

DOI: 10.11779/CJGE2015S1004

# 分形介质土力学理论

徐永福

(1. 上海交通大学土木工程系, 上海 200030; 2. 河海大学文天学院岩土工程研究所, 马鞍山 243000)

**摘要:** 根据粗粒土颗粒破碎的分形模型, 导出粗粒土颗粒破碎强度的尺寸效应, 修正颗粒破碎几率的 Weibull 模型和粗粒土的剪切强度公式; 根据黏土颗粒表面的分形模型, 导出黏土的膨胀变形和压缩变形的统一表达式, 建立分形介质土力学的理论框架。

**关键词:** 分形; 颗粒破碎; 表面分维; 压缩变形; 膨胀变形

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2015)S1-0016-05

**作者简介:** 徐永福(1967-), 男, 教授, 博士生导师, 从事分形介质力学、非饱和(特殊)土土力学和地基处理研究。

E-mail: yongfuxu@sjtu.edu.cn。

## Fractals in soil mechanics

XU Yong-fu

(1. Department of Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China; 2 Wentian College of Hohai University, Maanshan 243000, China)

**Abstract:** The tensile strength, crushing probability and shear strength are deduced from the fractal model for particle breakage of coarse soils. The swelling deformation and compression are derived from the surface fractal model for cohesive soils. The soil-water characteristic curve, effective stress and shear strength are derived from the surface fractal model for pore-size distribution of unsaturated soils.

**Key words:** fractal; particle breakage; surface fractal dimension; compressive deformation; swelling deformation

## 0 引言

土力学中土的分类根据颗粒粒径大小分为: 粗粒土(粒径 $>0.075$  mm), 细粒土(粒径 $<0.075$  mm), 细粒土根据矿物成分和颗粒粒径大小又分为粉土(粒径 $>0.02$  mm)和黏土(粒径 $<0.02$  mm)。粗粒土的压缩变形和剪切强度均由颗粒破碎引起的, 黏土的膨胀变形和压缩变形与黏土颗粒表面形态有关<sup>[1-4]</sup>。中间土的渗透性、剪切强度和压缩变形与孔隙分布有关, 如图1所示。中间土孔隙分布的分维与孔隙表面分维是有相同的数值和物理意义<sup>[2]</sup>。土力学里的压缩曲线、渗透系数、颗粒破碎强度的尺寸效应等都是经验公式, 没有合理的理论基础<sup>[5-7]</sup>。本文针对笔者的研究成果, 从颗粒破碎和黏土表面分形模型, 分别导出粗粒土的颗粒破碎强度、剪切强度和修正的 Weibull 理论, 及黏土膨胀变形和压缩变形。对于中间土孔隙分布的分形模型, 及由其导出的非饱和土的力学性质, 限于篇幅, 不作介绍。

## 1 粗粒土的剪切强度和压缩变形

粗粒土不同颗粒的破碎几率不相同, 主要取决于

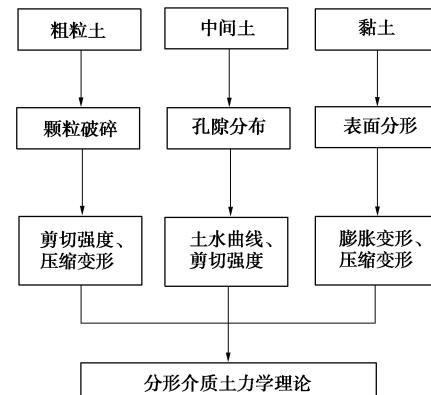


图1 分形介质土力学理论框架图

Fig. 1 Schematic illustration of fractal mechanics of soils

相邻颗粒的粒径。最容易破碎的颗粒是那些被相同粒径所包围和接触的颗粒<sup>[8]</sup>; 对于被等粒径小颗粒所包围和接触的大颗粒, 小颗粒将压力均匀分布在大颗粒的表面, 减小了大颗粒的内部张力, 大颗粒产生压缩破碎; 被等粒径大颗粒所包围和接触的小颗粒受到的压

基金项目: 国家自然科学基金项目(41272318, 41472251)

收稿日期: 2015-03-26

力均匀分布, 小颗粒是否破碎取决于接触应力。颗粒破碎的趋势是产生不等粒径的颗粒, 颗粒破碎产生的最终的结果是每个颗粒都没有一个与其粒径相同的相邻颗粒, 这种分布就是分形分布<sup>[9]</sup>。一旦颗粒破碎产生了分形的颗粒分布, 此后每个颗粒的破碎具有相同的破碎几率, 即分形的颗粒分布始终保持不变。

颗粒破碎可以用图 2 表示<sup>[11]</sup>。图 2 中白色小方块代表固体颗粒, 黑色小方块代表空隙。设一个尺寸为 1 的方块颗粒, 破碎成尺寸为 1/2 的颗粒, 如果颗粒是三维欧拉空间的块体, 破碎后形成 8 个次一级的小颗粒。分形颗粒中有空隙, 破碎后就不可能形成 8 个次一级小颗粒, 空隙个数与次一级小颗粒的个数的总和为 8, 假设有 2 个次一级小单元为空隙, 剩下的 6 个单元为次一级小颗粒; 尺寸为 1/2 的次一级小颗粒按照以上的规律继续破碎, 颗粒个数与颗粒直径间的关系表示为

$$N(d) = d^{-2.585} \quad (1)$$

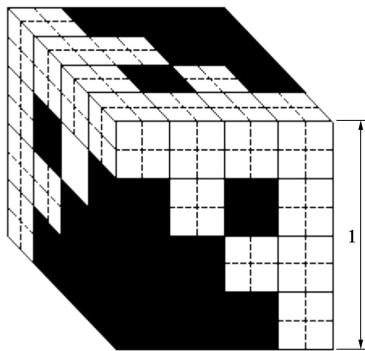


图 2 分形颗粒的破碎模型<sup>[11]</sup>

Fig. 2 Fractal model for particle breakage

分形分布的颗粒个数  $N$  与粒径  $d$  满足<sup>[12]</sup>

$$N(d) = d^{-D} \quad (2)$$

式中,  $D$  为颗粒粒径分布的分维, 颗粒粒径分布的分维介于 2.0~3.0 之间。更一般的情况下, 尺寸为  $d_1/b$  的单元的个数为  $b^w$ , 然后将这些小单元中的任意  $b^w(1-P)$  个移去, 这里  $b$  为比例系数,  $w$  为欧拉维数,  $P$  为颗粒破碎形成下一层次单元的概率。颗粒经过  $i$  次重复, 小单元尺寸变成  $d_i = d_1/b^{i-1}$ , 单元数  $N(b_i)$  计算如下:

$$N(b^i) = (pb^w)^i = (b^i)^{(w+\ln P/\ln b)} \quad (3)$$

颗粒粒径分布的分维为  $D = w + \ln P/\ln b$ 。

颗粒累计质量为

$$M \propto \int d^3 dN \propto d^\alpha \quad (4)$$

式中,  $\alpha = 3 - D$ 。颗粒质量与粒径在双对数坐标上是线性关系, 直线斜率为  $\alpha$ , 颗粒分布的分维为  $3 - \alpha$ 。

沿颗粒直径方向压缩, 颗粒出现与压缩方向垂直的拉伸破碎。颗粒压缩破碎的表观强度定义为

$$\sigma_f = F_f / A_{app} \quad (5)$$

式中,  $\sigma_f$  为破碎强度,  $F_f$  为破碎压力,  $A_{app}$  为垂直力  $F_f$  方向颗粒的截面面积。

$$A_{app} = kd^2 \quad (6)$$

式中,  $d$  为颗粒截面尺寸。由于颗粒中存在缺陷(裂隙、孔隙等), 固体颗粒是分形体, 表观破碎强度随颗粒尺寸变化, 随着颗粒尺寸减小, 破碎强度增大。三维情况下, 颗粒的分维为  $D$ , 二维平面情况下分维为  $D-1$ , 粒径为  $d$  颗粒的真实面积为

$$A_{real} = Cd^{D-1} \quad (7)$$

式中,  $A_{real}$  为颗粒截面的真实面积,  $C$  为常数,  $D$  为分维。固有破碎强度( $\sigma_f^*$ )定义为

$$\sigma_f^* = F_f / A_{real} \quad (8)$$

由式(5)和式(8), 颗粒破碎的表观强度与颗粒尺寸  $d$  的关系为

$$\sigma_f = \sigma_f^* d^{-\beta} \quad (9)$$

式中,  $\beta = 3 - D$ 。式(9)为颗粒破碎强度尺寸效应的分形模型。固有破碎强度是常数, 不随颗粒尺寸变化。固有破碎强度可由下式计算得到

$$\sigma_f^* = \left[ \sum_1^n (\sigma_{fi} / d_i^{D-3}) \right] / n \quad (10)$$

式中,  $n$  为总数,  $\sigma_{fi}$  为直径  $d_i$  颗粒的表观破碎强度。

Weibull<sup>[13]</sup>给出颗粒破碎几率为

$$P_f(\sigma) = (\sigma / \sigma_0)^m \quad (11)$$

式中,  $P_f(\sigma)$  为破碎机率,  $\sigma_0$  为粒径为  $d_0$  颗粒的破碎应力。由  $n$  个颗粒组成的集合体不破碎几率为

$$P_s(\sigma, n) = [1 - P_f(\sigma)]^n \quad (12)$$

将式(11)代入式(12)中, 同时考虑到当  $n \rightarrow \infty$  时, 有极限  $(1-x)^n = \exp(-nx)$ , 不破碎几率为

$$P_s(\sigma, n) = \exp[-n(\sigma / \sigma_0)^m] \quad (13)$$

分形颗粒集合体的颗粒数与尺寸的关系为<sup>[12]</sup>

$$n = (d / d_0)^D \quad (14)$$

式中,  $n$  为颗粒数,  $d$  为颗粒直径,  $d_0$  为最小颗粒的直径, 将式(14)代入式(13)得到

$$P_s(\sigma, n) = \exp[-(d / d_0)^D (\sigma / \sigma_0)^m] \quad (15)$$

如果破碎强度定义为直径为  $d$  的颗粒具有固定的破碎几率下的拉伸应力, 则可以得到

$$-(d / d_0)^D (\sigma / \sigma_0)^m = \text{const} \quad (16)$$

式中,  $\sigma_{f0}$  为直径为  $d_0$  颗粒的破碎强度, 破碎强度为

$$\sigma_f = \sigma_{f0} (d / d_0)^{-D/m} \quad (17)$$

比较式(9)和式(17)得到 Weibull 模量( $m$ ):

$$m = D / (3 - D) \quad (18)$$

将式(18)代入式(15)得到破碎机率的分形模型。

对于一维的压缩变形, 有效轴向应力为  $\bar{\sigma}$  和对应

的轴应变为  $\varepsilon$ ， McDowell 等给出<sup>[14]</sup>

$$\bar{\sigma}d\varepsilon^p = M(1+2K_0)\bar{\sigma}d\varepsilon^p/9 + \Gamma dS/[V_s(1+e)] \quad (19)$$

式中，  $K_0$  为静止土压力系数，  $K_0 \approx 1 - \sin \varphi$ ，  $\varphi$  为内摩擦角。将  $d\varepsilon^p = -d\varepsilon^p/(1+e)$  代入式 (19)，得

$$de^p = -\Gamma dS/[(1-\mu)\bar{\sigma}V_s] \quad (20)$$

式中，

$$\mu = 12 \sin \varphi (3 - 2 \sin \varphi) / [9(3 - \sin \varphi)] \quad (21)$$

对于分形分布而言，颗粒数与颗粒尺寸满足

$$N(L > d) = Ad^{-D} \quad (22)$$

式中，  $L$  和  $d$  表示颗粒直径，且有  $L > d$ ，  $D$  为颗粒分布的分维，  $A$  为比例常数，与加载性状无关。在某个压应力  $\bar{\sigma}$  下，颗粒最小粒径为  $d_s$ ，则

$$N(L > d_s) = Ad_s^{-D} \quad (23)$$

粒径大于  $d \sim (d + \delta d)$  的颗粒截面积增量  $\delta S$  为

$$\delta S = \beta d \delta N = \beta A D d^{-D-1} \delta d \quad (24)$$

式中，  $\beta = 2 + \sqrt{2}$  (正三角形颗粒)。颗粒总侧面积为

$$S(L > d_s) = \beta A D d_s^{2-D} / (D-2) \quad (25)$$

颗粒破碎的 Weibull 几率  $P_s$  为<sup>[14]</sup>

$$1 - P_f = \exp \left[ - \left( \frac{d_s}{d_0} \right)^3 \left( \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \right)^m \right] \quad (26)$$

式中  $P_f$  为颗粒的破碎几率；  $P_s$  为颗粒的存活几率；两者满足  $P_f = 1 - P_s$ ；  $d_0$  为颗粒的初始粒径；  $\bar{\sigma}_0$  为 37% 的砂存活下来、不破碎时的有效平均应力；  $m$  为 Weibull 模量；  $C$  为自由度；  $a$  为反映自由度对颗粒抗张强度影响的系数。由式 (26) 得到施加的应力与最小粒径之间的关系：

$$\frac{d_s^3 \bar{\sigma}^m}{d_0^3 \bar{\sigma}_0^m} = \ln \left( \frac{1}{1 - P_f} \right) = \eta \quad (27)$$

将式 (31) 代入式 (29) 得到

$$S(L > d_s) = \frac{\beta \eta^{(2-D)/2} A D}{D-2} d_0^{2-D} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \right)^{m(D-2)/2} \quad (28)$$

将式 (28) 代入式 (21)，孔隙比为

$$de^p = \frac{-\beta \eta^{(2-D)/2} \Gamma A (D-1) m d_0^{2-D}}{2(1-\mu) V_s} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \right)^{m(D-2)/2} \bar{\sigma} \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \quad (29)$$

粒径不大于  $d_0$  体积的微分为  $\delta V_s = 0.5 d^2 \delta N$ ，颗粒的体积  $V_s$  表示为

$$V_s (L \leq d_0) = A D_2 d_0^{3-D} / [2(3-D)] \quad (30)$$

将式 (30) 代入式 (29) 得到

$$de^p = -A \bar{\sigma}^{m(D-2)/2-1} d\bar{\sigma} / \bar{\sigma} \quad (31)$$

式中，  $A = \beta \eta^{(2-D)/2} (3-D) m \Gamma / [(1-\mu) d_0] \bar{\sigma}_0^{m(D-2)/2}$ 。式 (31) 是压缩曲线的分形模型。当  $D = 2/m + 2$ ，结合式 (18)，得到  $D=2$  时，有

$$de = -A d\bar{\sigma} / \bar{\sigma} \quad (32)$$

粗粒土的剪切试验中，剪切面附近的颗粒产生破碎，颗粒破碎后的分布符合分形模型。沿剪切破坏面将试样分开，如图3所示。图3中剪切面两侧颗粒犬牙交错，不是所有的颗粒都能接触，剪切面凹凸不平。接触点颗粒破碎后符合分形模型，颗粒接触面积与剪切面尺寸的关系为

$$N = \kappa_1 (L/r_0)^{D_p} \quad (33)$$

式中，  $N$  为颗粒接触点数目，  $L$  为剪切面尺寸，相当于图 3 中剪切破坏面的边长，  $D_p$  为剪切面上颗粒接触点分布分维。根据手指法则 (rules of thumb)，  $D_p$  与颗粒分布分维  $D$  的关系为<sup>[12]</sup>

$$D_p = D - 1 \quad (34)$$

如图 3 所示，在剪切面上的正应力  $\sigma_n$  由接触颗粒承担，由接触应力  $\sigma_c$  承担，

$$\sigma_n / \sigma_c = \kappa_1 (L/r_0)^{D-3} \quad (35)$$

颗粒间的摩擦力 ( $f_f$ ) 与竖向压力 ( $P$ ) 满足<sup>[15]</sup>

$$f_f = \kappa_2 P^{2/3} \quad (36)$$

式中，指数 2/3 是针对剪切表面，是二维平面。粗粒土的颗粒接触点不可能是二维平面，如图 3 所示，颗粒接触点是粗糙不平的分形体，分维为  $D$ ，颗粒接触点的摩擦力与竖向压力的关系为<sup>[16]</sup>

$$f_f = \kappa_2 P^{D/3} \quad (37)$$

在剪切面上，粗粒土的剪切强度为<sup>[16]</sup>

$$\tau_f = a \sigma_n^b \quad (38)$$

式中，  $a$  为与摩擦角有关的常数，  $b=2/3 \sim 1$ 。式 (38) 为剪切强度的分形模型。

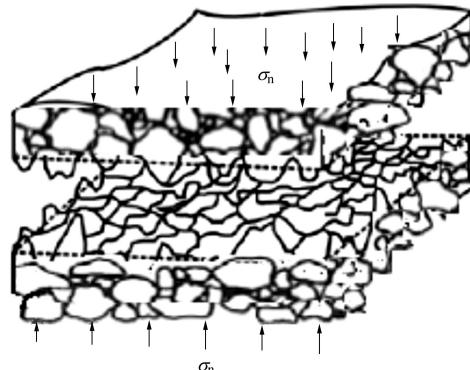


图 3 颗粒在剪切面上的接触情况

Fig. 3 Contact area of particles under vertical pressure

## 2 黏土的膨胀变形和压缩变形

黏土的膨胀变形过程就是吸水过程，黏土颗粒可以用板状结构体表示，如图 4 所示。黏土吸附水分布在黏土颗粒之间，撑开黏土颗粒，产生膨胀变形；当膨胀变形受到限制时，黏土中产生膨胀力。图 4 (a) 中，在吸水膨胀前，黏土颗粒的间距为  $L_0$ ，相当于半

个水分子的厚度；图 4 (b) 中，黏土吸水膨胀后，颗粒的间距为  $L$ ，相当于 12 个水分子的厚度。可见，黏土的膨胀变形与吸附水分子厚度密切相关，水分子厚度越大，膨胀变形越大。

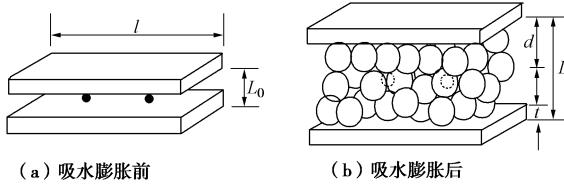


图 4 黏土吸水膨胀示意图

Fig. 4 Schematic illustration of swelling deformation

黏土颗粒的吸水厚度与颗粒表面特征有关。对于分形表面，表面积表示为<sup>[12]</sup>

$$S_p = Cr^{2-D_s} , \quad (39)$$

式中， $S_p$  为表面积， $C$  为常数， $D_s$  为表面的分维。

Avnir 等<sup>[17]</sup>提出了温吸附方程，黏土的吸附水体积与蒸汽压的相互关系为

$$V_w/V_m = k[\ln(P_0/P)]^{D_s-3} , \quad (40)$$

式中， $P$  为黏土在含水率  $w$ 、温度  $T$  条件下的平衡蒸气压， $P_0$  为  $T$  温度下纯水的平衡蒸气压。蒙脱石所吸收水分的体积可以由三相构成关系算出：

$$V_w = V_{v2}S_2 , \quad (41)$$

式中， $V_{v2}$  为膨胀后的孔隙体积， $V_{v2}=V_v+V_{sw}$ ， $V_v$  和  $V_{sw}$  分别为黏土膨胀前的孔隙体积和膨胀体积， $S_2$  为膨胀后的饱和度。 $V_m$ ， $V_{nm}$  和  $V_{sd}$  分别为蒙脱石、非膨胀黏土和砂的体积。黏土的膨胀力与含水率的相互关系满足等温吸附方程，含水率大于 10% 的黏土的膨胀力与含水率的相互关系为<sup>[18]</sup>

$$p_s = -RT/(M_w v_w) \ln(P/P_0) . \quad (42)$$

式中  $p_s$  为膨胀力； $R$  为莫尔气体常数； $T$  为绝对温度， $M_w$  为水分子莫尔质量， $v_w$  为水的比容。根据式 (40) 和 (42)，归一化吸水体积与膨胀力的关系为<sup>[19]</sup>

$$V_w/V_m = K[\ln(p/p_a)]^{D_s-3} . \quad (43)$$

据双电层理论，膨胀力是排斥力和吸引力之差：

$$p_s = f_r - f_a , \quad (44)$$

式中， $f_r$  为排斥力，相当于溶质吸力， $f_a$  为吸引力，是范德华力。根据式 (43) 和 (44) 可以算出  $K$  值<sup>[20]</sup>。

根据 Hamaker 方法确定，吸引力表示为

$$f_a = A_h / 6\pi \left[ 1/d^3 - 2/(d+t)^3 + 1/(d+2t)^3 \right] , \quad (45)$$

式中， $A_h$  为 Hamaker 常数 (J)， $d$  为颗粒间距的一半， $t$  为蒙脱石颗粒厚度 (图 4)。Bolt<sup>[21]</sup>根据 Gouy-Chapman 理论给出排斥力的表达式：

$$f_r = 2nkT(\cosh u_m - 1) . \quad (46)$$

式中  $k$  为 Boltzmann 常数 (J/K)， $T$  为温度 (K)， $n$  为孔隙水溶液中的离子浓度， $u_m$  为两个平行颗粒中间

点处的电势，表示为<sup>[22]</sup>

$$u_m = \sinh^{-1}[2 \sinh u_{m,\infty} + 4 \sinh(u_{h,\infty}/2)/\kappa d] , \quad (47)$$

$$u_{m,\infty} = 4 \tanh^{-1}[\exp(-\kappa d/2) \tanh(z/4)] , \quad (48a)$$

$$u_{h,\infty} = 4 \tanh^{-1}[\exp(-\kappa d) \tanh(z/4)] , \quad (48b)$$

$$\kappa = (2n_0v^2e^2/\varepsilon kT)^{1/2} , \quad (48c)$$

$$z = 2 \sinh^{-1}\{\sigma_0[1/(8\varepsilon n_0 kT)]^{1/2}\} . \quad (48d)$$

式中  $e$  为电荷； $v$  为交换阳离子化合价； $\varepsilon$  为孔隙水的介电常数 ( $C^2 J^{-1} m^{-1}$ )； $\sigma_0$  为表面电荷密度 ( $C/m^2$ )。

在图 4 中，黏土孔隙比表示为

$$e_m = (d - R_{ion})/(t + R_{ion}) , \quad (49)$$

式中， $e_m = V_w/V_m$ ， $R_{ion}$  为交换阳离子半径。交换阳离子化合价和交换阳离子半径分别表示为

$$v = \sum \text{EXC}_i v_i / \text{CEC} , \quad (50)$$

$$R_{ion} = \sum \text{EXC}_i R_i / \text{CEC} , \quad (51)$$

式中， $\text{EXC}_i$  为  $i$  离子交换量。联立式 (43) ~ (45)、(49)，算出式 (43) 中的  $K$  值，计算黏土的膨胀变形和膨胀力。

水中的黏土颗粒呈絮凝状平行排列，可用分形理论描述<sup>[23]</sup>。黏土颗粒平行排列的结构如图 4 所示。黏土的尺寸直接与平行颗粒间的距离有关。假定竖向压力  $p$  下土样的尺寸为  $L$ ，土样的初始粒径为  $L_0$ 。压力  $p$  下土样的总体积为

$$V = L^3 . \quad (52)$$

对于分形分布的黏土，土颗粒的体积可由颗粒的数量和初始体积决定：

$$V_s = NL_0^3 = (L/L_0)^D (L_0)^3 , \quad (53)$$

式中， $D$  为黏土絮凝块体的分维， $N$  为颗粒的数量。

由式 (52)、(53) 得到压力  $p$  下的比容  $v (=1+e_0)$ ：

$$v = (L/L_0)^{3-D} . \quad (54)$$

设初始状态下黏土颗粒是互相接触的，如图 4 中  $d=0$ 。所以， $L_0=nt$ ， $L=nt+(n-1)d$ ， $n$  是黏土颗粒数， $d$  为黏土颗粒间的距离， $t$  为黏土颗粒的厚度。考虑到  $n \gg 1$ ，式 (54) 改写为

$$v = [(d/t) + 1]^{3-D} , \quad (55)$$

式中， $d$  与黏土吸附水的体积有关，吸附水的体积由黏土的表面结构决定。如果黏土层的长为  $l$  宽为  $b$ ，吸收水的吸附体积与蒙脱石的吸附体积分别为

$$V_w = (n-1)dlb , \quad (56a)$$

$$V_m = ndlb . \quad (56b)$$

黏土吸水体积可以用式 (43) 表示，由式 (43)、(55) 和 (56) 得到比容 ( $v$ ) 与竖向压力的关系为

$$v = 1 + e = [1 + K(p/p_a)]^{D_s-3} , \quad (57)$$

式中引进大气压  $p_a$  的目的是使压应力无量纲化。式 (57) 为黏土初始压缩曲线 ( $e-p$ ) 的通用公式。

如果  $K(p/p_a)^{D_s-3} \gg 1$ , 式 (57) 可以简化为

$$v = M_1(p/p_a)^\eta, \quad (58)$$

式中,  $M_1 = K^{3-D}$ ,  $\eta = (D_s - 3)(3 - D)$ 。适用于高液限黏土。如果有  $K(p/p_s)^{D_s-3} \leq 1$ , 式 (55) 简写为

$$e \approx M_2(p/p_a)^\delta, \quad (59)$$

式中,  $M_2 = (3 - D)K$ ,  $\delta = D_s - 3$ 。式 (59) 适用于粉土、砂。

### 3 结语

本文主要总结了粗粒土颗粒破碎分形模型及由此导出的颗粒破碎强度尺寸效应、颗粒破碎机率、压缩曲线和剪切强度; 由黏土的表面分形模型导出的膨胀变形和压缩变形曲线。根据土结构的分形模型, 建立了分形介质土力学的基本理论框架。

### 参考文献:

- [1] XU Y F, SUN D A. Correlation of surface fractal dimension to frictional angle at critical state[J]. *Géotechnique*, 2005, **55**(9): 691 – 696.
- [2] XU Y F. Fractal approach to unsaturated shear strength[J]. *Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 2004, **3**: 264 – 274
- [3] XU Y F. Surface irregularity of solids in molecular domain[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, **21**(2): 435 – 444.
- [4] XU Y F, SUN D A. A fractal model for soil pores and its application to determination of water permeability[J]. *Physica A*, 2002, **316**(1/2/3/4): 56 – 64
- [5] XU Y F. Fractal model for compression of swelling clays[J]. *Mechanics Research Communication*, 2006, **2**: 206 – 216.
- [6] XU Y F. Calculation of unsaturated hydraulic conductivity using a fractal model for the pore-size distribution[J]. *Computer and Geotechnics*, 2004, **31**(7): 549 – 557
- [7] XU Y F. Explanation of scaling phenomenon based on fractal fragmentation[J]. *Mechanics Research Communication*, 2005, **32**: 209 – 220.
- [8] KING G C P, SAMMIS C G. The mechanisms of finite brittle strain[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 1992, **238**: 611 – 640.
- [9] SAMMIS C, KING G, BIEGEL R. The kinematics of gouge deformation[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 1987, **125**: 777 – 812.
- [10] XU Y F, XU J P, WANG J H. F. Fractal model for size effect on ice failure strength[J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2004, **40**: 135 – 144.
- [11] STEACY S J, SAMMIS C G. An automation for fractal patterns of fragmentation[J]. *Nature*, 1991, **353**: 250 – 251.
- [12] MANDELBROT B B. *The fractal geometry of nature*[M]. San Francisco: WH Freeman and Company, 1982.
- [13] WEIBULL W. A statistical distribution function of wide applicability[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1951, **18**: 293 – 297.
- [14] McDOWELL G R, BOLTON M D, ROBERTSON D. The fractal crushing of granular materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1996, **44**: 2079 – 2102.
- [15] MO Y F, TURNER K T, SZLUFARSKA I. Friction laws at the nanoscale[J]. *Nature*, 2009, **457**: 1116 – 1118.
- [16] XU Y F, XI Y, CHU F F. Method for shear strength of coarse granular materials based on fractal grain crushing[C]// IS-Cambridge. Cambridge, 2014.
- [17] AVNIR D, JARONIEC M. An isotherm equation for adsorption on fractal surfaces of heterogeneous porous materials[J]. *Langmuir*, 1989, **5**: 1431 – 1433.
- [18] KAHN G, KRAEHENBUEHL F, STOECKLI H F. Study of the water-bentonite system by vapour adsorption[J]. *Immersion Colorimetry and X-ray Technique. Clay Minerals*, 1990, **25**: 499 – 506
- [19] XU Y F, MATSUOKA H, SUN D A. Swelling characteristics of fractal-textured bentonite and its mixtures[J]. *Applied Clay Science*, 2003, **22**(4): 197 – 209
- [20] 徐永福, 项国圣, 褚飞飞, 等. 膨润土膨胀变形的分形模型[J]. *工程地质学报*, 2014, **22**(5): 785 – 791. (XU Yong-fu, XIANG Guo-sheng, CHU Fei-fei. Fractal model for swelling deformation of bentonite[J]. *Journal of Engineering Geology*, 2014, **22**(5): 785 – 791. (in Chinese))
- [21] BOLT G H. Physico-chemical analysis of the compressibility of pure clay[J]. *Géotechnique*, 1956, **6**(2): 86 – 93.
- [22] LIU L, NERETNIEKS I. Homo-interaction between parallel plates at constant charge[J]. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2008, **317**(1): 636 – 642.
- [23] XU Y F, JIANG H, CHU F F, et al. Fractal model for surface erosion of cohesive sediments[J]. *Fractals*, 2014. DOI: 10.1142/S0218348X14400064.

(本文责编 孙振远)