

DOI: 10.11779/CJGE2015S1008

SMP 面应力状态图解法

祝恩阳¹, 姚仰平², 朱建明¹

(1. 北方工业大学, 北京 100144; 2. 北京航空航天大学, 北京 100191)

摘要: 空间滑动面强度准则(SMP准则)根据实体空间的 SMP 平面上应力状态判断确定试样是否破坏。该准则在三轴压缩和三轴拉伸情况下退化为 Mohr-Coulomb 强度准则。通过对实体单元的应力状态分析, 讨论了 SMP 平面的空间位置以及 SMP 平面上应力状态, 详细分析了 SMP 平面上应力状态点在三向应力莫尔圆中的图解方法。

关键词: SMP 准则; 应力状态; 应力莫尔圆; 剪切破坏面; 图解法

中图分类号: TU443 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2015)S1-0036-05

作者简介: 祝恩阳(1983-), 男, 博士, 讲师, 主要从事岩土本构理论的教学与研究。E-mail: zhuenyang@ncut.edu.cn。

Graphic method of SMP stress state

ZHU En-yang¹, YAO Yang-ping², ZHU Jian-ming¹

(1. School of Civil Engineering, North China University of Technology, Beijing 100144, China; 2. School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: According to the SMP criterion, the ratio of shear stress to normal stress on SMP plane in entity space is employed to determine whether or not the soil sample is damaged. Under triaxial compression and triaxial extension conditions, the SMP criterion degrades to the Mohr-Coulomb one. By analyzing the stress state of a general plane in a cubic soil element under three principle stresses, the location of SMP plane is discussed, and the stress state of the SMP plane is also deduced. After these, the determination procedure of SMP state point in Mohr's stress circle is introduced.

Key words: SMP criterion; stress state; Mohr's circle; shear failure envelope; graphic method

0 引言

Mohr-Coulomb 准则是描述摩擦材料的经典强度准则。它认为: 土单元内任意平面上的剪应力 τ 与正应力 σ 比值 (τ/σ) 的最大值达到内摩擦角 φ 的正切时, 土单元则沿该面发生剪切破坏^[1]:

$$(\tau/\sigma)_{\max} = \tan\varphi \quad . \quad (1)$$

式(1)所描述的最大应力比平面在 $\sigma - \tau$ 坐标中对应图 1(a)中的点 K_1 。若将式(1)写成主应力 σ_1 , σ_2 , σ_3 表达的形式, 并默认 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 则可表示为

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_3}} = \tan\varphi \quad . \quad (2)$$

Mohr-Coulomb 准则源于摩擦的基本原理, 认为某平面的剪切强度与该平面上的正应力成正比例。Mohr-Coulomb 准则在一定程度上, 特别是在正应力相对较小且变化不大的情况下能较好地反映摩擦材料的强度特性。而式(2)表明, Mohr-Coulomb 准则没有考虑中主应力 σ_2 的影响。

针对此, Matsuoka 等^[2-3]中主应力 σ_2 引入强度准则, 提出了适用于摩擦材料的空间滑动面强度准则, 即 SMP 准则 (spatially mobilized plane)。相比于

Mohr-Coulomb 准则仅依最大主应力 σ_1 与最小主应力 σ_3 的差异来判断材料是否破坏并建立强度准则, SMP 准则将其扩展为考虑 σ_1 , σ_2 , σ_3 三个主应力间两两的差异建立强度准则:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_3}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2\sqrt{\sigma_2\sigma_3}} \right)^2} = \tan\varphi \quad . \quad (3)$$

值得关注的是: 式(3)表述的 SMP 准则在 $\sigma_2 = \sigma_3$ 或 $\sigma_2 = \sigma_1$ 时退化为式(2)表述的 Mohr-Coulomb 准则。或者说 Mohr-Coulomb 准则是 SMP 准则在三轴压缩 ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) 或三轴拉伸 ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$) 时的特例。围绕 SMP 准则, 许多学者进行了相关的研究^[4-11]。

与 Mohr-Coulomb 准则表述式(1)类似, SMP 准则式(3)也描述了当空间某一平面上的剪应力与正应力的比值达到某一材料常数时试样发生剪切破坏, 这个空间的平面就是 SMP 平面。SMP 平面上的剪应力 τ_{SMP} 与正应力 σ_{SMP} 之比 $(\tau_{\text{SMP}}/\sigma_{\text{SMP}})$ 达到 SMP 摩擦角 φ_{SMP} 的正切时, 土单元破坏, 表示为

$$(\tau_{\text{SMP}} / \sigma_{\text{SMP}}) = \tan \varphi_{\text{SMP}} \quad . \quad (4)$$

式(4)所描述 SMP 平面上的应力状态在 $\sigma - \tau$ 坐标中对应图 1(b) 中的点 K_2 。

SMP 平面在实体空间是怎样一个平面? 图 1(b) 中的点 K_2 又是如何确定出来的, 本文将对此进行详细讨论。

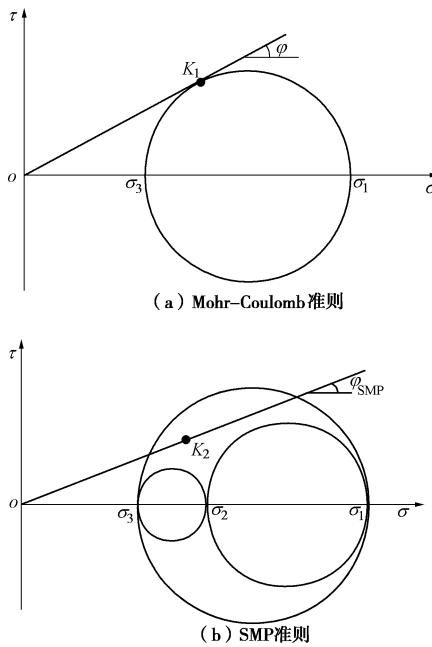


图 1 Mohr-Coulomb 准则与 SMP 准则的应力圆表示

Fig. 1 Indication of Mohr-Coulomb criterion and SMP criterion in stress circle

1 SMP 平面及 SMP 应力

取实体空间 $x - y - z$ 直角坐标系中的立方单元体进行分析。如图 2 所示, 令 x , y , z 方向分别作用有主应力 σ_1 , σ_2 , σ_3 且该立方单元体此时因达到 SMP 破坏准则而发生剪切破坏。

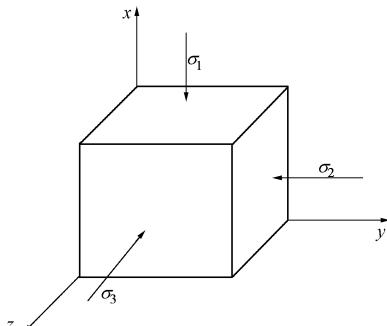


图 2 受三向主应力的立方体单元

Fig. 2 A cubic element under three principal stresses

当仅考虑应力 σ_2 与 σ_3 的作用, 应力比最大值 $(\tau/\sigma)_{\max} = \tan \alpha_{23}$ 所在的平面垂直于 σ_1 作用面并与 σ_2 作用面成 $\theta_{23} = (45^\circ + \alpha_{23}/2)$ 的夹角。该平面上应力状态如图 3 中的点 P_1 。根据几何关系亦可知该平面在 σ_2

作用面与 σ_3 作用面上的投影比例为 $\sqrt{\sigma_3/\sigma_2}$, 即图 3 中 $|OA_1|:|OB_1| = \sqrt{\sigma_3/\sigma_2}$ 。

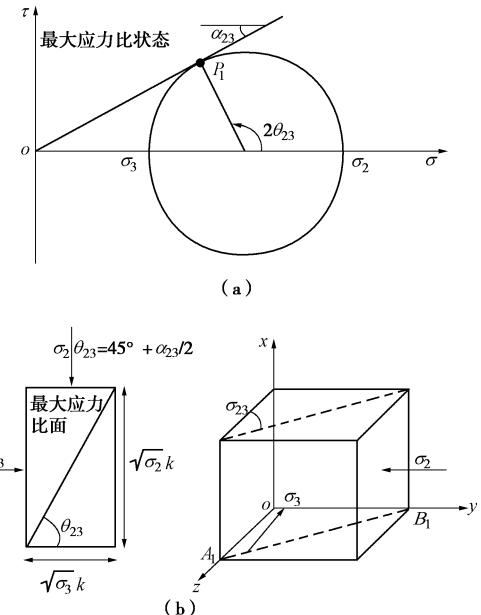


图 3 应力 σ_2 与 σ_3 作用下的最大应力比面

Fig. 3 Maximum stress ratio plane under stresses σ_2 and σ_3

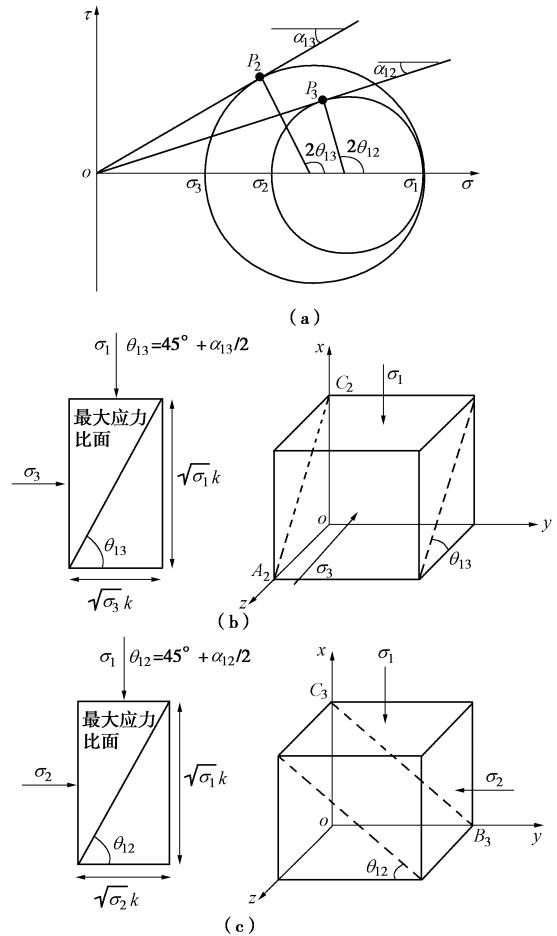


图 4 应力 σ_1 与 σ_3 以及应力 σ_1 与 σ_2 作用下的最大应力比面

Fig. 4 Maximum stress ratio planes under stresses σ_1 and σ_3 and maximum stress ratio plane under stresses σ_1 and σ_2

相仿, 当仅考虑应力 σ_1 与 σ_3 的作用, 应力比最大值 $(\tau/\sigma)_{\max} = \tan\alpha_{13}$ 所在的平面垂直于 σ_2 作用面并与 σ_1 作用面成 $\theta_{13} = (45^\circ + \alpha_{13}/2)$ 的夹角。该平面上应力状态如图 4 中的点 P_2 。根据几何关系亦可知该平面在 σ_1 作用面与 σ_3 作用面上的投影比例为 $\sqrt{\sigma_3/\sigma_1}$, 即图 4 中 $|OA_2| : |OC_2| = \sqrt{\sigma_3/\sigma_1}$ 。同样, 当仅考虑应力 σ_1 与 σ_2 的作用, 应力比最大值 $(\tau/\sigma)_{\max} = \tan\alpha_{12}$ 所在的平面垂直于 σ_3 作用面并与 σ_1 作用面成 $\theta_{12} = (45^\circ + \alpha_{12}/2)$ 的夹角。该平面上应力状态如图 4 中的点 P_3 。根据几何关系亦可知该平面在 σ_1 作用面与 σ_2 作用面上的投影比例为 $\sqrt{\sigma_2/\sigma_1}$, 即图 4 中 $|OB_3| : |OC_3| = \sqrt{\sigma_2/\sigma_1}$ 。

至此, 在仅考虑 3 个主应力中任意两个作用的情况下, 可以得到 σ_2 与 σ_3 作用下 yoz 平面上的最大应力比方位线 A_1B_1 ; σ_1 与 σ_3 作用下 xoz 平面上的最大应力比方位线 A_2C_2 ; σ_1 与 σ_2 作用下 xoy 平面上的最大应力比方位线 B_3C_3 。如果在 yoz 平面取 A_1B_1 的某条恰当平行线 AB , 在 xoz 平面取 A_2C_2 的某条恰当平行线 AC , 在 xoy 平面取 B_3C_3 的某条恰当平行线 BC , 则一定能形成一个如图 5 中所示的 ABC 平面。显而易见, 平面 ABC 在坐标轴 x , y , z 上的截距 $|OC|$, $|OB|$, $|OA|$ 比例为

$$|OC| : |OB| : |OA| = \sqrt{\sigma_1} : \sqrt{\sigma_2} : \sqrt{\sigma_3}, \quad (5)$$

称平面 ABC 为 SMP 平面。很显然, SMP 平面的空间位置与剪切破坏时的应力状态相关。

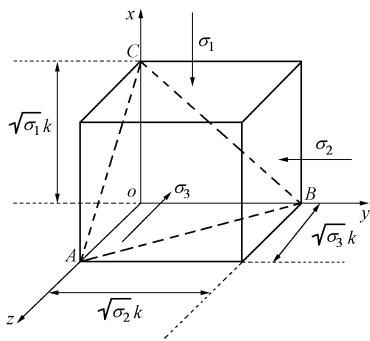


图 5 SMP 平面

Fig. 5 SMP plane

令 (l, m, n) 表示 SMP 平面的单位法向向量, 则据式 (5) 可计算得

$$\begin{cases} l = \sqrt{I_3} / \sqrt{\sigma_1 I_2}, \\ m = \sqrt{I_3} / \sqrt{\sigma_2 I_2}, \\ n = \sqrt{I_3} / \sqrt{\sigma_3 I_2}. \end{cases} \quad (6)$$

式中, $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, $I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$, $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 。根据式 (6), 可计算得到 SMP 平面上的正应力 σ_{SMP} 和剪应力 τ_{SMP} :

$$\begin{cases} \sigma_{SMP} = 3I_3/I_2, \\ \tau_{SMP} = \sqrt{I_1 I_2 I_3 - 9I_3^2} / I_2. \end{cases} \quad (7)$$

将式 (7) 代入式 (4) 并考虑式 (3) 得到

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \tan\varphi = \tan\varphi_{SMP}, \quad (8)$$

可见 $\tan\varphi > \tan\varphi_{SMP}$ 。

2 SMP 应力状态的图解法

前一节已明确了 SMP 平面的空间位置以及 SMP 平面上的正应力 σ_{SMP} 和剪应力 τ_{SMP} 。那么, 如何在三向应力圆中通过作图得到 SMP 应力状态 $(\sigma_{SMP}, \tau_{SMP})$, 教科书中较少给出, 本节将对此进行详细介绍。

在图 5 的单元体中切出 $abcd - a'b'c'd'$ 立方单元 (图 6), 使平面 $abb'a'$ 平行于线 AB 并垂直于 yoz 平面。故平面 $abb'a'$ 上的应力状态不受沿 x 轴方向作用的应力 σ_1 影响, 在图 3 中表示为点 P_1 所对应的应力状态。该面上的正应力 σ_{01} , 剪应力 τ_{01} 分别表示为:

$$\begin{cases} \sigma_{01} = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \cdot \sin\alpha_{23}, \\ \tau_{01} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \cdot \cos\alpha_{23}. \end{cases} \quad (9)$$

根据图 5 可知, SMP 平面是过直线 AB 的所有平面中的某一个平面, 也就是过直线 ab 的某一平面。将过直线 ab 的任一平面以平面 $abfe$ 表示, 该平面与平面 $abcd$ 夹角为 θ 。显然平面 $abfe$ 上的应力状态与 θ 大小相关。在图 6 中取楔形单元 $ade - bcf$ 为对象列平衡方程, 可得到受 θ 影响的平面 $abfe$ 上的正应力 σ 和剪应力 τ (图 7 所示):

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_{01}) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_{01}) \cdot \cos 2\theta, \\ \tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_{01}}{2}\right)^2 \sin^2 2\theta + \tau_{01}^2 \cdot \sin^2 \theta}. \end{cases} \quad (10)$$

对式 (10) 运算, 以消去参量 θ , 可得平面 $abfe$ 上的应力状态 (σ, τ) 满足方程

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma)(\sigma - \sigma_{01}) + \tau_{01}^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1 - \sigma_{01}}. \quad (11)$$

对方程 (11) 再整理, 可得到圆的标准方程:

$$(\sigma - a)^2 + \tau^2 = R^2 \quad (12)$$

其中,

$$\begin{cases} a = \frac{(\sigma_1^2 - \sigma_2 \sigma_3)(I_1 - \sigma_1)}{2(I_2 - 3\sigma_2 \sigma_3)}, \\ R = \frac{\sqrt{4I_3(I_1 - 3\sigma_1)(I_2 - 3\sigma_2 \sigma_3) + (I_1 - \sigma_1)^2(\sigma_1^2 - \sigma_2 \sigma_3)^2}}{2(I_2 - 3\sigma_2 \sigma_3)}. \end{cases} \quad (13)$$

根据式 (12) 可知: 平面 $abfe$ 上的应力状态 (σ, τ) 所

在的轨迹是一圆心位于 σ 轴并过点 $(\sigma_1, 0)$ 和点 $P_1(\sigma_{01}, \tau_{01})$ 的圆。也就是说 SMP 平面上的应力状态 $(\sigma_{SMP}, \tau_{SMP})$ 就在式 (12) 所描绘的圆形轨迹上(图 8 中过点 P_1 的虚线圆弧)。按照完全相同的思路可知: SMP 平面上的应力状态 $(\sigma_{SMP}, \tau_{SMP})$ 也在圆心位于 σ 轴并过 $(\sigma_3, 0)$ 和 $P_3(\sigma_{03}, \tau_{03})$ 的圆形轨迹上(图 8 中过点 P_3 的虚线圆弧); SMP 平面上的应力状态 $(\sigma_{SMP}, \tau_{SMP})$ 同时还在圆心位于 σ 轴并过 $(\sigma_2, 0)$ 和 $P_2(\sigma_{02}, \tau_{02})$ 的圆形轨迹上(图 8 中未标出)。

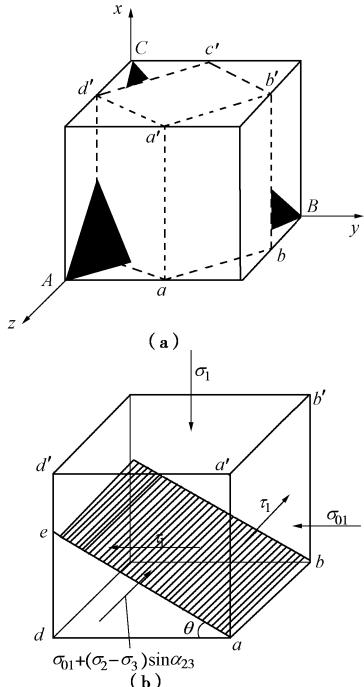
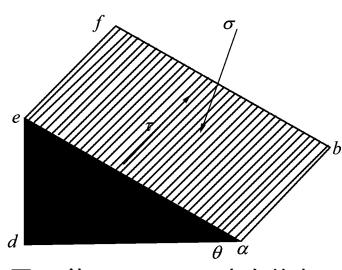
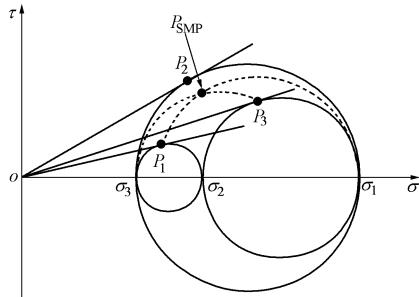
图 6 单元 $abcd - a'b'c'd'$ 及其应力状态Fig. 6 Element $abcd - a'b'c'd'$ and its stress state图 7 单元 $ade-bcf$ 应力状态Fig. 7 Stress state of element $ade-bcf$ 

图 8 SMP 应力状态点的确定

Fig. 8 Determination of SMP stress state on stress circle

基于以上讨论, 在三向应力圆中图解确定 SMP 平面上的应力状态 $(\sigma_{SMP}, \tau_{SMP})$, 只需如图 8 所示, 绘制过点 P_1 的虚线圆弧、过点 P_2 的虚线圆弧和过点 P_3 的虚线圆弧中的任意两个圆弧, 两圆弧的交点坐标即为应力状态 $(\sigma_{SMP}, \tau_{SMP})$, 如图 8 所示。

前文述及, 在三轴压缩和三轴拉伸时, SMP 准则退化为 Mohr-Coulomb 准则。这时 SMP 平面上的应力状态点 $(\sigma_{SMP}, \tau_{SMP})$ 在应力圆中又位于何处。

三轴压缩应力状态的土单元达到 SMP 准则破坏条件而发生剪切破坏。在 $\sigma - \tau$ 坐标中的三向应力圆中, 点 $(\sigma_3, 0)$ 与 $(\sigma_2, 0)$ 重合, 点 P_2 与 P_3 合成为一点, 点 P_1 与点 $(\sigma_3, 0)$ 重合。这种情况下, 过点 P_1 和点 $(\sigma_1, 0)$ 且圆心位于 σ 轴的圆弧、过点 P_2 和点 $(\sigma_2, 0)$ 且圆心位于 σ 轴的圆弧、以及过点 P_3 和点 $(\sigma_3, 0)$ 且圆心位于 σ 轴的圆弧, 3 段圆弧的公共部分如图 9 中的实线所示。此时最大应力比 $(\tau/\sigma)_{max} = \tan\varphi$ 状态点位于图 9 中点 $P_2(P_3)$ 。根据式 (4) 与 (8), 此时的 SMP 应力状态点位于图 9 中点 P_{SMP} 。

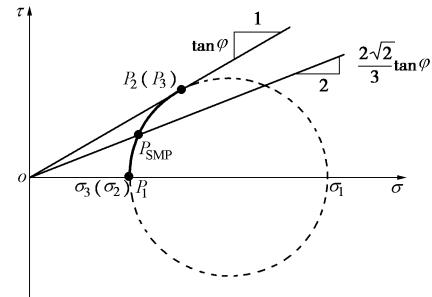


图 9 三轴压缩情况的 SMP 应力状态点

Fig. 9 SMP stress state under triaxial compression

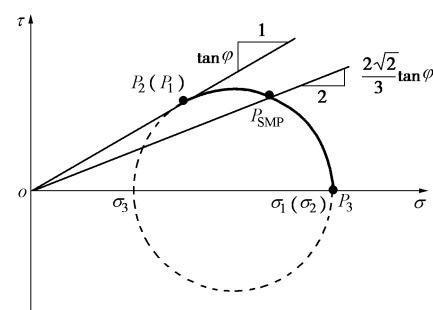


图 10 三轴拉伸情况的 SMP 应力状态点

Fig. 10 SMP stress state under triaxial extension

三轴拉伸应力状态的土单元达到 SMP 准则破坏条件而发生剪切破坏。在 $\sigma - \tau$ 坐标的三向应力圆中, 点 $(\sigma_1, 0)$ 与 $(\sigma_2, 0)$ 重合, 点 P_2 与 P_1 合成为一点, 点 P_3 与点 $(\sigma_1, 0)$ 重合。这种情况下, 过点 P_1 和点 $(\sigma_1, 0)$ 且圆心位于 σ 轴的圆弧、过点 P_2 和点 $(\sigma_2, 0)$ 且圆心位于 σ 轴的圆弧、以及过点 P_3 和点 $(\sigma_3, 0)$ 且圆心位于 σ 轴的圆弧, 3 段圆弧的公共部分如图 10 中的实线所示。

此时,最大应力比 $(\tau/\sigma)_{\max} = \tan\varphi$ 状态点位于图 10 中点 $P_2(P_1)$ 。根据式(4)与(8),此时的 SMP 应力状态点位于图 10 中点 P_{SMP} 。

3 结 论

根据 SMP 准则的数学表达,讨论了 SMP 面的空间位置、SMP 面上的应力状态及其图解方法,得出以下 3 点结论。

(1) SMP 准则根据 SMP 平面上的剪应力与正应力的比值来判断试样是否达到剪切破坏;

(2) 在三向主应力作用下,SMP 平面与任一主应力作用面的交线的方位表示:当仅有另外两主应力作用下的最大应力比平面所在方位;

(3) 在 $\sigma - \tau$ 坐标中图解 SMP 应力状态的具体步骤是:①过原点分别作三个应力圆的切线确定切点;②过任一主应力状态点和其余两主应力形成应力圆的切点作圆心位于 σ 轴上的圆弧 I;③过另一主应力状态点和其余两主应力形成应力圆的切点作圆心位于 σ 轴上的圆弧 II;④圆弧 I 与圆弧 II 的交点所对应的坐标即为 SMP 应力状态。

参 考 文 献:

- [1] 罗 汀, 姚仰平, 侯 伟. 土的本构关系[M]. 北京: 人民交通出版社, 2010: 34 - 37. (LUO Ting, YAO Yang-ping, HOU Wei. Soil constitutive models[M]. Beijing: China Communication Press, 2010: 34 - 37. (in Chinese))
- [2] MATSUOKA H, NAKAI T. Stress deformation and strength characteristics of soil under three difference principal stresses[C]// Proceedings of Japan Society of Civil Engineering, 1974: 5 - 70.
- [3] MATSUOKA H. On the significance of the “spatial mobilized plane”[J]. Soils and Foundations, 1976, **16**(1): 91 - 100.
- [4] MATSUOKA H, YAO Y P, SUN D A. The Cam-clay models revised by the SMP criterion[J]. Soils and Foundations, 1999, **39**(1): 81 - 95.
- [5] 赵 衡, 宋二祥, 徐 明. 基于推广 SMP 准则的边坡稳定性分析[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2012, **52**(2): 150 - 154. (ZHAO Heng, SONG Er-xiang, XU Ming. Slope stability analysis based on the extended SMP criterion[J]. Journal of Tsinghua University (Science & Technology), 2012, **52**(2): 150 - 154. (in Chinese))
- [6] 郝冬雪, 陈 榕, 许成顺, 等. 基于广义 SMP 准则及应力路径法的柱孔扩张分析[J]. 岩土力学, 2013, **34**(10): 2781 - 2789. (HAO Dong-xue, CHEN Rong, XU Cheng-shun, et al. Analysis of cylindrical cavity expansion based on extended SMP criterion and stress path approach[J]. Rock and Mechanics, 2013, **34**(10): 2781 - 2789. (in Chinese))
- [7] 江 强, 朱建明, 姚仰平. 基于 SMP 准则的土体三维应力状态土压力问题[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(增刊): 1415 - 1417. (JIANG Qiang, ZHU Jian-ming, YAO Yang-ping. Earth pressures of three-dimensional soil stress states based on SMP failure criterion[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(s): 1415 - 1417. (in Chinese))
- [8] 罗 汀, 姚仰平, 松岡元. 基于 SMP 准则的土的平面应变强度公式[J]. 岩土力学, 2000, **21**(4): 390 - 393. (LUO Ting, YAO Yang-ping, MATSUOKA H. Soil strength equation in plane strain based on SMP[J]. Rock and Mechanics, 2000, **21**(4): 390 - 393. (in Chinese))
- [9] 朱建明, 彭新坡, 徐金海. 基于 SMP 准则的衬砌隧道围岩抗力系数的计算[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(5): 700 - 704. (ZHU Jian-ming, PENG Xin-po, XU Jin-hai. Determination of rock resistant coefficient in lining tunnels based on SMP failure criterion[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(5): 700 - 704. (in Chinese))
- [10] 朱建明, 彭新坡, 姚仰平, 等. SMP 准则在计算煤柱极限强度中的应用[J]. 岩土力学, 2010, **31**(9): 2987 - 2990. (ZHU Jian-ming, PENG Xin-po, YAO Yang-ping, et al. Application of SMP failure criterion to computing limit strength of coal pillars[J]. Rock and Mechanics, 2010, **31**(9): 2987 - 2990. (in Chinese))
- [11] 吴创周, 杨德林, 李秋实. 弹脆塑性围岩应力和位移的广义 SMP 准则解[J]. 工程力学, 2013, **30**(8): 223 - 265. (WU Chuang-zhou, YANG De-lin, LI Qiu-shi. Perfect elastic-brittle-plastic solution of axisymmetric circular openings in rock mass on extended SMP criterion[J]. Engineering Mechanics, 2013, **30**(8): 223 - 265. (in Chinese))

(本文责编 孙振远)