

DOI: 10.11779/CJGE201509023

# 一种模拟节点达西渗透流速的三次样条多尺度有限单元法

谢一凡<sup>1</sup>, 吴吉春<sup>1</sup>, 薛禹群<sup>1</sup>, 谢春红<sup>2</sup>

(1. 南京大学地球科学与工程学院, 江苏南京 210046; 2. 南京大学数学系, 江苏南京 210093)

**摘要:** 提出了一种三次样条多尺度有限单元法 (MSFEM-C) 模拟非均质介质中的地下水水流运动。该方法将三次样条法和多尺度有限单元法 (MSFEM) 有机结合, 能够高效、精确地求解水头和达西渗透流速。MSFEM-C 应用三次样条函数逼近多尺度基函数, 保证了基函数的一阶导数的连续性, 从而得到连续的水头一阶导数。因此, MSFEM-C 通过达西定律得到的渗透流速在节点上是连续的。MSFEM-C 是基于 MSFEM 的, 它可以在局部网格单元上求解达西渗透流速, 而无需在整个研究区上求解, 从而可以节省很大计算量。因此, MSFEM-C 在求解大尺度、长时间、非线性等高计算量问题时十分高效。通过对二维稳定流以及非线性潜水流的模拟, 发现 MSFEM-C 在计算水头和达西渗透流速时的具有很高的效率和精度。

**关键词:** 三次样条法; 多尺度有限单元法; 非均质; 地下水流数值模拟

**中图分类号:** TU41      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000 - 4548(2015)09 - 1727 - 06

**作者简介:** 谢一凡(1987 - ), 男, 博士研究生, 主要从事水文数值模拟研究。E-mail: xieyifan871003@gmail.com。

## Cubic-spline multiscale finite element method for simulation of nodal Darcy velocities in aquifers

XIE Yi-fan<sup>1</sup>, WU Ji-chun<sup>1</sup>, XUE Yu-qun<sup>1</sup>, XIE Chun-hong<sup>2</sup>

(1. School of Earth Sciences and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210046, China; 2. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

**Abstract:** A cubic-spline multiscale finite element method (MSFEM-C) is proposed for the simulation of nodal Darcy velocities in the heterogeneous media. The main goal of this method is to efficiently solve the hydraulic heads and nodal Darcy velocities. It is realized by the combination of cubic-spline technique and the multiscale finite element method (MSFEM). MSFEM-C applies cubic-spline technique to multiscale base functions so as to make their derivatives continuous. Therefore, the continuous derivatives of hydraulic head can be obtained, which ensures the continuity of the velocity field. The MSFEM-C is based on MSFEM, so that the computation of nodal Darcy velocities is decomposed from element to element. Therefore, MSFEM-C can save much computational cost, which makes it more efficient in solving high computational problems, such as large-scale, long-term or nonlinear problems. The numerical experiments indicate that the MSFEM-C achieves accurate nodal Darcy velocities and hydraulic heads with much less computational cost.

**Key words:** cubic-spline technique; multiscale finite element method; heterogeneous medium; groundwater numerical simulation

## 0 引言

现今, 关于热量和质量在地下水系统中运移的研究越来越被重视。因此, 很多数值方法被提出并用于求解溶质运移方程。地下水的渗透流速对溶质和热量的运移的影响很大。精确的求解溶质运移方程需要连续的速度场, 特别是在对流占优的情况下。因此, 对于达西渗透流速的研究是十分有意义的<sup>[1-2]</sup>。关于达西渗透流速的研究有两种主要策略。第一种策略是通过达

西定律直接求解速度, 将渗透流速和水头都作为未知数并同时求解<sup>[3-6]</sup>。此类方法能够给出较高的精度, 但是求解过程十分复杂, 要迭代多次才能得到结果。第二种策略是先求解水头, 再通过达西定律求解渗透流速<sup>[7-9]</sup>。此类方法的求解过程简单直接, 并且可以使用

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(40725010); 国家自然科学基金项目(41030746)

收稿日期: 2014-12-21

已知的水头数据，更适合实际应用。

有限单元法、有限差分方法应用第二种策略求解达西渗透流速，通过线性基函数的导数值得到其在水头一阶导数。因此，通过有限单元法和差分方法求解出的达西渗透流速在节点上不连续，精度较低。

针对这一问题，本文提出了三次样条多尺度有限单元法（MSFEM-C），通过多尺度有限单元法（MSFEM）<sup>[10-15]</sup>提高计算效率，并使用三次样条法<sup>[9]</sup>保证达西渗透流速的连续性。和 MSFEM 类似，MSFEM-C 的基函数满足局部微分算子抓住小尺度的信息，因此无需在小尺度上求解便可抓住大尺度特征，计算效率较高。另一方面，由于多尺度方法水头的一阶导数也是通过基函数的一阶导数得到的，在节点上不连续。为此，MSFEM-C 采用三次样条函数逼近多尺度基函数来保证基函数一阶导数的连续性，得到连续的水头一阶导数项，从而得到连续的速度场。本文的数值实验的结果显示 MSFEM-C 使用的计算时间和 MSFEM 相近。当网格尺度为 0.033 时，MSFEM-C 求解的达西渗透流速的相对误差为 8% 左右。

## 1 原理和算法

### 1.1 构造基函数

MSFEM-C 通过求解简化的椭圆方程来构造基函数。首先，引入一些符号的定义。样本粗网格单元为： $\square_{ijkl}$ ，顶点按逆时针顺序为  $i, j, k, l$ ，相应节点的基函数为  $\psi_i, \psi_j, \psi_k, \psi_l$ 。以构造基函数  $\psi_i$  的过程为例，考虑在粗网格单元  $\square_{ijkl}$  上的简化的椭圆方程：

$$-\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \psi_i) = 0 \quad (x, y) \in \square_{ijkl}, \quad (1)$$

式中， $\mathbf{K}$  为渗透系数。此方程可以采用基函数的线性、振荡、全局等边界条件<sup>[10]</sup>。

根据伽辽金变换，可以得到一个  $p \times p$  的方程组：

$$J_{M_\tau} = \iint_{\square_{ijkl}} (\mathbf{K} \nabla \psi_i) \cdot \nabla N_{M_\tau} dx dy = 0 \quad (\tau = 1, 2, \dots, p), \quad (2)$$

式中， $N_{M_\tau}$  是在  $M_\tau$  点的线性基函数。

设细网格单元  $\Delta_l$  的顶点按逆时针顺序为  $a, b, c$ 。在  $\Delta_l$  内，根据 Hou 等在 1997 年的工作<sup>[11]</sup>， $\psi_i$  可以被线性表示：

$$\psi_i(x, y) = \psi_i(a)N_a + \psi_i(b)N_b + \psi_i(c)N_c, \quad (x, y) \in \Delta_l, \quad (3)$$

式中， $N_a, N_b, N_c$  为在  $a, b, c$  点的线性基函数。

将式(3)代入式(2)，可以得到关于基函数内点的方程组。通过求解这个正定的方程组，可以得到基函数  $\psi_i$  在粗网格单元内部所有节点的值。

### 1.2 对基函数应用样条技术

样条函数能够精确地近似、插值与拟合各种函数和曲线<sup>[9, 16-18]</sup>。在这节，使用三次样条函数去近似估

计基函数的值，从而得到基函数在  $x$  和  $y$  方向的导数。三次样条法要求渗透系数在节点上是连续的，并且粗网格单元为矩形。以求解  $\psi_i$  在  $x$  方向的导数为例，假设  $[a, b]$  是粗网格单元  $\square_{ijkl}$  上的一条网格线（图 1），上有  $n+1$  个节点，即

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad (4)$$

式中， $x_\tau (\tau = 0, 1, \dots, n)$  表示  $x$  方向第  $\tau$  个节点的坐标。

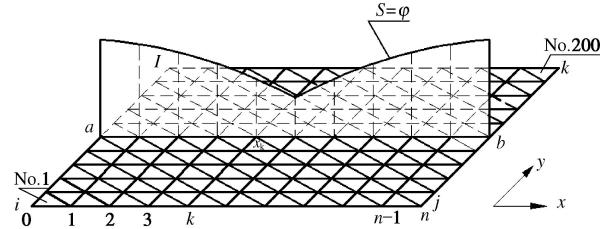


图 1 三次样条法示意图

Fig. 1 Sketch map of cubic-spline technique

使用样条函数  $S_i(x)$  近似估计基函数  $\psi_i$ ， $S_i(x)$  具有如下性质<sup>[9, 18-19]</sup>： $S_i(x)$  在节点  $x_\tau$  的值等于该点的水头值； $S_i(x)$  的二阶导数在  $[a, b]$  上连续； $S_i(x)$  为三次多项式。 $S_i(x)$  在区间  $[x_{\tau-1}, x_\tau]$  上的表达式为<sup>[9, 18-19]</sup>

$$S_i(x) = \frac{(x_\tau - x)^2(x - x_{\tau-1})}{\Delta_\tau^2} m_{\tau-1} - \frac{(x_\tau - x)(x - x_{\tau-1})^2}{\Delta_\tau^2} m_\tau + \frac{(x_\tau - x)^2[2(x - x_{\tau-1}) + \Delta_\tau]}{\Delta_\tau^3} \psi_i(x_{\tau-1}) + \frac{(x - x_{\tau-1})^2[2(x_\tau - x) + \Delta_\tau]}{\Delta_\tau^3} \psi_i(x_\tau), \quad (5)$$

式中， $\Delta_\tau = x_\tau - x_{\tau-1}$  为空间步长， $m_\tau = \frac{\partial S_i(x_\tau)}{\partial x}$  是  $S_i(x)$  在节点  $x_\tau$  的  $x$  方向一阶导数值。

由于  $S_i(x)$  的二阶导数在  $[a, b]$  上连续，推导后可得<sup>[9, 18-19]</sup>

$$\lambda_\tau m_{\tau-1} + 2m_\tau + (1 - \lambda_\tau) m_{\tau+1} = d_\tau, \quad \tau = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6)$$

式中

$$d_\tau = \frac{3\Delta_\tau \Delta_{\tau+1}}{\Delta_\tau + \Delta_{\tau+1}} \left( \frac{\psi_i(x_{\tau+1}) - \psi_i(x_\tau)}{\Delta_{\tau+1}^2} + \frac{\psi_i(x_\tau) - \psi_i(x_{\tau-1})}{\Delta_\tau^2} \right),$$

$$\lambda_\tau = \frac{\Delta_{\tau+1}}{\Delta_\tau + \Delta_{\tau+1}}.$$

式(6)的边界条件由前差公式给出

$$m_0 = \frac{\psi_i(x_1) - \psi_i(x_0)}{\Delta_1}, \quad m_n = \frac{\psi_i(x_n) - \psi_i(x_{n-1})}{\Delta_n}. \quad (7)$$

式(6)、(7)构成了一个关于  $S_i(x)$  的一阶导数值  $m_\tau$ ， $\tau = 1, 2, \dots, n-1$  的方程组，是三对角形式，易于求解。

$m_\tau$  能够精确逼近  $\psi_i$  在  $x$  方向的一阶导数值，其精度为  $O(\Delta_{\max}^2) \sim O(\Delta_{\max}^2)$ ， $\Delta_{\max} = \text{Max}\{\Delta_k\}$ <sup>[9, 18-19]</sup>。

$$\frac{\partial \psi_i(x_\tau)}{\partial x} \approx \frac{\partial S_i(x_\tau)}{\partial x} = m_\tau \quad (\tau = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

### 1.3 利用MSFEM-C求解水头

考虑二维稳定流问题:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x} + K_{xy}\frac{\partial H}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y}(K_{yx}\frac{\partial H}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}) = W, \\ H|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega \quad (9)$$

式中,  $K_{xx}, K_{xy}, K_{yx}, K_{yy}$  为方向  $xx, xy, yx, yy$  的渗透系数,  $g$  为定义边界的函数,  $\Omega$  为研究区域, 被剖分为  $\gamma$  个矩形粗网格单元  $\square_{ijkl}$ 。

将式(9)两边乘以基函数  $\psi_i$ , 通过伽辽金变换, 有

$$\sum_1^{\gamma} \iint \left[ \left( K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x} + K_{xy}\frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \left( K_{yx}\frac{\partial H}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right] dx dy = \sum_1^{\gamma} \iint W \psi_i dx dy。 \quad (10)$$

根据Hou等<sup>[11]</sup>在粗网格单元  $\square_{ijkl}$  内部的水头可以表示为

$$H(x, y) = H_i \psi_i(x, y) + H_j \psi_j(x, y) + H_k \psi_k(x, y) + H_l \psi_l(x, y), \quad (11)$$

式中,  $H_i, H_j, H_k, H_l$  为粗网格顶点  $i, j, k, l$  的水头值。

将式(11)代入式(10), 在粗网格单元  $\square_{ijkl}$  上有

$$\iint \left[ \left( K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x} + K_{xy}\frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \left( K_{yx}\frac{\partial H}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right] dx dy = B_{ii} H_i + B_{ij} H_j + B_{ik} H_k + B_{il} H_l, \quad (12)$$

式中,  $B_{ii}, B_{ij}, B_{ik}, B_{il}$  为常数, 由基函数的一阶导数值的表出, 式(8)保证了这些导数值在节点上是连续的。关于  $\psi_j, \psi_k, \psi_l$  的方程类似于方程(12)。联立这些方程, 可得一个关于水头  $H$  的方程组。

### 1.4 利用MSFEM-C求解达西渗透流速

达西定律可以有效估计非均质含水层中水流的渗透流速。简单起见, 假设  $K_{xy} = K_{yx} = 0$ ,  $x$  方向的达西定律为

$$V_x(x, y) = -K(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}, \quad (13)$$

式中,  $V_x(x, y)$ ,  $K(x, y)$ ,  $\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}$  分别为节点  $(x, y)$  在  $x$  方向的达西渗透流速、渗透系数、一阶导数。

从式(13)可知, 要求解达西渗透流速, 必须先求解水头的一阶导数  $\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}$ 。类似于式(11), 在  $\square_{ijkl}$  上,  $\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}$  可表示为

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = H_i \frac{\partial \psi_i(x, y)}{\partial x} + H_j \frac{\partial \psi_j(x, y)}{\partial x} + H_k \frac{\partial \psi_k(x, y)}{\partial x} + H_l \frac{\partial \psi_l(x, y)}{\partial x}。 \quad (14)$$

将式(14)代入式(13), 在  $\square_{ijkl}$  上有

$$V_x(x, y) = K(x, y) \cdot \left( H_i \frac{\partial \psi_i(x, y)}{\partial x} + H_j \frac{\partial \psi_j(x, y)}{\partial x} + H_k \frac{\partial \psi_k(x, y)}{\partial x} + H_l \frac{\partial \psi_l(x, y)}{\partial x} \right)。 \quad (15)$$

联立式(8)、(15), 可得

$$V_x(x, y) \approx K(x, y) \left( H_i \frac{\partial S_i(x, y)}{\partial x} + H_j \frac{\partial S_j(x, y)}{\partial x} + H_k \frac{\partial S_k(x, y)}{\partial x} + H_l \frac{\partial S_l(x, y)}{\partial x} \right)。 \quad (16)$$

### 1.5 应用超样本技术

在进行地下水水流模拟时, 若网格和介质物理尺度大小相近便会引起共振效应, 产生谐振误差<sup>[11]</sup>。超样本技术<sup>[11]</sup>可以降低谐振误差, 有效提高精度及收敛速度。

超样本技术的主要思想在放大粗网格的单元  $\square_{ijkl}$  (图2) 上求解临时基函数  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k, \Phi_l$ , 再通过临时基函数求解原粗网格单元的基函数。

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_i(x, y) = C_{11}\Phi_i(x, y) + C_{12}\Phi_j(x, y) + C_{13}\Phi_k(x, y) + C_{14}\Phi_l(x, y), \\ \psi_j(x, y) = C_{21}\Phi_i(x, y) + C_{22}\Phi_j(x, y) + C_{23}\Phi_k(x, y) + C_{24}\Phi_l(x, y), \\ \psi_k(x, y) = C_{31}\Phi_i(x, y) + C_{32}\Phi_j(x, y) + C_{33}\Phi_k(x, y) + C_{34}\Phi_l(x, y), \\ \psi_l(x, y) = C_{41}\Phi_i(x, y) + C_{42}\Phi_j(x, y) + C_{43}\Phi_k(x, y) + C_{44}\Phi_l(x, y), \end{array} \right. \quad (17)$$

式中,  $C_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ ) 为常数, 可以根据基函数  $\psi_i, \psi_j, \psi_k, \psi_l$  在  $\square_{ijkl}$  的顶点值:  $\psi_a(x_b, y_b) = \delta_{ab}$ , ( $a = b: \delta_{ab} = 1; a \neq b: \delta_{ab} = 0; a, b = i, j, k, l$ ) 获得。

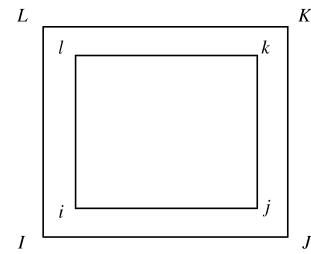


图2 超样本技术示意图

Fig. 2 Sketch map of oversampling method

## 2 数值试验

在这一节中, 将利用MSFEM-C求解不同条件下的水头及速度, 并与MSFEM方法进行比较。由于MSFEM方法的节点导数值不连续, 节点上的达西渗透流速不唯一。因此, 本节中MSFEM采用前差公式近似估计水头的一阶导数, 并用式(13)求解水流速度, 记为MSFEM-DF。本节所有数值方法采用两种基函数边界条件: 线性边界条件、振荡边界条件<sup>[10-11]</sup>。所有的数

值方法均采用 C++ 编写，没有应用平行计算技术，并在同一计算机（Lenovo ThinkPad）上运行。

本文将采用如下缩写形式：AS 表示解析解，AS-C 表示利用 3 次样条插值法求解解析水头的一阶导数<sup>[9]</sup>，并用式（13）求解达西渗透流速。 $V_x$  表示  $x$  方向上的达西渗透流速。MSFEM-DF ( $a, b$ ) 表示 MSFEM-DF 将研究区剖分为  $a$  个粗网格单元，每个粗网格单元被剖分为  $b$  个细网格单元，MSFEM-DF-L, MSFEM-DF-O 则分别表示 MSFEM-DF 使用基函数线性边界条件、振荡边界条件，MSFEM-C-L 和 MSFEM-C-O 分别表示 MSFEM-C 使用基函数线性边界条件、振荡边界条件。MSFEM-C-os-O 表示 MSFEM-C-O 使用超样本技术，MSFEM-C ( $a, b$ ) 表示 MSFEM-C 具有  $a$  个粗网格单元，每个粗网格单元被剖分为  $b$  个细网格单元。

## 2.1 渗透系数渐变的二维稳定流问题

地下水二维稳定流由椭圆型方程描述其分布：

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial H}{\partial y} \right) = W, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (18)$$

式中，渗透系数  $K = (1+x)(1+y)$ ，研究区域  $\Omega$  为  $[0, 1] \times [0, 1]$ ，解析解为  $H = xy(1-x)(1-y)$ ，源汇项  $W$  及狄利克雷边界条件由解析解给出。

本例将研究区剖分为 3 种尺度，即 100, 400, 900 个正方形粗网格单元；MSFEM-C-L 和 MSFEM-C-O, AS-C, MSFEM-DF-L, MSFEM-DF-O 将每一个粗网格单元剖分为 50 份。

表 1 展示了上述数值方法的平均水头绝对误差，速度  $V_x$  的平均相对误差和计算本例所用的 CPU 时间。如表 1 所示，当粗网格单元数目相同时，各种数值方法的速度精度从高到低为 AS-C, MSFEM-C-O, MSFEM-C-L, MSFEM-DF-O, MSFEM-DF-L。当粗网格尺度为 0.1 时 MSFEM-C-O 的速度误差为 18.54%；而在张志辉等工作中<sup>[9]</sup>，Yeh<sup>[7]</sup>、Batu<sup>[8]</sup>的方法在渗透系数均质，粗网格尺度为 0.1 时速度相对误差为 35%。AS-C 不用计算水头所以计算时间最短，而 MSFEM-C 和 MSFEM-DF 的计算时间相近。类似于张志辉等<sup>[9]</sup>观察到的结果，AS-C 的结果比其余方法精确，显示了速度的误差主要是由水头误差产生的，三次样条插值法产生的误差较小。MSFEM-C-O 和 MSFEM-DF-O 的结果分别比 MSFEM-C-L 和 MSFEM-DF-L 高，证明了使用基函数的振荡边界条件可以取得较高精度。

图 3 展示了速度  $V_x$  的相对误差和粗网格单元尺度之间的关系，结果显示各数值法速度的误差均与粗网格单元尺度成正比，剖分的越细，速度的误差越小。

表 2 中，在样本粗网格单元  $\Delta_{ijk}$  上，将 MSFEM-C-O (400, 50) 计算的节点速度  $V_x$  和解析解进行比较。 $\Delta_{ijk}$  顶点坐标为  $i(0.6, 0.5), j(0.65, 0.5), k(0.65, 0.55)$ ,

$l(0.6, 0.55)$ 。表 2 的数据显示了通过 MSFEM-C 计算的速度的精度。

表 1 例 2.1 中各种数值方法的结果对比

Table 1 Results of numerical methods in example 2.1

方法名称	水头绝对误差	速度相对误差/%	计算时间/s
MSFEM-C-O(100,50)	$3.043 \times 10^{-5}$	18.54	小于 1
MSFEM-C-O(400,50)	$7.09 \times 10^{-6}$	10.80	5
MSFEM-C-O(900,50)	$3.06 \times 10^{-6}$	7.98	45
MSFEM-C-L(100,50)	$3.062 \times 10^{-5}$	18.57	小于 1
MSFEM-C-L(400,50)	$7.15 \times 10^{-6}$	11.18	5
MSFEM-C-L(900,50)	$3.08 \times 10^{-6}$	8.30	45
MSFEM-DF-O(100,50)	$3.044 \times 10^{-5}$	23.86	小于 1
MSFEM-DF-O(400,50)	$7.10 \times 10^{-6}$	17.9	5
MSFEM-DF-O(900,50)	$3.06 \times 10^{-6}$	15.86	39
MSFEM-DF-L(100,50)	$3.068 \times 10^{-5}$	23.95	小于 1
MSFEM-DF-L(400,50)	$7.16 \times 10^{-6}$	18.24	5
MSFEM-DF-L(900,50)	$3.09 \times 10^{-6}$	16.17	39
AS-C(100, 50)	0	3.1	小于 1
AS-C(400, 50)	0	1.31	小于 1
AS-C(900, 50)	0	0.97	小于 1

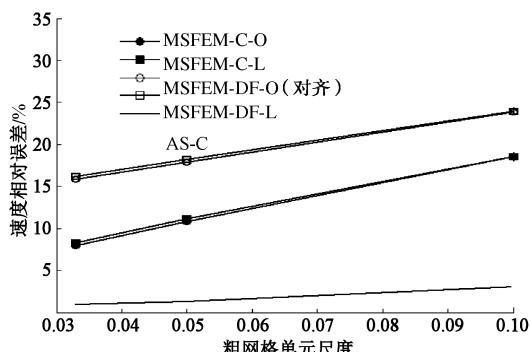


图 3  $V_x$  的平均相对误差与粗网格单元尺度关系图

Fig. 3 Relationship between coarse element scale and relative error of  $V_x$

表 2 例 2.1 中 MSFEM-C-O (400,50) 计算的  $x$  方向的节点达西渗透流速

Table 2 Nodal Darcy velocities in  $x$  direction calculated by MSFEM-C-O (400,50)

节点坐标	解析解	MSFEM-C-O	相对误差/%
(0.61, 0.52)	0.134381	0.153947	14.50
(0.62, 0.52)	0.147508	0.153771	4.20
(0.61, 0.53)	0.134994	0.154647	14.60
(0.62, 0.53)	0.148181	0.154471	4.25
(0.63, 0.53)	0.16152	0.154558	4.33
(0.62, 0.54)	0.14873	0.15517	4.30
(0.63, 0.54)	0.162119	0.155258	4.25
(0.64, 0.54)	0.175661	0.155089	11.70
(0.63, 0.55)	0.162258	0.155955	3.88

## 2.2 渗透系数振荡的二维稳定流问题

本例的研究方程为式（18），渗透系数  $K = \frac{1}{2 + P \sin[\pi(x+y)]}$ ，研究区  $\Omega$  为  $[0, 1] \times [0, 1]$ ，解析解为  $H = xy(1-x)(1-y)$ ，源汇项  $W$  以及狄利克雷边界

条件由解析解给出。

令  $P = 1.99$ , 则渗透系数的最大值为最小值的 400 倍。MSFEM-C 和 MSFEM-DF 将研究区剖分为 400 个粗网格单元, 每一粗网格单元剖分为 50 个细网格单元。

图 4 展示了 AS-C, MSFEM-C-O, MSFEM-C-os-O 和 MSFEM-DF-O 的平均水头绝对误差和速度  $V_x$  的平均相对误差。如图 4 所示: 各数值法速度精度从高到低为 AS-C, MSFEM-C-os-O, MSFEM-C-O, MSFEM-DF-O; MSFEM-C-O 的水头误差比 MSFEM-DF-O 略高, 但速度的误差较小; 超样本技术可以提高水头的精度从而提高速度的精度; 渗透系数的高度振荡使水头误差增大, 并增大了速度的误差。此外, MSFEM-C-os-O, MSFEM-C-O, MSFEM-DF-O 所用的计算时间均为 5 s。

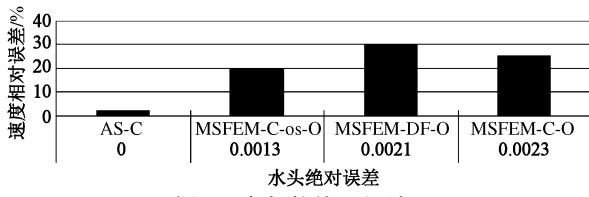


图 4 例 2.2 中各数值法的结果对比

Fig. 4 Results of numerical methods in example 2.2

### 2.3 渗透系数受物理尺度影响的二维稳定流问题

本例的研究方程为式 (18), 渗透系数具有两个物理尺度:

$$K = \frac{1.5 + \sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)}{1.5 + \sin\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right)} + \frac{1.5 + \sin\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right)}{1.5 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)} + \sin(4x^2y^2) + 1, \quad (19)$$

式中,  $\varepsilon$  为物理尺度。

此例研究区  $\Omega$  为  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 解析解为  $H = xy(1-x)(1-y)$ , 源汇项  $W$  及狄利克雷边界条件由  $H = xy(1-x)(1-y)$  给出。

令  $\varepsilon = \frac{1}{69}$ , MSFEM-C-O 和 MSFEM-DF-O 将研究区剖分为 900 个粗网格单元, 每一粗网格单元剖分为 128 个细网格单元。

图 5 展示 AS-C, MSFEM-C-O 和 MSFEM-DF-O 在  $y=0.4667$  和  $y=0.5$  两个截面之间的所有粗网格单元上速度  $V_x$  的平均相对误差。这些粗网格单元的编号为 No.420~No.450 (从左至右编号)。如图 5 所示, AS-C 的精度最高, MSFEM-C-O 次之, MSFEM-DF-O 最差, 物理尺度  $\varepsilon$  令速度的相对误差波动很大。MSFEM-C-O 和 MSFEM-DF-O 的计算时间接近, 分别为 40 s 和 39 s。

### 2.4 二维潜水流问题

二维潜水流的方程是 Boussinesq 方程, 是非线性

方程:

$$-\nabla \cdot K(x, y, H) \nabla H = W, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (20)$$

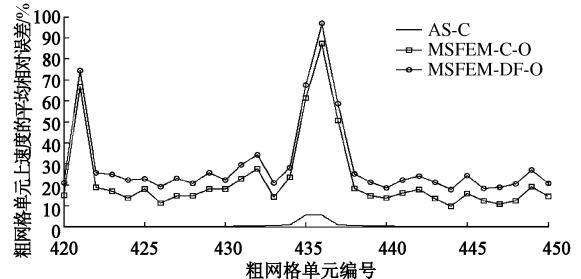


图 5 例 2.3 中各数值法粗网格单元(No.420~450)上的速度平均相对误差

Fig. 5 Average relative errors of  $V_x$  in coarse elements (No. 420~450)

边界上水头为 0, 研究区  $\Omega$  为  $[0, 1] \times [0, 1]$ , 渗透系数

$$K(x, y, H) = \begin{pmatrix} T(H-b) & 0 \\ 0 & T(H-b) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

式中,  $T = (1+x)(1+y)$ , 基准面  $b = -4$ 。解析解为  $H = xy(1-x)(1-y)$ , 源汇项  $W$  及狄利克雷边界条件由解析解给出。

本例使用迭代法求解, 迭代方程为

$$-\nabla \cdot K(x, y, H^{(n-1)}) \nabla H^n = W, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (22)$$

迭代误差  $\varepsilon = 0.0001$ , 初始水头为 0, 迭代式 (22) 直至  $|H^n - H^{(n-1)}| < \varepsilon$ 。

本例将研究区剖分为两种尺度, 即 400, 900 个正方形粗网格单元; MSFEM-C-O 和 MSFEM-DF-O 将每一个粗网格单元剖分为 50 份。本例的数值解 MSFEM-C-O (400, 50)、MSFEM-C-O (900, 50)、MSFEM-DF-O (400, 50)、MSFEM-DF-O (900, 50) 均需要迭代 3 次。

表 3 展示了 MSFEM-C-O 和 MSFEM-DF-O 的平均水头绝对误差, 速度  $V_x$  的平均相对误差和计算本例所用的 CPU 时间。表 3 显示 MSFEM-C 精度较 MSFEM-DF 要高, 但所用 CPU 时间相近。

表 3 例 2.3 中各数值法的结果比较

Table 3 Results of numerical methods in example 2.3

方法名称	水头绝对误差	速度相对误差/%	计算时间/s
MSFEM-C-O(400,50)	$3.73 \times 10^{-6}$	10.50	14
MSFEM-C-O(900,50)	$1.39 \times 10^{-6}$	7.59	137
MSFEM-DF-O(400, 50)	$3.74 \times 10^{-6}$	18.40	11
MSFEM-DF-O(900, 50)	$1.39 \times 10^{-6}$	16.10	107

### 3 结语

从以上算例可知: MSFEM-C 可以高效计算稳定流和非线性问题, 能够处理连续、振荡以及具有多个尺度的渗透系数。MSFEM-C 在采用振荡边界条件时

的 MSFEM-C-O 的精度要比应用采用线性边界条件的 MSFEM-C-L 精度高。MSFEM-C 可使用超样本技术减少谐振误差, 从而提高水头和速度的精度。MSFEM-C 所计算的达西渗透流速的精度比 MSFEM-DF 高, 计算时间接近。

### 参考文献:

- [1] ZHOU Q, BENSABAT J, BEAR J. Accurate calculation of specific discharge in heterogeneous porous media[J]. Water Resources Research, 2001, **37**(12): 3057 – 3069.
- [2] 王铁行, 罗扬, 张辉. 黄土节理二维稳态流流量方程[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(6): 1115 – 1120. (WANG Tie-hang, LUO Yang, ZHANG Hui. Two-dimensional steady flow rate equation for loess joints[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(6): 1115 – 1120. (in Chinese))
- [3] SRINIVAS C, RAMASWAMY B, WHEELER M F. Mixed finite element methods for flow through unsaturated porous media[M]// RUSSELL T F, EWING R E, BREBBIA C A, et al, ed. Computational Methods in Water Resources, IX, vol. 1: Numerical Methods in Water Resources. Southampton: Elsevier Applied Science, 1992: 239 – 246.
- [4] D'ANGELO C, SCOTTI A. A mixed finite element method for Darcy flow in fractured porous media with non-matching grids[J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2012, **46**(2): 465 – 489.
- [5] ERVIN V J. Approximation of axisymmetric Darcy flow using mixed finite element methods[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2013, **51**(3): 1421 – 1442.
- [6] 谢春红, 赵文良, 张天岭, 等. 地下水不稳定渗流达西速度计算新方法[J]. 岩土工程学报, 1996, **18**(1): 68 – 74. (XIE Chun-hong, ZHAO Wen-liang, ZHANG Tian-lin, et al. A new method for solving unsteady groundwater flow[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **18**(1): 68 – 74. (in Chinese))
- [7] YEH G T. On the computation of Darcian velocity and mass balance in the finite element modeling of groundwater flow[J]. Water Resources Research, 1981, **17**(5): 1529 – 1534.
- [8] BATU V. A finite element dual mesh method to calculate Nodal Darcy velocities in nonhomogeneous and anisotropic aquifers[J]. Water Resources Research, 1984, **20**(11): 1705 – 1717.
- [9] ZHANG Z, XUE Y, WU J. A cubic - spline technique to calculate Nodal Darcian velocities in aquifers[J]. Water Resources Research, 1994, **30**(4): 975 – 981.
- [10] 薛禹群, 叶淑君, 谢春红, 等. 多尺度有限元法在地下水模拟中的应用[J]. 水利学报, 2004, **7**: 7 – 13. (XUE Yu-qun, YE Shu-jun, XIE Chun-hong, et al. Application of multi-scale finite element method to simulation of groundwater flow[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004, **7**: 7 – 13. (in Chinese))
- [11] HOU T Y, WU X H. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media[J]. Journal of Computational Physics, 1997, **134**(1): 169 – 189.
- [12] 贺新光, 任理. 求解非均质多孔介质中非饱和水流问题的一种自适应多尺度有限元方法—— I 数值格式[J]. 水力学报, 2009, **40**(1): 38 – 45. (HE Xin-guang, REN Li. Adaptive multi-scale finite element method for unsaturated flow in heterogeneous porous media I : numerical scheme[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2009, **40**(1): 38 – 45. (in Chinese))
- [13] 贺新光, 任理. 求解非均质多孔介质中非饱和水流问题的一种自适应多尺度有限元方法: II 数值格式[J]. 水力学报, 2009, **40**(2): 138 – 144. (HE Xin-guang, REN Li. Adaptive multi-scale finite element method for unsaturated flow in heterogeneous porous media II : numerical scheme[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2009, **40**(2): 138 – 144. (in Chinese))
- [14] 叶淑君, 吴吉春, 薛禹群. 多尺度有限单元法求解非均质多孔介质中的三维地下水水流问题[J]. 地球科学进展, 2004, **19**(3): 437 – 442. (YE Shu-jun, WU Ji-chun, XUE Yu-qun. Application of multiscale finite element method to three dimensional groundwater flow problems in heterogeneous porous media[J]. Advance in Earth Sciences, 2004, **19**(3): 437 – 442. (in Chinese))
- [15] 于军, 吴吉春, 叶淑君, 等. 苏锡常地区非线性地面沉降耦合模型研究[J]. 水文地质工程地质, 2007, **34**(5): 11 – 16. (YU Jun, WU Ji-chun, YE Shu-jun, et al. Research on nonlinear coupled modeling of land subsidence in Suzhou, Wuxi and Changzhou areas, China[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2007, **34**(5): 11 – 16. (in Chinese))
- [16] GREVILLE T N E. Theory and applications of spline functions[M]. New York: Academic Press, 1969.
- [17] KARIM S A A, ROSLI M A M, MUSTAFA M I M. Cubic spline interpolation for petroleum engineering data[J]. Applied Mathematical Sciences, 2014, **8**(102): 5083 – 5098.
- [18] 王省富. 样条函数及其应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1989. (WANG Sheng-fu. Spline functions and its applications[M]. Xi'an: Press of Industrial University of Northwest China, 1989. (in Chinese))
- [19] 薛禹群, 谢春红. 地下水数值模拟[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 175 – 178. (XUE Yu-qun, XIE Chun-hong. Numerical simulation for groundwater[M]. Beijing: Science Press, 2007: 175 – 178. (in Chinese))