

DOI: 10.11779/CJGE201510015

# 基于环路更新的物理覆盖和接触环路生成算法

徐栋栋<sup>1</sup>, 杨永涛<sup>2</sup>, 郑宏<sup>2</sup>, 邬爱清<sup>1</sup>

(1. 长江科学院水利部岩土力学与工程重点实验室, 湖北 武汉 430010; 2. 中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

**摘要:** 数值流形方法(NMM)实现了对连续和非连续问题的统一求解,但前提是必须能够正确地生成物理覆盖和接触环路。首先,针对几何形态保持固定不变的模型,阐述了物理覆盖和接触环路生成的整个过程。其中,重点介绍了搜索环路的算法,这也是NMM前处理的核心算法。进而,基于更新物理片环路和接触环路的思想,提出了一种新颖的更贴近NMM本质的裂纹扩展时的物理覆盖和接触环路生成算法,理论上可适用于任意的裂纹扩展长度和允许裂纹尖端落在单元的任意位置,更大程度上摆脱了对于网格的依赖性。最后,通过一个多裂纹扩展算例证实了方法的鲁棒性和正确性。

**关键词:** 数值流形法; 物理片; 物理覆盖; 数学片; 数学覆盖; 物理片环路; 接触环路; 多裂纹扩展

**中图分类号:** O302 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2015)10-1865-11

**作者简介:** 徐栋栋(1986-),男,博士,主要从事计算岩土力学方面的研究。E-mail: xdhappy717@163.com。

## Algorithm for generation of physical cover and contact loops based on loop updating

XU Dong-dong<sup>1</sup>, YANG Yong-tao<sup>2</sup>, ZHENG Hong<sup>2</sup>, WU Ai-qing<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Geotechnical Mechanics and Engineering of Ministry of Water Resources, Yangtze River Scientific Research Institute, Wuhan 430010, China; 2. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

**Abstract:** The numerical manifold method has been successful in solving continuous and discontinuous problems in a unified way, but the precondition is to generate the physical cover and contact loops correctly. For problem domains invariant during analysis, at first, the generation process of the physical cover and contact loops is expounded, where an algorithm for searching for loops, as the core of NMM pre-processing, is emphasized. Furthermore, a new algorithm much closer to the nature of NMM for the generation of physical cover and contact loops during the crack growth is proposed based on the concept of updating physical patch loops and contact loops. In theory, it is suitable for the cases of arbitrary crack growth length, and the crack tips are allowed to stop at any point of the manifold element, which has eliminated the mesh dependence to a great degree. Finally, the robustness and correctness of the proposed method is confirmed by an example of multiple crack growth.

**Key words:** numerical manifold method; physical patch; physical cover; mathematical patch; mathematical cover; physical patch loop; contact loop; multiple crack growth

## 0 引言

数值流形方法<sup>[1]</sup> (numerical manifold method, NMM)实现了对连续和非连续问题的统一求解,但需要建立在能够正确地生成物理覆盖和接触环路的基础之上。尽管可以选择非有限元网格来形成数学覆盖,如文献[2, 3]那样,但基于有限元网格的覆盖系统仍然处于主导地位。因此,学者们针对基于有限元网格的前处理算法展开了大量地研究。曹文贵等<sup>[4]</sup>、张大林等<sup>[5]</sup>和张湘伟等<sup>[6]</sup>详尽地介绍了NMM的物理覆盖生成技术。蔡永昌等<sup>[7-8]</sup>、武杰等<sup>[9]</sup>基于三角形和四边

形数学网格对流形方法覆盖系统的生成算法进行了系统地研究。陈刚等<sup>[10]</sup>探讨了基于有向遍历技术的流形元覆盖系统生成算法。凌道盛等<sup>[11]</sup>将有限元法的 $h$ 型网格自适应技术和后验误差估计理论推广应用到NMM前处理中。韩有民等<sup>[12]</sup>基于三角形网格阐述了裂纹扩展时的物理网格与流形单元的生成算法,并给

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(11172313, 51179014); 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)项目(2011CB013505, 2014CB047100, 2011CB710603)

**收稿日期:** 2014-12-06

出了裂纹扩展模拟算例。李海枫等<sup>[13]</sup>、姜冬茹等<sup>[14]</sup>系统详细地介绍了三维 NMM 中流形单元的生成算法, 为该方法后续研究奠定了良好的基础。NMM 在处理连续问题时, 仅需要生成物理覆盖, 因为不需要处理不连续面间的相互作用; 但在处理非连续变形问题时, 还需要生成接触环路。接触环路主要用来表征块体间的接触状态, 模拟块体间的接触行为。尤其当模型几何形态发生变化时, 如裂纹扩展, 接触环路的更新更是必不可少。但这在文献中很少被提及。

在 NMM 前处理研究的基础上, NMM 得到广泛地推广和应用, 如姜清辉等<sup>[15-17]</sup>发展了三维 NMM; 林绍忠等<sup>[18]</sup>将其应用于混凝土徐变模拟; 苏海东等<sup>[19-20]</sup>发展了从部分覆盖到任意形状覆盖的 NMM 等。

将 NMM 应用于模拟岩体由连续到非连续的变形破坏过程一直以来都是热点和难点问题。如王水林等<sup>[21-22]</sup>基于线弹性断裂力学理论, 首次将 NMM 应用到裂纹扩展问题中。Zhang 等<sup>[23-24]</sup>将 NMM 与边界元结合到一起用于模拟裂纹扩展问题, 并达到了满意的效果。Wu 等<sup>[25-28]</sup>对摩擦型裂纹扩展, 岩体含填充物时裂纹扩展行为, 沉积岩动态破坏, 弹塑性破坏分析等进行了一系列深入地研究。但大多数研究中, 扩展后的裂纹尖端被强制地停留在单元边上, 这样就不可避免地使网格有一定的依赖性。

因此, 本文建立了一种基于环路更新的物理覆盖和接触环路的生成方法, 不仅可以进一步加深对接触环路的认识, 而且克服了裂纹扩展时的网格依赖性。理论上允许裂纹尖端停留在单元的任意位置, 并且裂纹的扩展长度可以任意给定。最后, 将用一个多裂纹扩展算例来验证算法的正确性。

## 1 物理覆盖及接触环路生成算法

限于篇幅, NMM 的基本理论不再介绍, 详见文献[29~35], 关于 NMM 对于 4 阶问题的应用可参见文献[36]。本文沿用了这些文献中的关于 NMM 的基本术语, 文中在论述时会适当提及。

下面将在等边三角形数学网格的基础上, 详细地介绍物理覆盖和接触环路生成的整个流程。

### (1) 建立几何模型

如图 1 所示, 在一个正方形平板内含有两条物理线。在 NMM 中, 裂纹、节理或材料分界线等都可视为物理线。

### (2) 构建数学覆盖

选用正三角形数学网格, 网格节点处的数字表示节点编号。这里定义共用同一节点的几个三角形构成一个数学片 (mathematical patch, MP); 所有数学片

的并集定义为数学覆盖 (mathematical cover, MC)。显然, 正六边形 14-15-21-26-25-19-14 表示数学片 20; 菱形 11-16-10-5-11 表示数学片 11; 图 2 所示就是一个数学覆盖。

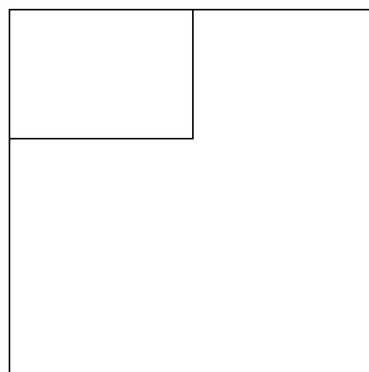


图 1 几何模型

Fig. 1 Geometric model

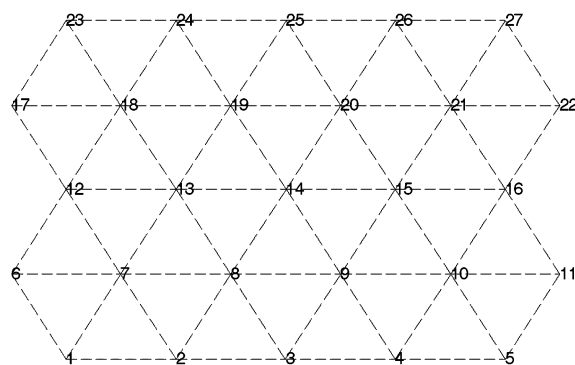


图 2 数学覆盖

Fig. 2 Mathematical cover

### (3) 将 MC 覆盖求解区域

如图 3 所示, MC 只需将整个求解区域全部覆盖, 但不必像有限元网格一样必须与其保持一致。

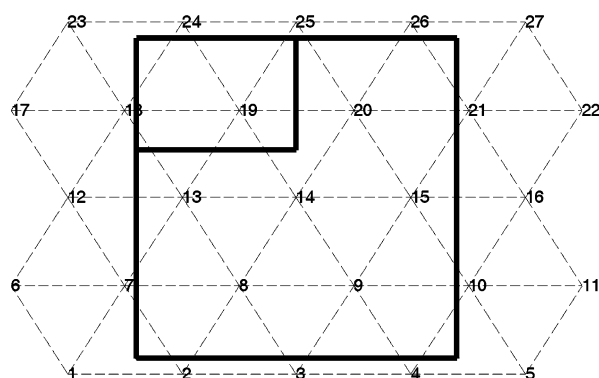


图 3 MC 将求解区域覆盖

Fig. 3 Cover of computational domain by MC

### (4) 搜索节理环路

如图 4 所示, 求解区域被物理线切割为两个部分: 凹多边形 1-3-5-7-6-2-1 和矩形 4-6-7-5-4, 数字表示物理线和区域边界相互切割产生的交点编号。由于 MC

和求解区域求交以后, 形成的有些单元是不必要的, 只有落在节理环路内部的单元才是所需要的, 这也是搜索节理环路的原因所在。当求解区域内部含有孔洞等时, 搜索节理环路的必要性可进一步得到体现。

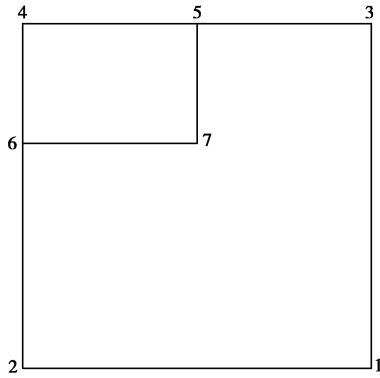


图 4 搜索节理环路

Fig. 4 Search for joint loops

下面将对搜索环路算法做个简单地介绍。如图 4 所示, 共有 7 个交点, 在搜索环路之前需要确定下面 3 个数组:  $k[i][j]$  表示与交点  $i$  相连接的第  $j$  个交点编号;  $a[i][j]$  表示与交点  $i$  相连的第  $j+1$  个交点;  $q[i][j]$  表示交点  $i$  和与其连接的第  $j$  个交点组成的线段沿逆时针方向转到交点  $i$  和与其相连接的第  $j+1$  个交点构成的线段的角度。对图 4 中形成的 3 个数组如下所示:

$$k^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 5 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$a^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 6 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 5 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$q^T = \begin{bmatrix} 90.0 & 90.0 & 90.0 & 270.0 & 180.0 & 90.0 & 90.0 \\ 270.0 & 270.0 & 270.0 & 90.0 & 90.0 & 180.0 & 27.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 90.0 & 90.0 & 0.0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

式中,  $k[1][1]=3$ : 表示与交点 1 相连的第 1 个交点是交点 3。  $k[1][2]=2$ : 表示与交点 1 相连的第 2 个交点为交点 2。交点 2 和交点 3 均与交点 1 相连, 但是线段 1-3 与  $x$  轴正方向的夹角小于线段 2-3 与  $x$  轴正方向的夹角, 所以按从小到大的顺序排列, 将交点 3 放在前面。

$a[1][1]=2$ : 表示  $a[1][1]$  存储的是与交点 1 相连的第 2 个交点的编号, 也就是交点 2。同样地,  $a[1][2]=3$ : 与交点 1 相连的第 2 个交点为交点 2, 交点 2 的下一个交点为交点 3。

$q[1][1]=90^\circ$ : 表示交点 1 和与其相连的第 1 个交点组成的线段 1-3 沿着逆时针方向转到交点 1 与其相

连的第 2 个交点组成的线段 1-2 的所形成的角度为  $90^\circ$ 。同样地,  $q[1][2]=270^\circ$ : 表示由线段 1-2 逆时针转到线段 1-3 的角度为  $270^\circ$ 。

搜索环路从交点 1 开始, 与交点 1 相连的第 1 个点为交点 3, 所以从交点 1 转向交点 3, 并令  $a[1][1]=-a[1][1]$ , 表明这个环路方向已经使用。与交点 3 相连的第 2 个点为交点 1, 所以接下来转向与交点 3 相连的下一交点(这里就是第一个), 也即交点 5, 同样令  $a[3][1]=-a[3][1]$ , 表明这个环路方向也已使用。由线段 3-1 逆时针转到 3-5 的角度为  $270^\circ$ 。与交点 5 相连的第 1 个为交点 3, 那么接下来转向与交点 5 相连的第 2 个交点, 即交点 4, 该方向也使用, 由线段 5-3 逆时针转到 5-4 的角度为  $180^\circ$ 。与交点 4 相连的第 1 个点为交点 5, 同样转向与交点 4 相连的下一个交点, 即交点 6, 该方向也已使用, 由 4-5 逆时针转到 4-6 的角度为  $270^\circ$ 。与交点 6 相连的第 2 个点为交点 4, 同样转向与交点 6 相连的第 3 个点, 即交点 2, 由 6-4 逆时针转到 6-2 角度为  $180^\circ$ 。与交点 2 相连的第 2 个点为交点 6, 同样转向与交点 2 相连的下一个交点, 即交点 1, 由 2-6 逆时针转到 2-1 角度为  $270^\circ$ 。与交点 1 相连的第 2 个交点为交点 2, 同样应该转向与交点 1 相连的第 1 个交点, 即交点 3, 由线段 1-2 逆时针方向转到线段 1-3 的角度为  $270^\circ$ 。由于线段 1-3 这个方向已经转过, 所以最终就形成了一个具有 6 个顶点的环路 1-3-5-4-6-2-1, 环路前进方向的右边区域的内角和为  $1440^\circ$ ,  $1440^\circ - 6 \times 180^\circ = 360^\circ > 0^\circ$ , 说明它是一外域, 不应该保留。

按照上述步骤, 最终可以形成 3 个环路, 分别为: 1-3-5-4-6-2-1, 1-2-6-7-5-3-1 和 4-5-7-6-4。而仅后两个环路是应该保留的。这里规定, 环路选逆时针方向前进, 前进方向的左手边区域表示一个块体。那么图 4 中两个块体应该表示为 1-3-5-7-6-2-1 和 4-6-7-5-4。

搜索环路的思想在形成流形单元和后续裂纹扩展过程中 PC 和接触环路的生成中都会用到。

#### (5) 形成单元块体

如图 5 所示, 令物理线, 平板边界和数学网格线之间相互切割, 共产生 64 个交点。然后, 通过搜索环路的程序来确定单元块体。例如, 三角形 43-39-44-43 和凹多边形 36-51-57-37-33-36 是两个单元块体。

#### (6) 剔除求解区域外的单元块体

如图 6 所示, 需要将位于求解区域外的单元块体剔除, 也就是说位于图 4 中的节理环路 1-3-5-7-6-2-1 和 4-6-7-5-4 中的单元块体必须保留, 且命名为流形单元。因此, 图 5 中的三角形单元块体 43-39-44-43 需要移除, 而凹多边形 36-51-57-37-33-36 保留, 而且它就是一个流形单元。

### (7) 形成物理覆盖

对于每个流形单元,首先要确定它们落在哪个三角形数学网格内。例如,图6所示的流形单元 51-57-37-33-36-51 和 33-37-56-36-33 落在图2所示的数学网格 14-20-19-14 内;同样地,流形单元 51-45-46-51 落在图2所示的三角形数学网格 14-8-9-14 内。

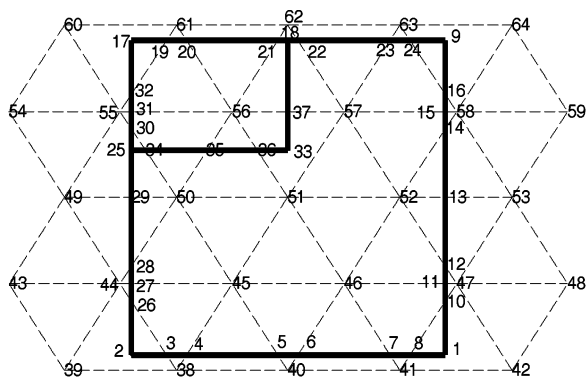


图5 生成单元块体

Fig. 5 Generation of element blocks

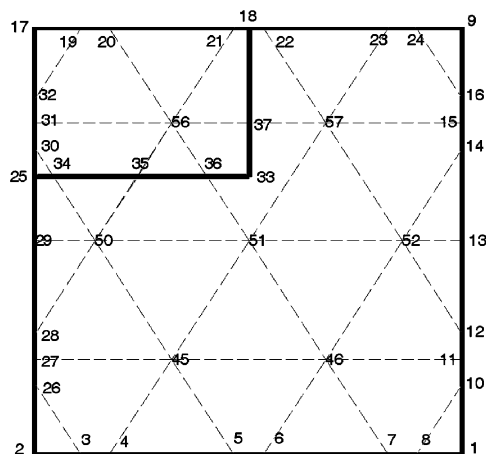


图6 流形单元

Fig. 6 Manifold elements

进一步,找出每个数学片内部的流形单元。显然,图2所示的数学片 14 包含 8 个流形单元 51-57-37-33-36-51, 33-37-56-36-33, 35-36-56-35, 51-36-35-50-51, 51-50-45-51, 51-45-46-51, 51-46-52-51 和 51-52-57-51。

对每个数学片内部的流形单元,通过判断两个流形单元是否共边且所共边是否由物理线通过来形成物理片。例如,流形单元 51-36-35-50-51 和 51-50-45-51 共边为线段 51-50, 而且 51-50 没有物理线通过,因此 51-36-35-50-51 和 51-50-45-51 连接为一个整体。同样地,51-50-45-51 和 51-45-46-51 共边为 51-45 且不在物理线上,因此它们连接为一个整体。进而,51-36-35-50-51, 51-50-45-51 和 51-45-46-51 连接为

一个整体。对物理片 14 内部的每个流形单元如此操作。发现物理片 14 被分为两部分包括: 56-35-36-33-37-56 和 37-33-36-35-50-45-46-52-57-37。每个部分均定义为一个物理片。到此,也已确定位于每个物理片内部的所有流形单元。如果一个流形单元位于某个物理片内部,就称此流形单元由这个物理片所覆盖。显然的,对于三角形网格的数学覆盖来说,每个流形单元由 3 个物理片所覆盖。这里就确定了每个流形单元所对应的 3 个物理片。进而就得到了物理覆盖。如图7所示,流形单元内部的数字表示物理片编号。可见,数学片 14 被分为两个物理片 13 和 14, 且流形单元 51-57-37-33-36-51 由 3 个物理片 13, 19 和 21 所覆盖。

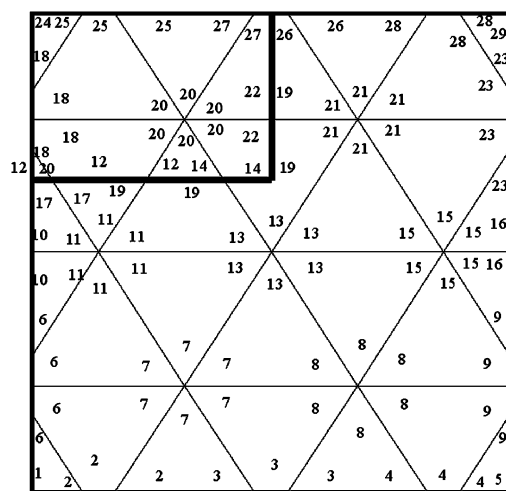


图7 物理覆盖

Fig. 7 Physical cover

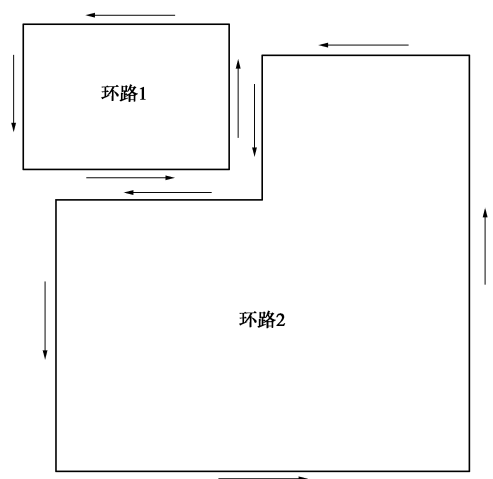


图8 接触环路

Fig. 8 Contact loops

### (8) 搜索接触环路

对于一个节理环路, NMM 求解时仅需要形成物理覆盖即可。但是对于很多节理环路的情况, 必须确定由流形单元顶点编号所表示的所有接触环路, 以便

于描述块体间的接触状态, 模拟块体间的相互作用。如图 8 所示, 由搜索环路程序找到 2 个接触环路。例如, 接触环路 1 可由流形单元的顶点编号表示为 21-20-19-17-32-31-30-25-34-35-36-33-37-18-21, 如图 6。接触环路的搜索十分重要, 尤其是当裂纹扩展时会有新的环路生成。需要指出, 在搜索环路时, 只有沿着流形单元边的逆时针环路方向才是需要的, 其他方向略去。

2 算例验证

如图 9 所示, 为含有一些复杂节理或裂纹的岩体。利用它来进一步说明物理覆盖和接触环路的生成算法的有效性。选用的数学覆盖如图 10 所示。形成的物理覆盖如图 11 所示, 且符合 NMM 的理论。产生了 5 个接触环路, 如图 12 所示。对于单连通体来说, 环路逆时针方向前进的左手边表示一个块体区域。块体由流形单元的顶点编号来表征, 在图中不再显示。

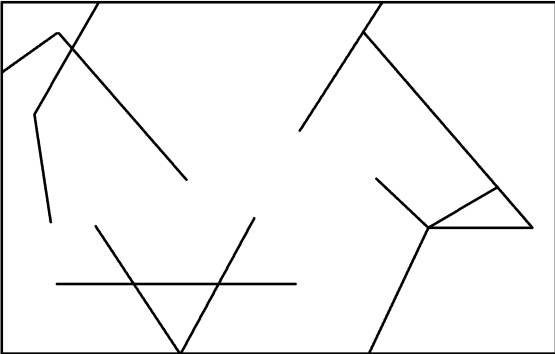


图 9 节理岩体  
Fig. 9 Physical model of jointed rock

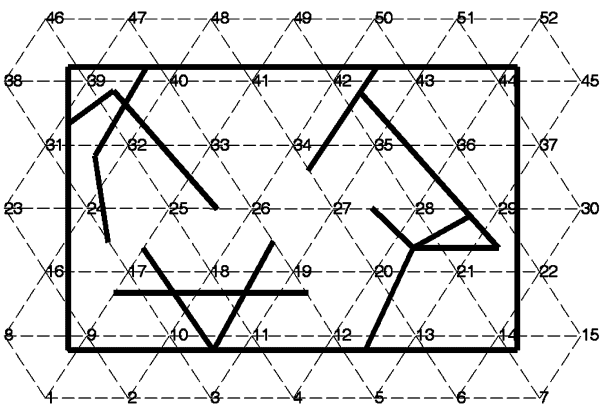


图 10 采用的数学覆盖  
Fig. 10 Mathematical cover used for jointed rock model

3 裂纹扩展时 PC 及接触环路生成算法

上文选用的两个算例重点在于论述环路搜索算法与验证 PC 与接触环路算法鲁棒性。下面将选用一个单边裂纹算例来表述裂纹扩展过程中的物理覆盖和接

触环路生成算法。

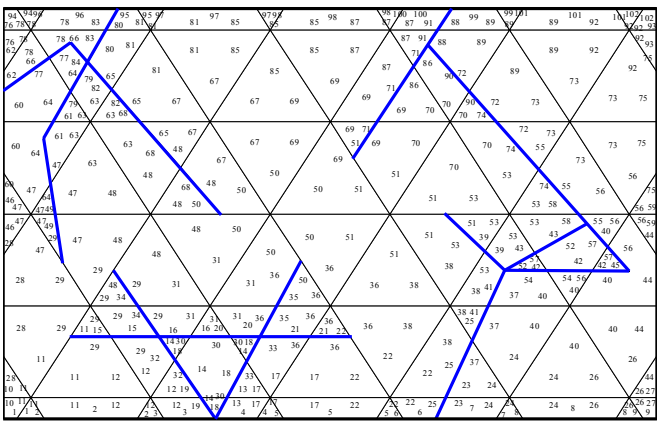


图 11 物理覆盖  
Fig. 11 Physical cover for jointed rock mass

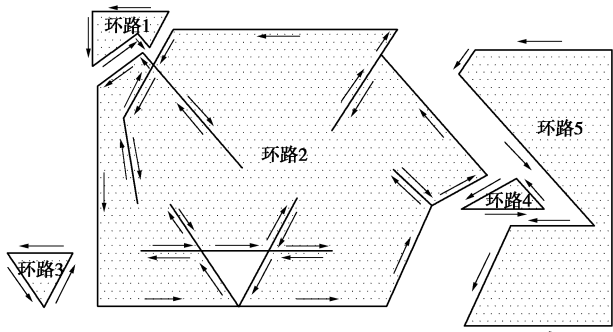


图 12 接触环路  
Fig. 12 Contact loops for jointed rock mass

如图 13 所示为一含单边裂纹矩形平板。使用图 14 所示的 MC 来覆盖此模型。图 15 和 16 分别为所形成的流形单元和物理覆盖。现有的 NMM 前处理将位于单元内部的一小段裂纹做人为地截断, 它可通过细分其所在流形单元来补上。图 17 为初始的接触环路。

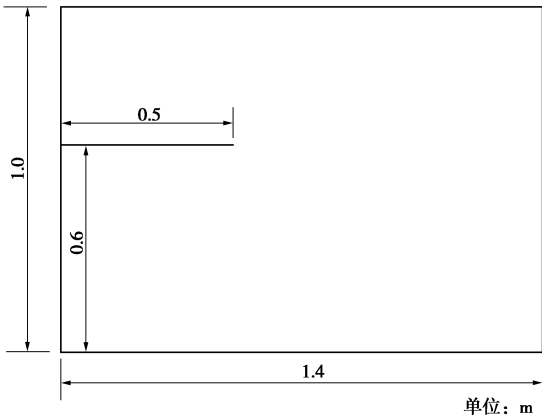


图 13 单边裂纹几何模型  
Fig. 13 Geometric model of plate with a single crack

下面, 将在上节算法所形成的初始物理覆盖和接触环路的基础上, 详细地介绍裂纹扩展时物理覆盖和接触环路的生成算法。

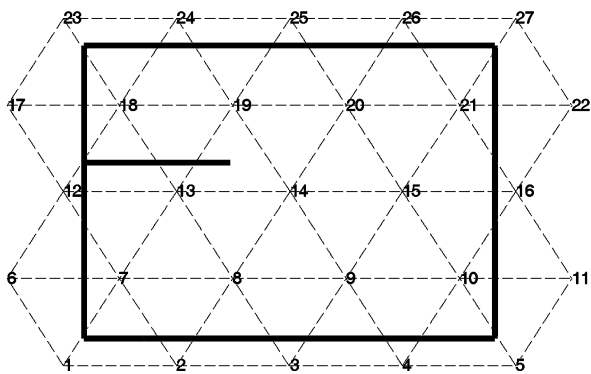


图 14 数学覆盖切割模型

Fig. 14 Geometric model intersected with mathematical cover

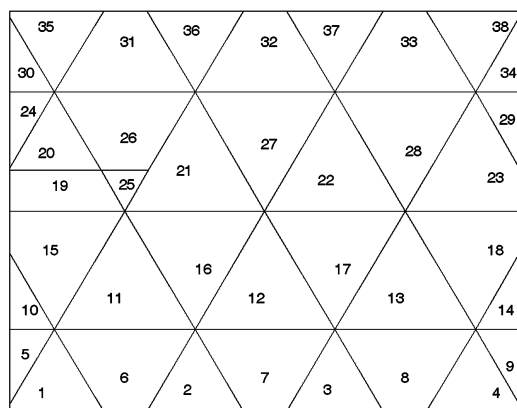


图 15 流形单元

Fig. 15 Manifold element

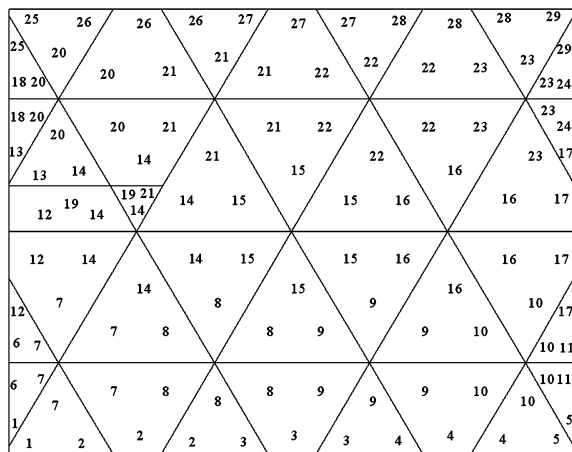


图 16 物理覆盖

Fig. 16 Physical cover

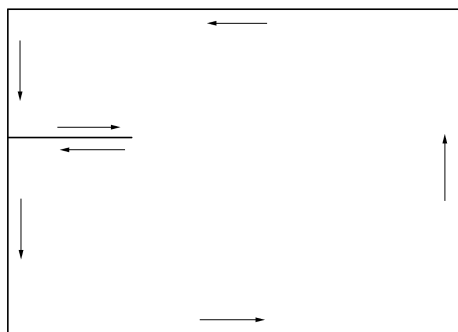


图 17 初始接触环路

Fig. 17 Initial contact loop

(1) 输入裂纹的几何信息, 包括裂纹的起点坐标和终点坐标。

(2) 以裂纹尖端作为一个顶点, 将其所在的流形单元细分, 但确保细分后形成的小单元所对应的物理片和插值点与细分前的单元一致。如图 15 所示, 裂纹尖端所在流形单元为 21, 对应的物理片分别为 14, 15 和 21, 如图 16; 细分后的 4 个小单元为 38, 39, 40 和 41, 如图 18 所示; 而所对应的物理片依然是 14, 15 和 21, 如图 19 所示。然后对相关信息进行必要的更新, 如流形单元的顶点坐标, 单元起止编号, 流形单元数目, 流形单元顶点总数, 流形单元所对应的物理片和初始接触环路上的节点编号等。

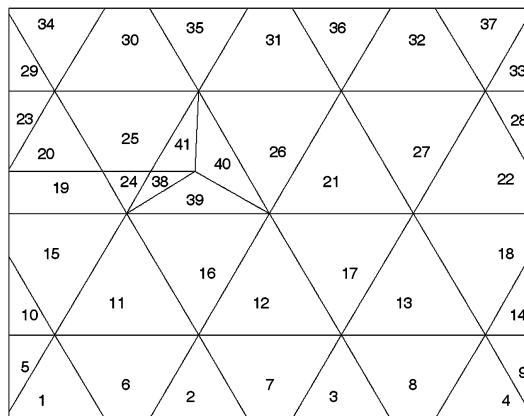


图 18 细分后的流形单元

Fig. 18 Manifold element after refinement

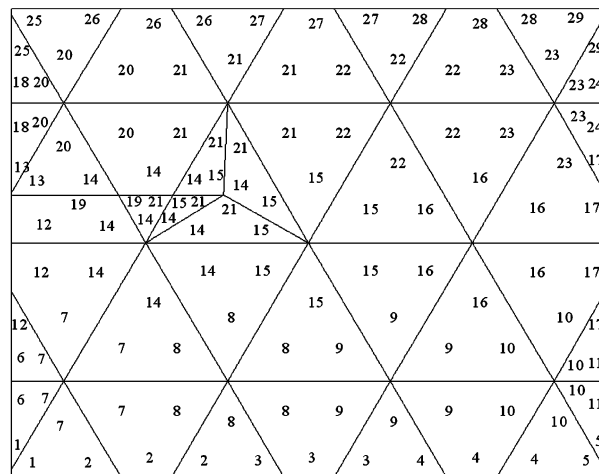


图 19 细分后的流形单元和物理覆盖

Fig. 19 Manifold elements and physical cover after refinement

(3) 将裂纹尖端所在流形单元内部被截断的裂纹线段加入到图 17 所示的初始接触环路中去, 并且确定接触环路中的所有线段, 如图 20 所示。

(4) 初始化物理片所对应的环路及其所对应的线段。图 21 事先给出了裂纹扩展后会被裂纹切割的 5 个物理片的环路图, 以便于裂纹扩展后的这些环路间的对比。如图 21, PP-14、PP-15 和 PP-21 内部均包含裂纹, 若在裂纹尖端扩充增加函数<sup>[27]</sup>, 这些物理片可

定义为奇异物理片。PP-16 和 PP-22 不含裂纹, 可定义为非奇异物理片。

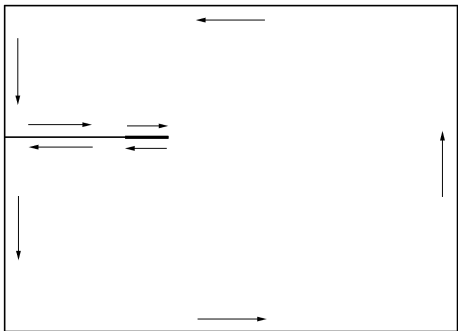


图 20 将截断裂纹加入到初始接触环路中  
Fig. 20 Joining truncated crack into intimal contact loop

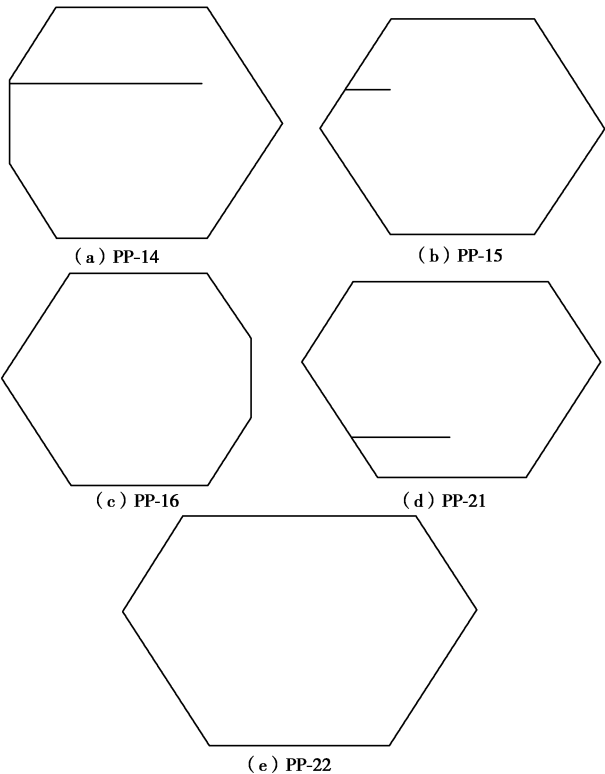


图 21 物理片所对应的环路  
Fig. 21 Loops of physical patches

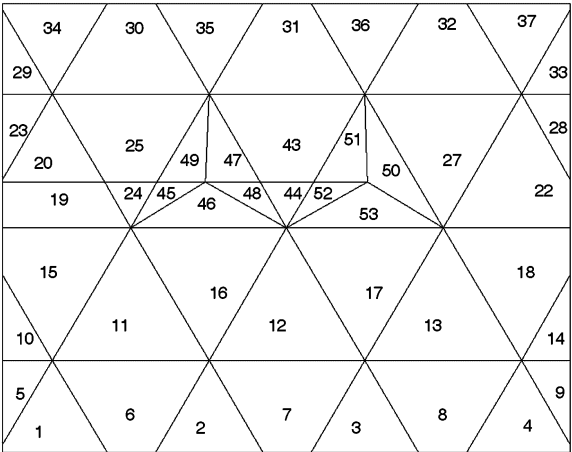


图 22 裂纹扩展后形成新的流形单元  
Fig. 22 New manifold elements after crack growth

(5) 根据一定的破坏准则, 裂纹发生扩展, 确定新的裂纹起点和终点; 当裂纹之间相交或裂纹与求解区域边界交汇时, 就认为相应的裂纹不再存在。

(6) 将扩展裂纹通过的流形单元切割, 形成新的流形单元; 同时若扩展后的裂纹尖端仍落在单元内部, 还需将其细分, 细分后形成的流形单元插值点与物理片同样需与细分前流形单元保持一致。如图 22 所示, 形成了 8 个新的流形单元, 编号分别为 43, 44, 47, 48, 50, 51, 52 和 53。如图 23 所示, 新形成的流形单元的物理片仍与切割或细分前的流形单元保持一致。当裂纹扩展长度非常短时, 扩展后的裂纹尖端依然落在细分后的单元内部时, 仍可以将其继续细分, 如图 24 所示。注意这里仅在切割后形成新的流形单元, 仍未更新物理覆盖。

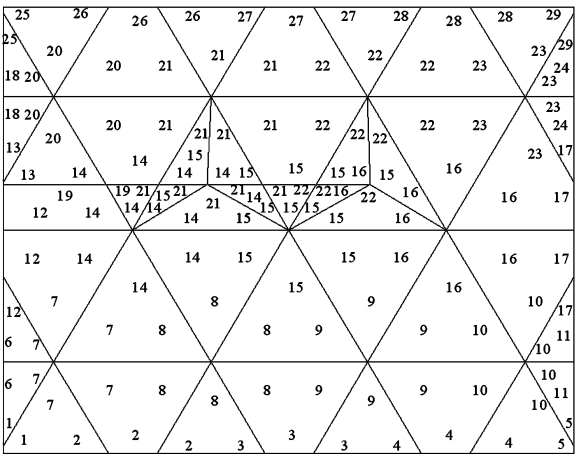


图 23 裂纹扩展后更新前的物理覆盖  
Fig. 23 Physical cover before updating after crack propagation

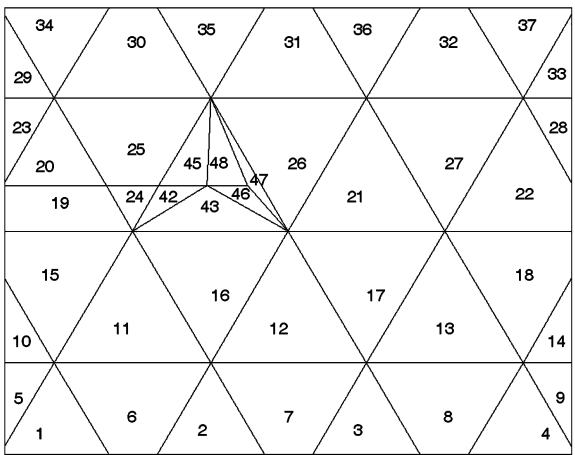


图 24 裂纹扩展长度较短时细分后的流形单元  
Fig. 24 Manifold element after refinement when crack growth length is very short

(7) 确定新生成流形单元所对应的所有物理片, 因为只有这些物理片需要更新。找到每个物理片下的未被切割的以及切割后新生的所有流形单元, 然后

将新生成流形单元中裂纹通过的线段加入到该物理片环路的线段之中。通过搜索环路程序生成新的物理片环路。通过判断更新前物理片下的流形单元在更新后的哪个物理片内部,来更新流形单元所对应的物理片编号及插值点坐标。

如图 25 所示为裂纹扩展后更新了的物理片环路。可见 PP-14 和 PP-21 在裂纹扩展后均切割为两个新的物理片,判断流形单元在哪个内部,就可知流形单元被哪个物理片所覆盖。PP-16 和 PP-22 均有裂纹切割进来。PP-15 尚未切穿。

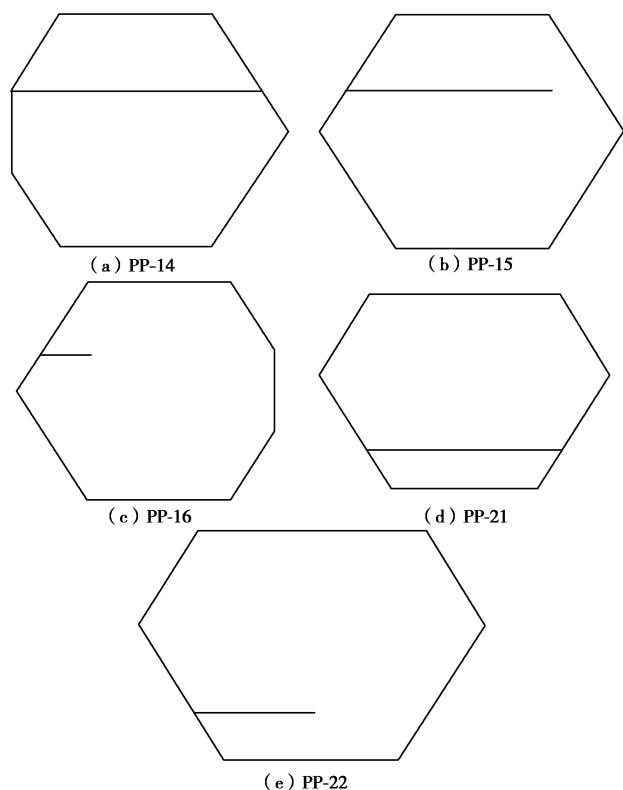


图 25 裂纹扩展后的物理片所对应的环路

Fig. 25 Loops of physical patches after crack growth

(8) 将新生成的裂纹边添加到原接触环路中,并采用搜索环路技术,刷新接触环路,如图 26 所示,这里不再给出组成接触环路的流形单元顶点编号。

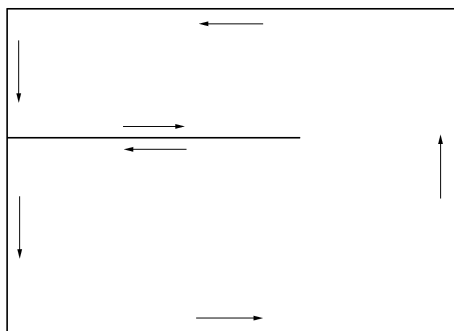


图 26 裂纹扩展后的接触环路

Fig. 26 Contact loop after crack growth

(9) 对流形单元及其顶点重新编号,以保持编号

的连续性;然后更新接触环路和物理片环路编号;更新与流形单元相关的各种数组:流形单元的起止编号;流形单元数目;顶点总数;流形单元所对应的物理片等等。如图 27, 28 所示分别为更新后的流形单元和物理覆盖。

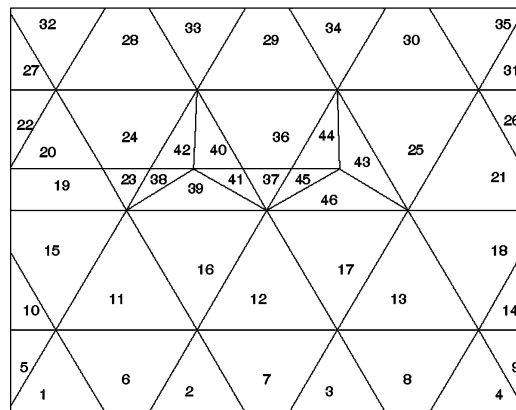


图 27 更新后的流形单元编号

Fig. 27 Numbering of manifold elements after updating

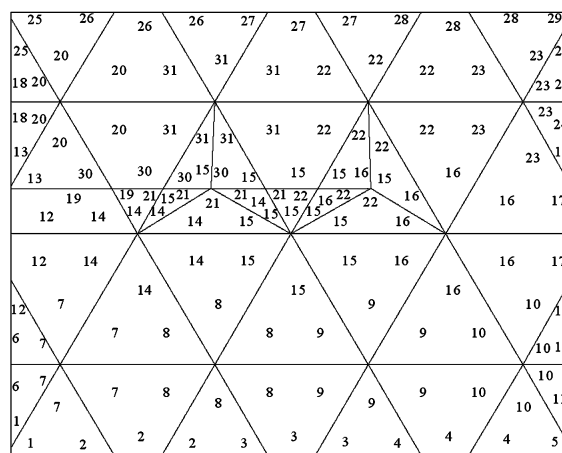


图 28 更新后的物理覆盖

Fig. 28 Physical cover after updating

(10) 从步骤 (9) 转到 (5) 继续扩展。

## 4 多裂纹扩展算例

下面选用一个多裂纹扩展算例来验证文中所提出的裂纹扩展过程中的物理覆盖和接触环路生成算法的正确性。

如图 29 所示,矩形平板,含两个远离中心的圆孔以及两条边裂纹,此算例由 Bouchard 进行过模拟<sup>[37]</sup>,来验证他们提出的裂纹扩展过程中的网格重分技术的适用性。材料的弹性模量为  $E=2 \times 10^5$  MPa,泊松比为  $\nu=0.3$ ,断裂韧度为  $K_{IC}=1300$  MPa $\cdot$ mm $^{1/2}$ 。采用最大周向应力准则。图 30 为采用的数学覆盖,对于这种与材料边界不一致的网格采用罚函数方法施加位移边界条件。图 31 为 Azadi 等<sup>[38]</sup>的模拟结果。





- 23(11): 1836 - 1840. (ZHANG Da-lin, LUAN Mao-tian, YANG Qing, et al. Automatic mesh generation and numerical algorithm of numerical manifold method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(11): 1836 - 1840. (in Chinese))
- [6] 张湘伟, 蔡永昌, 廖林灿. 数值流形方法物理覆盖系统的自动剖分[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2000, 23(1): 28 - 31. (ZHANG Xiang-wei, CAI Yong-chang, LIAO Lin-can. Auto mesh algorithm of the finite cover system in the numerical manifold method[J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 2000, 23(1): 28 - 31. (in Chinese))
- [7] 蔡永昌, 朱合华, 夏才初. 流形方法覆盖系统自动生成算法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2004, 32(5): 585 - 590. (CAI Yong-chang, ZHU He-hua, XIA Cai-chu. Automatic forming of cover system in numerical manifold method[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2004, 32(5): 585 - 590. (in Chinese))
- [8] 蔡永昌, 张湘伟. 流形方法的矩形覆盖系统及其全自动生成算法[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2001, 24(1): 42 - 46. (CAI Yong-chang, ZHANG Xiang-wei. Rectangular cover system of manifold method and its auto mesh algorithm[J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 2001, 24(1): 42 - 46. (in Chinese))
- [9] 武杰, 蔡永昌. 基于四边形网格的流形方法覆盖系统生成算法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2013, 41(5): 641 - 645. (WU Jie, CAI Yong-chang. Generation algorithm of cover system in manifold method with quadrangular meshes [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2013, 41(5): 641 - 645. (in Chinese))
- [10] 陈刚, 刘佑荣. 流形元覆盖系统的有向图遍历生成算法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(5): 711 - 716. (CHEN Gang, LIU You-rong. Generation of cover system for numerical manifold in travel theory of the oriented graph[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(5): 711 - 716. (in Chinese))
- [11] 凌道盛, 何淳健, 叶茂. 数值流形单元法数学网格自适应[J]. 计算力学学报, 2008, 25(2): 201 - 205. (LING Dao-sheng, HE Chun-jian, YE Mao. Mathematical mesh adaptation of numerical manifold element method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2008, 25(2): 201 - 205. (in Chinese))
- [12] 韩有民, 罗先启, 王水林, 等. 裂纹扩展时物理覆盖与流形单元的生成算法[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(6): 662 - 666. (HAN You-min, LUO Xian-qi, WANG Shui-lin, et al. Formulation algorithm of covers and manifold elements in NMM during propagation of cracks[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(6): 662 - 666. (in Chinese))
- [13] 李海枫, 张国新, 石根华, 等. 流形切割及有限元网格覆盖下的三维流形单元生成[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(4): 731 - 742. (LI Hai-feng, ZHANG Guo-xin, SHI Gen-hua, et al. Manifold cut and generation of three-dimensional manifold element under fe mesh cover[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(4): 731 - 742. (in Chinese))
- [14] 姜冬茹, 骆少明. 三维数值流形方法及其积分区域的确定算法[J]. 汕头大学学报(自然科学版), 2002, 17(3): 29 - 36. (JIANG Dong-ru, LUO Shao-ming. 3-dimensional numerical manifold method and a definite algorithm for its integral domain [J]. Journal of Shantou University (Natural Science), 2002, 17(3): 29 - 36. (in Chinese))
- [15] 姜清辉, 周创兵. 四面体有限单元覆盖的三维数值流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(24): 4455 - 4460. (JIANG Qing-hui, ZHOU Chuang-bing. Three-dimensional numerical manifold method with tetrahedron finite element covers[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(24): 4455 - 4460. (in Chinese))
- [16] 姜清辉, 邓书申, 周创兵. 三维高阶数值流形方法研究[J]. 岩土力学, 2006, 27(9): 1471 - 1474. (JIANG Qing-hui, DENG Shu-shen, ZHOU Chuang-bing. Study of three-dimensional high-order numerical manifold method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(9): 1471 - 1474. (in Chinese))
- [17] 姜清辉, 王书法. 锚固岩体的三维数值流形方法模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(3): 528 - 532. (JIANG Qing-hui, WANG Shu-fa. Three-dimensional numerical manifold method simulation of anchor bolt-supported rock mass[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(3): 528 - 532. (in Chinese))
- [18] 林绍忠, 明峥嵘. 适用于数值流形法分析的混凝土徐变递推公式[J]. 长江科学院院报, 2010, 27(7): 56 - 59. (LIN Shao-zhong, MING Zheng-rong. Recursive formulae of concrete creep suitable for numerical manifold method analysis[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2010, 27(7): 56 - 59. (in Chinese))
- [19] 苏海东, 祁勇峰. 部分重叠覆盖流形法的覆盖加密方法[J]. 长江科学院院报, 2013, 30(7): 95 - 100. (SU Hai-dong, QI Yong-feng. Cover refinement for numerical manifold method with partially overlapping covers[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2013, 30(7): 95 - 100. (in Chinese))

- [20] 苏海东, 祁勇峰, 龚亚琦, 等. 任意形状覆盖的数值流形方法初步研究[J]. 长江科学院院报, 2013, **30**(12): 91 - 96. (SU Hai-dong, QI Yong-feng, GONG Ya-qi, et al. Preliminary research of numerical manifold method based on covers of arbitrary shape[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2013, **30**(12): 91 - 96. (in Chinese))
- [21] 王水林, 葛修润. 流形元方法在模拟裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, **16**(5): 7 - 12. (WANG Shui-lin, GE Xiu-run. Application of manifold method in simulating crack propagation[J]. Chinese Journal of Rock mechanics and Engineering, 1997, **16**(5): 7 - 12. (in Chinese))
- [22] 王水林, 葛修润, 章 光. 受压状态下裂纹扩展的数值分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, **18**(6): 671 - 675. (WANG Shui-lin, GE Xiu-run, ZHANG Guang. Numerical analysis of crack propagation under compression[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, **18**(6): 671 - 675. (in Chinese))
- [23] ZHANG G X, SUGIURA Y, HASEGAWA H. Application of manifold method to jointed dam foundation[C]// Proc Third Int Conf Analysis of Discontinuous Deformation (ICADD-3). Colorado, 1999: 211 - 220.
- [24] ZHANG G X, ZHU B F, LU Z C. Cracking simulation of the Wuqiangxi ship lock by manifold method[C]// Proc Sixth Int Conf Analysis of Discontinuous Deformation (ICADD-6). Trondheim, 2003: 133 - 140.
- [25] WU Z, WONG L N Y. Modeling cracking behavior of rock mass containing inclusions using the enriched numerical manifold method[J]. Engineering Geology, 2013, **162**: 1 - 13.
- [26] WU Z, WONG L N Y, FAN L. Dynamic study on fracture problems in viscoelastic sedimentary rocks using the numerical manifold method[J]. Rock mechanics and Rock Engineering, 2013, **46**(6): 1415 - 1427.
- [27] WU Z, WONG L N Y. Elastic-plastic cracking analysis for brittle-ductile rocks using manifold method[J]. International Journal of Fracture, 2013, **180**(1): 71 - 91.
- [28] WU Z, WONG L N Y. Frictional crack initiation and propagation analysis using the numerical manifold method[J]. Computers and Geotechnics, 2012, **39**: 38 - 53.
- [29] ZHENG H, XU D. New strategies for some issues of numerical manifold method in simulation of crack propagation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014, **97**(13): 986 - 1010.
- [30] XU D D, ZHENG H, XIA K W. New numerical quadrature of integrand with singularity of  $1/r$  and its application[J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, **444**: 641 - 649.
- [31] XU D D, ZHENG H. Mesh independence test of numerical manifold method in treating strong singularity[C]// Proceedings of 11th International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation. Fukuoka, 2013: 91 - 96.
- [32] 徐栋栋, 郑 宏. 数值流形法在处理强奇异性问题时的网格无关性[J]. 岩土力学, 2014, **35**(8): 2385 - 2394. (XU Dong-dong, ZHENG Hong. Mesh independence of numerical manifold method in treating strong singularity[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(8): 2385 - 2394. (in Chinese))
- [33] 徐栋栋, 郑 宏, 夏开文, 等. 高阶扩展数值流形法在裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, **33**(7): 1375 - 1387. (XU Dong-dong, ZHENG Hong, XIA Kai-wen, et al. Application of higher-order enriched numerical manifold method to crack propagation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, **33**(7): 1375 - 1387. (in Chinese))
- [34] 杨永涛, 徐栋栋, 郑 宏. 动载下裂纹应力强度因子计算的数值流形元法[J]. 力学学报, 2014, **46**(5): 730 - 738. (YANG Yong-tao, XU Dong-dong, ZHENG Hong. Evaluation on stress intensity factor of crack under dynamic load using numerical manifold method[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014, **46**(5): 730 - 738. (in Chinese))
- [35] 徐栋栋, 郑 宏, 杨永涛. 线性无关高阶数值流形法[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(3): 482 - 488. (XU Dong-dong, ZHENG Hong, YANG Yong-tao. Linearly independent higher-order numerical manifold method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(3): 482 - 488. (in Chinese))
- [36] ZHENG H, LIU Z J, GE X R. Numerical manifold space of Hermitian form and application to Kirchhoff's thin plate problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2013, **95**(9): 721 - 739.
- [37] BOUCHARD P O, BAY F, CHASTEL Y. Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, **192**(35): 3887 - 3908.
- [38] AZADI H, KHOEI A R. Numerical simulation of multiple crack growth in brittle materials with adaptive remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, **85**(8): 1017 - 1048.