱式桥梁基桩水平变形可靠度计算极限状态方程, 并借助验算点法对其进行求解, 得到了基桩水平变形可靠度指标及失效概率指标的计算表达式。

(3) 以某桥梁基桩为例, 利用本文方法对该基桩的可靠度指标及失效概率进行了计算, 对比分析表明, 本文方法与改进响应面法及蒙特卡罗法所得计算结果均吻合较好, 验证了本文计算方法的可行性。

### 参考文献:

- [1] 尹平保, 赵明华, 杨明辉, 等. 考虑  $P\Delta$  效应的陡坡段桥梁双桩结构受力分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2012, 39(1): 1 - 6. (YIN Ping-bao, ZHAO Ming-hua, YANG Ming-hui, et al. Force analysis of bridge double-pile in high and steep slope with consideration of  $P\Delta$  effect[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2012, 39(1): 1 - 6. (in Chinese))
- [2] 冯忠居. 特殊地区基础工程[M]. 北京: 人民交通出版社, 2008. (FENG Zhong-ju. Foundation engineering in special areas[M]. Beijing: China Communication Press, 2008. (in Chinese))
- [3] 赵明华, 尹平保, 杨明辉, 等. 高陡斜坡上桥梁桩基受力特性及影响因素分析[J]. 中南大学学报, 2012, 43(7): 2733 - 2739. (ZHAO Ming-hua, YIN Ping-bao, YANG Ming-hui, et al. The analysis of influence factors and mechanical characteristics of bridge piles in high and steep slopes[J]. Journal of Central South University, 2012, 43(7): 2733 - 2739. (in Chinese))
- [4] Poulos H G, Davis E H. Pile foundation analysis and design[M]. New York: Chichester Bissbano Toronto, 1980.
- [5] Meyerhof G G, Mathur S K, Valsnagkar A J. The bearing capacity of rigid piles and pile groups under inclined loads in layered sand[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1981, 18(4): 514 - 519.
- [6] 赵明华, 张玲, 刘建华. 公路桥梁嵌岩桩嵌岩深度计算[J]. 中南公路工程, 2007, 32(1): 1 - 4. (ZHAO Ming-hua, ZHANG Ling, LIU Jian-hua. Calculation methods for

- socketed length of rock-socketed pile[J]. Journal of Central South Highway Engineering, 2007, 32(1): 1 - 4. (in Chinese))
- [7] 张 玲, 赵明华, 赵 衡. 双层地基水平受荷桩受力变形分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(增刊 2): 302 - 306. (ZHANG Ling, ZHAO Ming-hua, ZHAO Heng. Analysis of a laterally loaded pile in a two-layer soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(S2): 302 - 306. (in Chinese))
- [8] 吴恒立. 推力桩计算方法的研究[J]. 土木工程学报, 1995, 28(2): 20 - 28. (WU Heng-li. Study on calculation method of laterally loaded pile[J]. China Civil Engineering Journal, 1995, 28(2): 20 - 28. (in Chinese))
- [9] 陈仁朋, 顾 明, 孔令刚, 等. 水平循环荷载下高桩基础受力性状模型试验研究[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(11): 1990 - 1996. (CHEN Ren-peng, GU Ming, KONG Ling-gang, et al. Large-scale model tests on high-rise platform pile groups under cyclic lateral loads[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(11): 1990 - 1996. (in Chinese))
- [10] RONOLD K O, BYSVEEN S. Probabilistic stability analysis for deep-water foundation[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1992, 118(3): 394 - 405.
- [11] 赵明华, 曾昭宇, 苏永华. 改进响应面法及其在倾斜荷载桩可靠度分析中的应用[J]. 岩土力学, 2007, 28(12): 2539 - 2542. (ZHAO Ming-hua, ZENG Zhao-yu, SU Yong-hua. Improved response surface method and its application to Reliability analysis of piles under inclined loads[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(12): 2539 - 2542. (in Chinese))
- [12] 曾昭宇. 倾斜荷载下基桩的可靠度分析[D]. 长沙: 湖南大学, 2006. (ZENG Zhao-yu. Reliability analysis of pile under inclined load[D]. Changsha: Hunan University, 2006. (in Chinese))
- [13] 孙 安. 管桩水平承载力可靠度分析[D]. 杭州: 浙江大学, 2011. (SUN An. Reliability analysis of horizontal bearing capacity of pipe pile[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2011. (in Chinese))
- [14] 黄 然. 水平力作用下架空直立式码头桩基可靠性分析[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2012, 31(1): 116 - 120. (HUANG Ran. Reliability analysis of overhead vertical pier on horizontal loading[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science), 2012, 31(1): 116 - 120. (in Chinese))
- [15] JTGD63—2007 公路桥涵地基与基础设计规范[S]. 北京: 人民交通出版社, 2007. (JTGD63—2007 Code for design of ground base and foundation of highway bridges and culverts[S]. Beijing: China Communications Press, 2007. (in Chinese))
- [16] 赵明华. 桥梁桩基计算与检测[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000. (ZHAO Ming-hua. Calculating and detecting for bridge piles[M]. Beijing: China Communications Press, 2000. (in Chinese))
- [17] 曹文贵, 李 鹏, 赵明华. 多层地基横向受荷桩简化分析方法的改进与探讨[J]. 公路, 2005(4): 38 - 42. (CAO Wen-gui, LI Peng, ZHAO Ming-hua. Improvement and discussion of simply analyzed method of laterally loaded piles in multi-grade[J]. Highway, 2005(4): 38 - 42. (in Chinese))

(本文责编 黄贤沙)