

DOI: 10.11779/CJGE201512019

考虑潜水的三维地下水流半解析数值方法

徐进¹, 王旭东², 陈征²

(1. 烟台大学土木工程学院, 山东 烟台 264005; 2. 南京工业大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210009)

摘要: 现有地下水半解析数值方法不能应用于潜水含水层的地下水流问题。为此, 基于 Neuman 模型提出了潜水非稳定流的半解析数值求解格式, 利用伽辽金法与正交解析函数族推了解耦形式的加权余量方程式。在编制 Fortran 计算程序实现数值求解的基础上, 利用已有解析解验证了方法及程序的正确性, 计算结果很好地反映了潜水完整井流具有的三维流动特性及潜水面滞后反应效应, 而且当忽略给水度时, 该方法可以退化为针对承压含水系统的已有成果。数值算例表明, 半解析数值方法适用于模拟包括潜水含水层、承压含水层及弱透水层的多层结构含水层系统的地下水流问题, 能够为可概化成层状含水系统的地下水开采及地面沉降等问题中三维水流模型的高效计算提供途径。

关键词: 半解析数值法; 潜水含水层; 地下水; 三维流

中图分类号: P641 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2015)12-2286-06

作者简介: 徐进(1982-), 男, 江苏盐城人, 博士, 讲师, 主要从事岩土工程数值计算方面的研究工作。E-mail: jinxu1031@163.com。

Semi-analytical numerical method for three-dimensional groundwater flow considering water-table response

XU Jin¹, WANG Xu-dong², CHEN Zheng²

(1. School of Civil Engineering, Yantai University, Yantai 264005, China; 2. Institute of Geotechnical Engineering, Nanjing Tech University, Nanjing 210009, China)

Abstract: The existing semi-analytical numerical method can not be used to simulate unconfined flow of groundwater. Therefore, a semi-analytical numerical approach for the problems of unsteady groundwater flow in unconfined aquifers is proposed by using the Neuman's model for the response of the water table, and the decoupled weighted residual equations are derived by means of the Galerkin's method and the orthogonality of the trigonometric series. A computer program is developed for the semi-analytical numerical analysis of three-dimensional groundwater flow in unconfined aquifers, and the validities of the present method and program are verified by comparisons with the existing analytical solutions. The three-dimensional pattern of unconfined flow due to a fully penetrating well and the delayed response of the water table are studied based on the numerical results. Moreover, the proposed method can be reduced to the existing method for confined flow if the specific yield of unconfined aquifers is ignored. Finally, the applicability of the semi-analytical numerical method for simulating the three-dimensional flow in the aquifer systems consisting of an unconfined aquifer, an aquitard and a confined aquifer is demonstrated through an additional numerical application. The proposed method can provide a high efficient approach for the three-dimensional simulation of groundwater flow and land subsidence due to groundwater withdrawal in layered aquifer systems.

Key words: semi-analytical numerical method; unconfined aquifer; groundwater; three-dimensional flow

0 引言

弱透水层各向异性等实际因素会使得当前普遍采用的“准三维”流模型出现模拟失真, 为了准确刻画地下水的运动状态, 有必要对弱透水层和含水层都采用三维流模型^[1-3]。由于绝大多数情形无法获得解析解, 三维模型的求解往往需要借助于数值手段。然而, 利用传统全局离散数值方法进行三维瞬态流模拟时, 存在着单元数多, 计算量大和效率低等问题。特别是

遇到非均质、各向异性多层含水系统时, 需要更加精细的网格剖分, 使得上述问题更为突出。为此, 一些学者致力于寻求新的地下水数值方法, 做到既节省计算工作量又保证计算精度, 以解决这些难题^[4-6]。

为了克服解析法的限制, 解决纯数值方法在三维

基金项目: 国家自然科学基金项目(41272303); 江苏省 2014 年度普通高校毕业生科研创新计划项目(KYXLX_0755)

收稿日期: 2014-10-22

流计算方面存在的求解困难, 同时旨在结合解析法与数值法的优点, 一些解析—数值混合计算方法得到发展。针对层状含水系统的瞬态三维井流问题, Hemker 提出了一种杂交解析数值方法, 其中径向流解析求解, 竖向速采用有限差分方法模拟^[7-8]。基于地下水流控制方程的解析解, Bakker 等提出了解析单元法, 并逐步推广到稳态三维非完整井流、层状含水系统三维流及辐射井问题^[9-11]。半解析数值方法是一种典型的解析—数值混合计算方法, 最早较多应用于岩土工程与结构工程的静动力分析问题^[12-14]。由于能够避免全局离散带来的过量单元数目, 同时有效降低计算工作量, 适用于可概化为层状含水层系统的地下水流问题, Stanley 等^[15]首先将半解析数值方法引入地下水计算领域, 提出了针对承压含水层 (简称承压层) 的有限层求解格式。随后, 该方法被进一步扩展到越流承压层、径向两层承压含水层系统甚至水平井的地下水问题^[16-18], 其计算优势得到进一步体现。潜水含水层 (简称潜水层) 是多层含水系统的重要组成部分, 潜水层中地下水渗流计算也一直是多个领域的重要课题^[19-20]。然而, 针对潜水的半解析数值方法目前未见报道。

本文提出考虑潜水的三维流半解析数值模拟方法, 基于 Neuman 模型推导相应求解格式, 给出解耦形式的整体半解析数值方程及层元系数矩阵、向量元素计算公式。据此编制相应计算程序, 通过算例对比分析验证本文方法的正确性和合理性。

1 数学模型

假设在包含潜水层的含水层系统中设置任意抽水形式开采地下水, 由质量守恒定律和 Darcy 定律, 考虑各向异性, 地下水三维非稳定流的控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial s}{\partial z} \right) + q(x, y, z, t) = S_s \frac{\partial s}{\partial t} \quad (1)$$

式中 $s(x, y, z, t)$ 为降深 (L); K_x, K_y, K_z 分别为 x, y 和 z 方向的渗透系数 (LT^{-1}); S_s 为贮水率 (L^{-1}); $q(x, y, z, t)$ 为源汇项 (T^{-1}), 表示单位时间从单位体积含水层中流入或流出的地下水体积, 包括入渗补给和抽水形式的抽、注水量, 源取为正值, 汇取为负值。

不失一般地, 设初始水位降深为零, 含水层系统底板视为隔水层, 在侧边界上考虑两类常用的齐次边界条件, 即定水头边界条件与隔水边界条件。Neuman^[19]将潜水面视为可移动的物质界面, 同时假设抽水期间潜水面降深与含水层厚度相比很小, 建立了其潜水非稳定流模型。该模型不涉及以往潜水数学模型中物理含义不明的滞后指数, 且能够考虑潜水面处的竖向补

给及含水层的弹性释水。根据 Neuman 潜水模型, 在潜水面位置处须满足如下关系:

$$K_z \frac{\partial s}{\partial z} + S_y \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

式中, S_y 为给水度, 该数值反映了潜水面发生单位降深时重力排水对含水层的补给强度, 量纲为 1。

2 求解格式

半解析数值方法避免三维全局网格剖分, 而是根据研究区域的物理力学特性与几何特征, 只沿特定方向进行离散。因此, 相比有限元等传统数值方法, 该方法的前处理十分简单。例如, 将厚度为 c 的含水层系统区域沿竖向 (z 方向) 离散成 L 个不同厚度和水文地质参数的层单元便形成本文的三维计算模型。

2.1 降深试探函数

根据这种离散形式, 降深在水平向 (x 和 y 方向) 采用二维解析函数表示, 在 z 方向上采用标准有限元的线性形函数, 将试探函数表示成解析与数值相结合的形式:

$$\tilde{s}(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{L+1} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_{mnj}(t) A_{mn}(x, y) N_j(z) \quad (3)$$

式中 $\tilde{s}(x, y, z, t)$ 为降深试探函数; $\phi_{mnj}(t)$ 为 t 时刻待求系数; $A_{mn}(x, y) = X_m(x) Y_n(y)$, $X_m(x)$, $Y_n(y)$ 分别为满足 x 方向和 y 方向含水层侧边界条件的已知解析函数族, 其选用应满足正交性和完备性; $N_j(z)$ 为 z 方向标准线性形函数; M, N 为级数项数。

针对定水头边界和隔水边界两类齐次边界条件, 分别提出如下地下水位降深试探函数^[16]:

(1) 定水头边界, $A_{mn}(x, y) = \sin k_m x \sin k_n y$, 试探函数可表示为

$$\tilde{s}(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{L+1} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{mnj}(t) \sin k_m x \sin k_n y \cdot N_j(z) \quad (4)$$

(2) 隔水边界, $A_{mn}(x, y) = \cos k_m x \cos k_n y$, 试探函数表示为

$$\tilde{s}(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{L+1} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \Phi_{mnj}(t) \cos k_m x \cos k_n y \cdot N_j(z) \quad (5)$$

式中, $k_m = m\pi/A$, $k_n = n\pi/B$, A, B 分别为计算区域沿 x 和 y 方向的长度。

2.2 潜水半解析数值方程

根据加权余量法, 选取三维形函数 $\omega_{m'n'}(x, y, z) = N_i(z) A_{m'n'}(x, y)$ 作为权函数, 可得到伽辽金方程式:

$$\iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \tilde{s}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \tilde{s}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \tilde{s}}{\partial z} \right) - S_s \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} + q \right\} N_i A_{m'n'} dx dy dz = 0$$

($i=1,2,\dots, L+1; m'=0,1,\dots, M; n'=0,1,\dots, N$)。(6)

将试探函数具体形式(4)或(5)代入式(6),根据解析函数族 $A_{mn}(x,y)$ 的正交性,只有当 $m=m'$ 和 $n=n'$ 时式中的积分项存在,从而实现式(6)的按级数项解耦,对应的第(m,n)项伽辽金方程式为

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{L+1} \left[\phi_{mnj} \int_0^c K_x N_i N_j dz \int_0^A \int_0^B \frac{\partial^2 A_{mn}}{\partial x^2} A_{mn} dx dy + \right. \\ & \left. \phi_{mnj} \int_0^c K_y N_i N_j dz \int_0^A \int_0^B \frac{\partial^2 A_{mn}}{\partial y^2} A_{mn} dx dy - \right. \\ & \left. \frac{d\phi_{mnj}}{dt} \int_0^c S_s N_j N_i dz \int_0^A \int_0^B A_{mn} A_{mn} dx dy \right] + \\ & \int_0^c \int_0^A \int_0^B K_z \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial z^2} N_i A_{mn} dx dy dz + \\ & \int_0^c \int_0^A \int_0^B q N_i A_{mn} dx dy dz = 0 \quad (i=1,2,\dots, L+1)。 \end{aligned} \quad (7)$$

对式(7)中关于 z 方向的二阶求导项采用分部积分,代入Neuman潜水面条件(2),则

$$\begin{aligned} & \int_0^c \int_0^A \int_0^B K_z \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial z^2} N_i A_{mn} dx dy dz \\ & = \int_0^A \int_0^B \left(K_z \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z} N_i \Big|_{(x,y,c,t)} - S_y \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} N_i \Big|_{(x,y,0,t)} \right) A_{mn} dx dy - \\ & \sum_{j=1}^{L+1} \left[\phi_{mnj} \int_0^c K_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} dz \int_0^A \int_0^B A_{mn}^2 dx dy \right]。 \end{aligned} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)进一步展开,并利用层元间的水流连续条件整理后,可得到矩阵形式的整体半解析数值方程式:

$$[G]_{mn} \{\phi\}_{mn} + [B]_{mn} \frac{d}{dt} \{\phi\}_{mn} + \{Q\}_{mn} = 0, \quad (9)$$

式中, $L+1$ 阶的三对角系数矩阵 $[G]_{mn}$, $[B]_{mn}$ 称整体渗透矩阵与贮水—给水矩阵,整体水量向量 $\{Q\}_{mn}$ 为 $L+1$ 阶向量。

2.3 系数矩阵及向量元素公式

由于在试探函数中引入解析函数族,对于特定层元 l (节面编号分别为 $l, l+1$,层厚 c_l),根据式(7)、

(8)积分计算可得到层元 l 的2阶层元渗透矩阵 $[G]_{mn}^e$ 的元素 g_{mnij}^e 、层元贮水—给水矩阵 $[B]_{mn}^e$ 的元素 b_{mnij}^e 的解析表达式,其中, g_{mnij}^e 与文献[16]中表1给出计算公式相同, b_{mnij}^e 具体形式如下:

(1) 定水头边界条件

当 $l=1$ 时,层元矩阵 $[B]_{mn}^e$ 元素计算公式为

$$b_{11} = -ABc_l S_s / 12 - ABS_y / 4, \quad (10a)$$

$$b_{12} = b_{21} = -ABc_l S_s / 24, \quad (10b)$$

$$b_{22} = -ABc_l S_s / 12。 \quad (10c)$$

当 $l \neq 1$ 时,层元矩阵 $[B]_{mn}^e$ 元素计算公式为

$$b_{11} = b_{22} = -ABc_l S_s / 12, \quad (10d)$$

$$b_{12} = b_{21} = -ABc_l S_s / 24。 \quad (10e)$$

(2) 隔水边界条件

a) $m=0, n=0$

当 $l=1$ 时,层元矩阵 $[B]_{mn}^e$ 元素计算公式为

$$b_{11} = -ABc_l S_s / 3 - ABS_y, \quad (11a)$$

$$b_{12} = b_{21} = -ABc_l S_s / 6, \quad (11b)$$

$$b_{22} = -ABc_l S_s / 3。 \quad (11c)$$

当 $l \neq 1$ 时,层元矩阵 $[B]_{mn}^e$ 元素计算公式为

$$b_{11} = b_{22} = -ABc_l S_s / 3, \quad (11d)$$

$$b_{12} = b_{21} = -ABc_l S_s / 6。 \quad (11e)$$

b) $m=0, n \neq 0$ 或 $m \neq 0, n=0$

当 $l=1$ 时,层元矩阵 $[B]_{mn}^e$ 元素计算公式为

$$b_{11} = -ABc_l S_s / 6 - ABS_y / 2, \quad (12a)$$

$$b_{12} = b_{21} = -ABc_l S_s / 12, \quad (12b)$$

$$b_{22} = -ABc_l S_s / 6。 \quad (12c)$$

当 $l \neq 1$ 时,层元矩阵 $[B]_{mn}^e$ 元素计算公式为

$$b_{11} = b_{22} = -ABc_l S_s / 6, \quad (12d)$$

$$b_{12} = b_{21} = -ABc_l S_s / 12。 \quad (12e)$$

在 $m \neq 0, n \neq 0$ 情形下的 $[B]_{mn}^e$ 各元素计算公式与(10a)~(10e)形式相同。

同样地,根据不同的抽水形式,层元 l 的水量向量 $[Q]_{mn}^e$ 的元素 q_{mni}^e 也具有解析表达式。以定水头边界为例,对于设置在节面 $l(1 \leq l \leq L+1)$ 上(x_0, y_0, z_0)处的点源抽水形式,层元水量向量的元素计算公式为

$$\begin{aligned} q_{mni}^e &= \int_{z_l}^{z_{l+1}} N_i \delta(z - z_0) dz \int_0^A \int_0^B Q_w \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) A_{mn} dx dy \\ &= \begin{cases} Q_w \cdot \sin(k_m x_0) \sin(k_n y_0) & (i=l) \\ 0 & (i \neq l) \end{cases}, \end{aligned} \quad (13)$$

式中, Q_w 为单位时间的抽水量。

对于常见的非完整竖向井,层元水量向量元素的计算公式为

$$\begin{aligned} q_{mni}^e &= \int_{z_l}^{z_{l+1}} N_i dz \int_0^A \int_0^B \bar{Q} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) A_{mn} dx dy \\ &= \frac{c_l \bar{Q}}{2} \sin(k_m x_0) \sin(k_n y_0) \quad (i=l, l+1), \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $\bar{Q} = Q_w / L_w$, L_w 为滤管段长度。

特别地,当 $L_w = c$,即抽水井的滤管段完全贯穿整个含水层,此时式(14)对应于完整井的水量向量元素计算式。

在得到各层元矩阵 $[G]_{mn}^e$, $[B]_{mn}^e$ 和层元向量 $[Q]_{mn}^e$ 后,可叠加得到整体矩阵和整体向量。然后,对式(9)中 $d\{\phi\}_{mn}/dt$ 采用差分格式,可以建立对应于第(m,n)项的线性求解方程组,最终实现任意时刻地下水位降深的求解^[15]。值得注意的是,由于级数项间的解耦性使整体矩阵规模有限,半带宽仅为2,因此,相比于通常三维有限元分析产生的线性方程组规模,需要

的计算工作量很小,也更便于编程实现。同时,各系数矩阵元素都具有解析表达式,无需借助数值积分,可以进一步节省计算工作量。

3 算例分析

根据推导得到的求解格式编制了 Fortran 计算程序,在此基础上,通过数值结果与潜水完整井流解析解的对比验证潜水求解格式与程序的正确性,并说明本文方法处理潜水层、多层结构含水层系统中三维地下水流问题的适用性。

3.1 与解析解的对比

针对均质各向同性潜水层地下水向完整井的非稳定流问题,选取 5 组不同给水度比 $R_s = S_e / S_y$, 利用计算程序分别进行了分析。根据计算结果,图 1 给出了位于潜水层底板离完整井轴径向距离 $r=c$ 处的无量纲水位降深 $\bar{S} = 4\pi Kcs / Q_w$ 和无量纲时间 $T = Kct / S_e r^2$ 关系曲线,其中 $S_e = S_y c$ 为潜水层贮水系数。图中可见,5 种情形下本文结果和经典解析解文献[19]都吻合良好,从而验证了本文建立的潜水半解析数值求解格式和编制程序的正确性。当 $R_s = \infty$ 时,给水度 $S_y=0$,潜水层完整井流转化为承压层完整井流,对应于图 1 中的 Theis 曲线,这说明本文给出的潜水数值方法可退化为已有针对承压层的地下水流半解析数值方法。

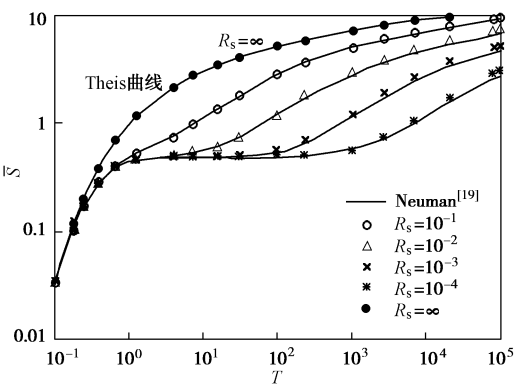


图 1 潜水含水层无量纲水位降深-时间曲线

Fig. 1 Dimensionless drawdown-time curves for unconfined aquifers

3.2 潜水完整井的地下水三维流

图 1 中 4 条曲线分别对应某一有限值给水度比 R_s , 可以看出,抽水初期的重力排水作用并不明显,不同 R_s 值的降深曲线都与 Theis 曲线重合。随着抽水时间的延续,潜水面下降引起重力排水的影响逐渐显现,本文数值结果很好地反映了潜水流的特点: R_s 越小,重力排水的补给作用越强,抽水引起的水位降深也越小,以至于当 $R_s = 10^{-4}$ 时较长一段时间内地下水位几乎不变。

图 2 给出了同一时刻不同潜水含水层深度处 ($\bar{z}=0, \bar{z}=0.2, \bar{z}=0.4$ 和 $\bar{z}=1$) 的 $\bar{S}-\bar{r}$ 曲线,其中 $\bar{r}=r/c, \bar{z}=z/c$ 。可以看出,不同位置处的降深曲线并不一致,抽水井附近存在较大竖向流速,表现出地下水的三维流动。这和 Theis 解给出的承压含水层完整井流有明显区别,后者只是二维径向流,水位降深和含水层深度位置无关。因此,在涉及潜水流时,为了避免较大误差,即使完整井流问题也有必要进行地下水的三维分析。在工程建设中,常需要关注井点降水作用下潜水位下降的效果,图 2 中 $\bar{z}=0$ 曲线即对应于抽水过程中该时刻的无量纲潜水面形状,图中可见,潜水面的降深总是落后于其下任意深度处的水头降深,这种现象称为潜水面滞后反应效应[19]。

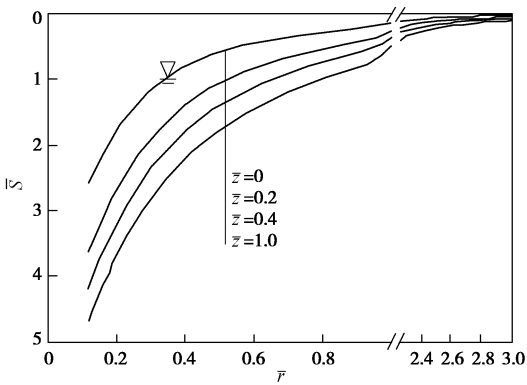


图 2 潜水含水层不同深度处无量纲水位降深-距离曲线

Fig. 2 Dimensionless drawdown-distance curves at different elevations \bar{z}

3.3 数值应用

为了进一步说明本文方法的应用能力,选取典型 3 层结构含水层系统的抽水问题进行分析,如图 3 所示。含水层系统由上覆潜水层、下卧承压层以及两者之间的弱透水层组成,在承压层中设置竖向完整井以常流量开采地下水,具体的几何尺寸和水文地质计算参数值见表 1。

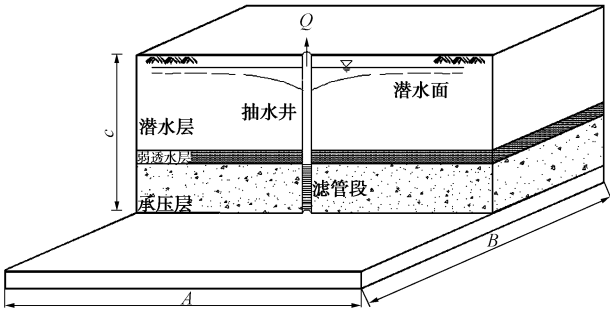


图 3 潜水层-弱透水层-承压层系统示意图

Fig. 3 Schematic of three-layered system consisting of an unconfined aquifer, an aquitard and a confined aquifer

表 1 计算参数

Table 1 Calculating parameters		
计算参数	数值	单位
厚度 c_1, c_2, c_a	30, 20, 5	m
贮水率 S_{s1}, S_{s2}, S_{sa} (10^{-5})	3.333, 3.333, 1.5	m^{-1}
渗透系数 K_1, K_2, K_a	5, 5, 0.5	m/d
抽水量 Q_w	1000	m^3/d
计算区域 $A \times B$	2000×2000	m^2
抽水井滤管段 L_w	20	m
给水度 S_y	0.1	—

注：下标 1, 2, a 分别表示潜水层、承压层、弱透水层。

图 4 分别给出了潜水层、弱透水层和承压层顶板处的降深分析结果。图 4 中可见，在抽水作用下，最明显的水位降深发生在作为抽水层的承压层中，但是弱透水层和上覆潜水层中地下水位也出现了变化，这说明在抽水作用下上覆潜水可以通过中间弱透水层进入下卧承压层，发生越流。越流对含水层水位的影响是地下水力学研究的重要内容，Hantush 等^[21]假设在含水层中地下水为水平二维流，弱透水层中仅发生竖向一维流，成功建立了能够考虑弱透水层弹性释水的经典越流理论。目前，基于该假设的准三维模型在地下水计算及地面沉降数值模型研究中仍得到广泛应用。由图 5 给出的抽水井附近降深等值线与流线可知，承压层中水平流占优，基本符合准三维模型；弱透水与潜水层都存在较大竖向分流速，表现为地下水的三维流动，而且在含水层与弱透水交界面处等值线明显偏折，发生水流折射。因此，半解析数值方法能够同时考虑含水层及弱透水层的水平与竖向流动，更合理地反映多层结构含水层系统中地下水流动特性。

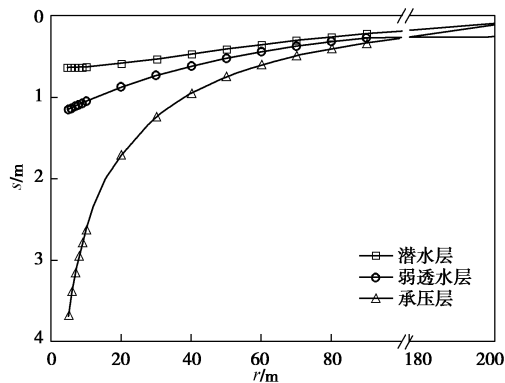


图 4 含水层系统水位降深 - 距离曲线

Fig. 4 Drawdown-distance curves for three-layered aquifer system

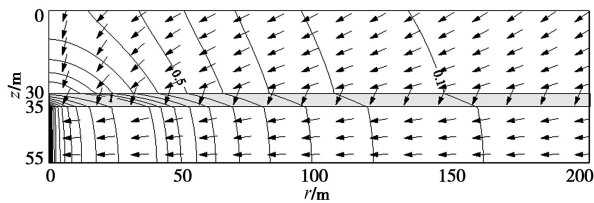


图 5 含水层系统水位降深等值线与流线

Fig. 5 Drawdown contours and streamlines in three-layered aquifer system

4 结 语

基于 Neuman 潜水理论，提出了潜水层地下水流动问题的半解析数值求解格式，完善了已有地下水半解析数值方法。编制了相应计算程序，利用经典解析解验证了本文方法的有效性，计算结果能够反映潜水完整井流的流动特性与潜水面滞后效应。在此基础上，通过含潜水层的 3 层含水层系统地下水流动问题的分析，说明半解析数值方法能够处理复杂层状含水层系统中的三维水流问题。由于半解析数值求解格式具有解耦性，能够有效减少三维数值分析带来的计算规模，层元矩阵的解析形式能够进一步避免数值积分，因此，该方法可以为水文地质以及地面沉降领域中三维流模型的高效分析提供新的途径。同时应该指出的是，在处理复杂非均质问题时，该方法无法取代有限元等传统数值方法的地位。

参考文献：

[1] 陈崇希, 裴顺平. 地下水开采 - 地面沉降模型研究[J]. 水文地质工程地质, 2001(2): 5 - 8. (CHEN Chong-xi, PEI Shun-ping. Research on groundwater exploitation-land subsidence model[J]. Hydrogeology and Engineering Geology, 2001(2): 5 - 8. (in Chinese))

[2] 张 云, 薛禹群. 抽水地面沉降数学模型的研究现状与展望[J]. 中国地质灾害与防治学报, 2002, 13(2): 1 - 6. (ZHANG Yun, XUE Yu-qun. Present situation and prospect on the mathematical model of land subsidence due to pumping[J]. The Chinese Journal of Geological Hazard and Control, 2002, 13(2): 1 - 6. (in Chinese))

[3] SEPÚLVEDA N. Three-dimensional flow in the storative semiconfining layers of a leaky aquifer[J]. Ground Water, 2008, 46(1): 144 - 155.

[4] 叶淑君, 吴吉春, 薛禹群. 多尺度有限单元法求解非均质多孔介质中的三维地下水流问题[J]. 地球科学进展, 2004(3): 437 - 442. (YE Shu-jun, WU Ji-chun, Xue Yu-qun. Application of multiscale finite element method to three dimensional groundwater flow problems in heterogeneous porous media[J]. Advance in Earth Sciences, 2004(3): 437 - 442. (in Chinese))

[5] 薛禹群, 叶淑君, 谢春红, 等. 多尺度有限元法在地下水模拟中的应用[J]. 水利学报, 2004(7): 7 - 13. (XUE Yu-qun, YE Shu-jun, XIE Chun-hong, et al. Application of multi-scale finite element method to simulation of groundwater flow[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004(7): 7 - 13. (in Chinese))

- [6] 薛禹群, 谢春红. 地下水数值模拟[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (XUE Yu-qun, XIE Chun-hong. Numerical simulation for groundwater[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese))
- [7] HEMKER C J. Transient well flow in vertically heterogeneous aquifers[J]. Journal of Hydrology, 1999, **225**(1/2): 1 - 18.
- [8] HEMKER C J. Transient well flow in layered aquifer systems: the uniform well-face drawdown solution[J]. Journal of Hydrology, 1999, **225**(1/2): 19 - 44.
- [9] BAKKER M. An analytic, approximate method for modeling steady, three-dimensional flow to partially penetrating wells[J]. Water Resources Research, 2001, **37**(5): 1301 - 1308.
- [10] BAKKER M, STRACK, O D L. Analytic elements for multi-aquifer flow[J]. Journal of Hydrology, 2003, **226**(1/2/3/4): 119 - 129.
- [11] BAKKER M, KELSON V A, LUTHER K H. Multilayer analytic element modeling of radial collector wells[J]. Ground Water, 2005, **43**(2): 926 - 934.
- [12] CHEUNG Y K, CHAKRABARTI S. Free vibration of thick, layered rectangular plates by a finite layer method[J]. Journal of Sound and Vibratio, 1972, **21**(3): 277 - 284.
- [13] CHEUNG Y K. Finite strip method in structural mechanics[M]. New York: Pergoman Press, 1976.
- [14] 曹志远, 张佑启. 半解析数值方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1992. (CAO zhi-yuan, CHEUNG Y K. Semi-Analytical numerical method[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1992. (in Chinese))
- [15] SMITH S S, ALLEN M B, PUCKETT J. The finite layer method for groundwater flow models[J]. Water Resources Research, 1992, **28**(6): 1715 - 1722.
- [16] 王旭东, 徐 进, 诸宏博. 各向异性承压含水层地下水流半解析数值模拟[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(9): 1334 - 1339. (WANG Xu-dong, XU Jin, ZHU Hong-bo. Semi-analytical numerical simulation for unsteady groundwater flows in anisotropic confined aquifers[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(9): 1334 - 1339. (in Chinese))
- [17] WANG Xu-dong, XU Jin, CAI Zheng-yin. Finite layer method for flow in layered radial two-zone aquifer systems[J]. Groundwater, 2012, **50**(3): 348 - 354.
- [18] 徐 进, 王旭东, 刘运航. 地下水向水平井三维流动的有限层分析[J]. 岩土力学, 2011, **32**(3): 922 - 926. (XU Jin, WANG Xu-dong, LIU Yun-hang. Finite layer analysis of three-dimensional groundwater flow to horizontal well[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(3): 922 - 926. (in Chinese))
- [19] NEUMAN S P. Theory of flow in unconfined aquifers considering delayed response of the water table[J]. Water Resources Research, 1972, **8**(4): 1031 - 1045.
- [20] 林志斌, 李元海, 桂常林, 等. 定流量下潜水非完整井稳定流计算方法[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(12): 2290 - 2297. (LIN Zhi-bin, LI Yuan-hai, GUI Chang-lin, et al. Method for steady flow of partially penetrating well in phreatic aquifer under constant flow[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(12): 2290 - 2297. (in Chinese))
- [21] HANTUSH M S. Modification of the theory of leaky aquifers[J]. Journal of Geophysical Research, 1960, **65**(11): 3713 - 3726.