

DOI: 10.11779/CJGE201509004

纯主应力旋转条件下饱和黏土累积变形的热力学模型分析

程晓辉¹, 陈志辉²

(1. 清华大学土木工程系, 北京 100084; 2. 中铁二院工程集团有限责任公司, 四川 成都 610031)

摘 要: 不同于岩土弹塑性模型和经验回归模型, 提供了一个基于颗粒固体流体动力学的热力学本构模型。该模型通过对岩土颗粒固体的弹性弛豫和颗粒熵运动等耗散机制的定量描述, 可以模拟土体的非线性硬化、软化等宏观力学行为, 尤其适用于主应力旋转土体累积塑性应变的模拟。纯主应力旋转条件下杭州黏土的模拟结果表明: 即使不改变土体的主应力大小, 纯主应力方向的旋转依然会引起土体的非弹性变形的积累。在主应力旋转过程中, 土体的应变方向与应力方向并不一致, 存在明显的非共轴现象。并且应变峰值的出现明显落后于应力峰值, 应力-应变关系曲线存在较大的滞回圈, 表明纯主应力旋转过程中也存在能量耗散, 并非完全弹性过程。模型分析结果符合现有的试验结论。

关键词: 主应力旋转; 非共轴性; 热力学本构模型; 弹性弛豫; 颗粒熵

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2015)09-1581-10

作者简介: 程晓辉(1971-), 男, 江苏江阴人, 副教授, 主要从事岩土材料和岩土力学研究。E-mail: chengxh@tsinghua.edu.cn。

Thermodynamic modeling of accumulated deformation of saturated clays under pure principal stress rotation

CHENG Xiao-hui¹, CHEN Zhi-hui²

(1. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. China Railway Eryuan Engineering Group Co., Ltd., Chengdu 610031, China)

Abstract: In contrast with elasto-plastic and empirically regressed models for soils, a novel thermodynamic constitutive model is proposed based on the granular solid hydrodynamics. Two energy dissipation mechanisms of elastic relaxation and granular entropy movement are mathematically described, which allows for the modeling of non-linear hardening and softening behaviors of soils and the modeling of accumulated plastic deformation due to the pure rotation of principal stresses in particular. The simulated results for Hangzhou clay indicate that the pure principal stress rotation can also cause inelastic deformation accumulation without any changes of principal stresses. During the rotation of principal stresses, the directions of principal strains do not coincide with the ones of the principal stresses, which is a typically non-coaxial behavior. The strain peaks fall behind the stress peaks. There exists a stress-strain hysteresis loop during the rotation of principal stresses, and the energy dissipation and non-elastic process should happen. All model results fairly fit the laboratory data.

Key words: principal stress rotation; non-coaxiality; thermodynamic constitutive model; elastic relaxation; granular entropy

0 引 言

土体的变形特征与其应力路径密切相关, 这里的应力路径不仅代表应力大小的变化, 也指其方向的变化。室内常规三轴试验通常只能模拟应力的大小变化(图 1(b)), 无法反映主应力方向变化所带来的影响。然而地震、交通、波浪以及风电荷载等施加在地基基础上的应力/应变路径, 较常规三轴试验路径更复杂, 其显著的特征都是具有明显的主应力方向的变化(图 1(c)~(f))。在交通和波浪荷载作用下的土体, 其

主应力方向的变化甚至远比其主应力大小的变化更重要。可以想象, 高速铁路路基、海洋钻井平台以及海上风电基础等, 会长期处于(纯)主应力旋转变化的作用下, 由此可能引起的累积变形发展演变, 势必会影响这些工程的正常与安全运营。

基金项目: 清华-剑桥-麻省理工学院三校低碳大学联盟种子基金项目(2010LC002); “973”计划课题(2013CB036404)
收稿日期: 2014-07-22

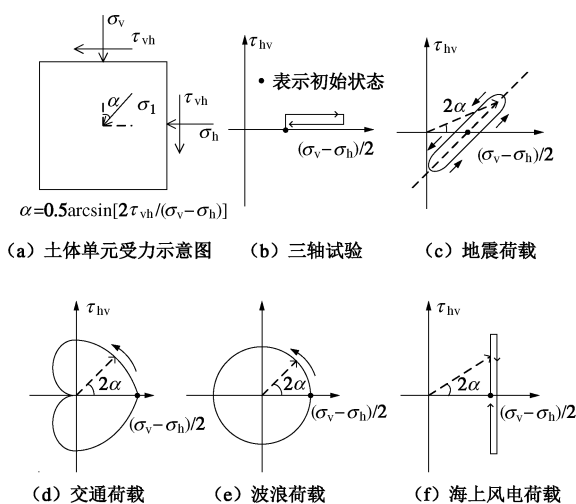


图 1 典型荷载作用下土体应力路径

Fig. 1 Stress paths of soils subjected to typical loadings

Matsouka 等的饱和土体真三轴仪 (true triaxial apparatus) 试验结果早已表明, 主应力旋转会导致土体的累积变形^[1-3], 而随着更先进的土工试验仪的出现 (如空心圆柱扭剪仪, hollow cylinder apparatus, HCA), 人们对主应力旋转对土体累积变形的影响的认识得到进一步提高^[4-8]: 在连续的纯主应力旋转条件下, 饱和土体依然存在塑性变形的积累和孔压的发展, 并且变形累积形态 (方向循环旋转结束时可分别为拉应变和压应变) 和累积快慢主要受到中主应力大小的影响; 纯主应力旋转过程中, 饱和土体的应变相对于应力具有明显的滞后特征, 这是与一般弹塑性理论认识显著不同的。可见, (纯) 主应力方向的旋转, 对饱和土体的变形累积发展具有不可忽略的影响。然而目前岩土工程数值分析中广泛应用的土体弹塑性本构模型通常都不能考虑主应力旋转的影响, 所以在分析带有明显主应力旋转的实际工程问题时, 可能会导致错误的结论。这是由于传统弹塑性理论习惯在三维主应力空间来建立相应的理论, 即仅采用 3 个不同的主应力坐标来表示土体的应力状态或状态函数。这意味着土体的总应力变化只取决于 3 个主应力的大小变化, 而无法考虑主应力方向的旋转。比如在纯主应力旋转条件下, 由于各主应力大小不变, 应力路径在三维主应力空间中是一个点, 弹塑性理论是不会产生任何变形的。

为了克服主应力大小排序带来的困难, 人们又常用应力张量 σ_{ij} 或偏应力张量 s_{ij} 的不变量 (如 I_1, I_2, I_3 或 J_1, J_2, J_3) 来代替主应力作为描述土体应力状态或状态函数的三维坐标 (即柱坐标)。如塑性流动理论中的塑性势面可以表示为 $g = g(I_1, J_2, J_3)$, 那么由流动法则可知塑性应变增量为

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \cdot g'(s_{ij}, I_1, J_2, J_3) \quad (1)$$

式中, λ 为大于零的塑性因子。

根据张量分析理论, 两个张量 A_{ij} 和 B_{ij} 共轴的充要条件为

$$A_{ik} B_{kj} = B_{im} A_{mj} \quad (2)$$

式 (1) 说明塑性应变增量为应力张量不变量和偏应力张量的函数, 而偏应力张量总是与应力张量共轴的, 那么根据式 (2) 容易判断由流动法则式 (1) 确定的塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 与当前应力 σ_{ij} 的主方向一致或共轴, 即下式成立:

$$\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ik}} \sigma_{kj} = \sigma_{im} \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mj}} \quad (3)$$

或

$$\sigma_{mi} d\sigma_{ik} = d\sigma_{mj} \sigma_{jk} \quad (4)$$

上式中约去了标量因子 $\lambda \cdot dg$, 并应用了张量对称性。

式 (4) 说明应力与应力增量共轴, 这进一步说明了传统增量塑性理论只在无主应力旋转的情况下才成立, 制约了土体弹塑性模型的应用范围。尤其在纯主应力旋转条件下, 这些弹塑性模型更显不足, 因为此时应力的各个不变量恒为常数, 由式 (1) 计算不出试验中观察到的塑性变形。而以应力分量表示的广义塑性势理论^[9]也存在同样的问题。为了反映主应力旋转的影响, 势必需要引入 3 个与空间旋转有关的塑性势函数, 从而导致理论模型变得非常复杂, 也增加了计算的难度。为了克服弹塑性模型的这些问题, Matsouka 等人基于试验研究结果直接建立了土体应力-应变之间的经验本构关系, 考虑了主应力旋转和应变滞后的影响^[1-3]。然而这类经验性模型的问题在于: 作为特定试验路径下所获得的试验结果的经验总结, 难以预测实际复杂应力路径下土体的力学行为。如, Matsouka 等人的试验就没有讨论土体中主应力的影响, 而前面已经提到中主应力的大小会影响土体累积变形形态和累积快慢^[4-8]。由此可知, 为了能准确描述土体在复杂应力路径下的力学行为, 提高目前的工程设计分析水平, 亟需进一步完善土体本构建模理论基础, 发展建立合理的土体本构模型。

本文为了研究主应力旋转条件下饱和黏土的累积变形特性, 采用了清华岩土热力学模型^[10-13] (Tsinghua thermodynamic soil model, TTM)。TTM 是基于颗粒流体动力学理论^[14] (granular solid hydrodynamics, GSH), 建立的适用于饱和土体的新型热力学本构模型。其主要的特点是: 沿用了 GSH 理论中的“颗粒熵温度” (granular entropy temperature, 表示为 T_g) 来描述岩土颗粒材料固相颗粒在受外界扰动条件下的滑移、摩擦等无规则的涨落运动 (fluctuation), 并认为

这种涨落运动是引起颗粒固体材料能量耗散和非弹性变形的主要因素。从热力学观点出发, 岩土颗粒材料被视为同时具有真实熵和“颗粒熵”的“双熵材料”, 从而可以通过严格的非平衡态热力学理论, 建立完备的状态变量的演变方程, 这其中包含了应力和应变的本构关系。TTM 还考虑了饱和土体的多相性、温度影响以及循环作用(荷载和温度)的影响, 是一个适用于饱和土体多相-多物理场耦合问题分析的热力学本构理论模型。TTM 不需要引入传统弹塑性理论中的塑性势函数、流动法则等概念, 也避免了传统弹塑性理论所具有的理论缺陷。本文首先对 TTM 的非线性弹性、非弹性变形以及非共轴性等进行分析, 然后详细分析和验证了该模型反映纯主应力旋转和中主应力变化条件下饱和黏土累积变形特性的能力, 提高对饱和土体复杂应力路径下的力学行为的认识水平。

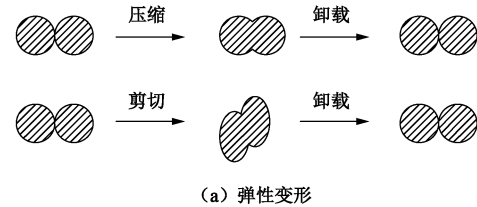
1 TTM 模型理论框架

1.1 颗粒固体材料宏观变形的能量机制

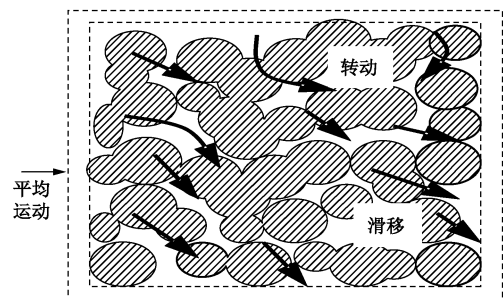
岩土体是典型的颗粒固体材料。不同表观密度的颗粒固体材料在受到外力作用时, 都会存在两类截然不同的变形过程。首先, 在外力作用下, 固体颗粒间会产生连续的相互压缩、剪切等接触变形(图 2(a)), 这类变形被认为是非线性弹性的^[9]。颗粒固体材料正是通过这类接触弹性变形, 将部分外部输入的能量转化为材料内部的弹性势能, 同时也实现了外力在颗粒间的传递。当颗粒固体材料处在静力状态时, 颗粒固体材料只会发生这类接触弹性变形。然而在外力的干扰作用下, 这种接触弹性并不是稳定不变的, 颗粒间的滑移、滚动等涨落运动会被激发, 如图 2(b) 所示。这些涨落运动是不可逆的, 其所携带的涨落动能最终会耗散成热能, 这种能量耗散的宏观表现便是颗粒固体材料的不可逆宏观变形过程。因而颗粒固体材料是暂态弹性材料。可以想象, 这类滑移、滚动等涨落运动, 会使得固体颗粒间的弹性接触遭到破坏, 导致弹性接触的松弛(relaxation)以及弹性势能的耗散损失, 因此该过程被称为“弹性弛豫”。

虽然弹性弛豫过程并不是岩土工程科研人员所熟悉的, 但与之密切相关的颗粒涨落运动早已被试验证实。法国 Grenoble 大学 3S 实验室对此有多年 X-光 CT 扫描试验研究^[15]。TTM 理论认为这部分涨落动能的转换与耗散, 对土体的宏观不可逆变形影响是至关重要的。考虑到这种颗粒涨落运动是无规则和杂乱无章的, 借鉴物理学通常用温度或熵来表示分子热运动的剧烈程度或无序状态的方法, TTM 理论沿用 GSH 做法, 用“颗粒熵温度”这一状态变量, 来表征颗粒涨落的剧烈程度, 其演化过程类似于真实的熵增过程。颗粒

固体材料的弹性弛豫过程, 受到该状态变量的调控: 颗粒涨落动能越大, 颗粒熵温度越高, 说明颗粒固体材料内部颗粒重组与排布, 进而颗粒间弹性接触会松弛, 弹性能量持续耗散, 直到涨落动能耗散殆尽为止。这期间所引起的宏观非弹性变形率便是弹性弛豫率(表示为 Y_{ij}), 它的大小与涨落运动(或颗粒熵温度)的剧烈程度密切相关。



(a) 弹性变形



(b) 涨落运动

图 2 颗粒固体变形特征

Fig. 2 Deformation behaviors of granular solids

1.2 颗粒固体弹性势

根据固体材料格林弹性理论, 描述固体材料的弹性变形时, 选取合适的弹性势能函数是至关重要的。颗粒接触力学研究表明, 颗粒固体材料的暂态弹性具有显著的非线性和稳定性等特征, 与一般固体材料弹性有明显差别。简单的线弹性模型(或广义胡克定律)并不适用, 并且也可能违背基本的热力学定律^[16]。理想球形颗粒固体材料的接触弹性已有很多较成熟的理论, 如 Hertz 接触理论^[17], 是描述颗粒间只存在法向接触力的弹性接触理论, 而 Mindlin-Deresiewicz 接触理论^[18]只考虑了切向接触力; 在 Hertz 接触理论基础上考虑颗粒间的黏连作用, 形成了 JKR (Johnson-Kendall-Roberts) 理论^[19]; Thornton 接触理论^[20]更适用于法向和切向接触作用往往总是同时存在并且相互影响的更一般的情况。虽然, 这些颗粒固体的接触弹性模型已开始应用于颗粒流的离散元模型之中, 但离散元模型计算效率低下, 难以应对广泛的工程实践。另外, 实际中的颗粒固体并非理想球形, 不满足这些接触理论的基本假定。所以在确定颗粒固体的弹性势能函数时, 通常可以考虑这些接触模型中对非线性影响的考虑, 然后对人们熟悉的线弹性模型进行适当的修正。比如 GSH 理论中就采用了修正的 Hertz 接触弹

性模型^[14]:

$$\omega_e = B\sqrt{\varepsilon_v^e} \left[\frac{2}{5}(\varepsilon_v^e)^2 + \xi(\varepsilon_s^e)^2 \right] \quad (5)$$

式中 ε_v^e 为弹性应变张量 ε_{ij}^e (文中所有的应力应变均以压为正) 的第一不变量, 即弹性体积应变; ε_s^e 为偏弹性应变张量 e_{ij}^e (其中, $e_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_v^e \delta_{ij}/3$) 的第二不变量, $\sqrt{e_{ij}^e e_{ji}^e}$ 。这里的 $\sqrt{\varepsilon_v^e}$ 即为反映 Hertz 接触效应的非线性因子; B 为与应力同量纲的模型参数, 反映材料的弹性刚度; ξ 为无量纲参数, 主要用于反映材料的剪切行为对弹性刚度的影响。考虑到上式给出的应力在弹性体积应变为零处存在奇异点, TTM 理论中对此进行了进一步的修正^[11]:

$$\omega_e = B(\varepsilon_v^e)^{1.5} \left[(\varepsilon_v^e)^2 + \xi(\varepsilon_s^e)^2 \right] \quad (6)$$

根据式 (6) 可得弹性应变的共轭量, 即弹性应力分量平均弹性应力 p 和偏弹性应力 σ_s 的表述式:

$$\frac{p}{B} = \frac{1}{B} \frac{\partial \omega_e}{\partial \varepsilon_v^e} = 3.5(\varepsilon_v^e)^{2.5} + 1.5\xi\sqrt{\varepsilon_v^e}(\varepsilon_s^e)^2 \quad (7a)$$

$$\frac{\sigma_s}{B} = \frac{1}{B} \frac{\partial \omega_e}{\partial \varepsilon_s^e} = 2\xi(\varepsilon_v^e)^{1.5}\varepsilon_s^e \quad (7b)$$

同时, 弹性应力 - 弹性应变的增量关系为

$$\delta\sigma_{ij} = H_{ijkl}\delta\varepsilon_{kl}^e \quad (8)$$

式中的切线刚度系数矩阵 (被称为 Hessian 矩阵) 表达为

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 \omega_e}{\partial \varepsilon_{ij}^e \partial \varepsilon_{kl}^e} \quad (9)$$

由式 (8) 可知, 当 H_{ijkl} 满足正定性要求时, 弹性应力 - 弹性应变之间满足唯一性关系, 即材料满足弹性稳定性。弹性稳定性的实质是弹性应力的二阶功恒正, 这与弹塑性理论中的 Drucker 稳定性类似, 只是 Drucker 稳定性要求的是应力增量在增量塑性应变上所做的功为正, 而这里是应力增量在弹性应变增量上所做的功为正。那么, 材料发生弹性失稳的临界条件为

$$\det(H_{ijkl}) = 0 \quad (10)$$

根据该弹性稳定性条件, 可以将式 (7) 表示的应力空间划分如图 3 所示。图中阴影区域表示满足弹性稳定性的应力空间, 当材料的应力状态由初始点逐渐趋近于该区域的边界时, 即达到弹性失稳的临界条件, 由于发生了弹性失稳而无法穿越这个应力边界, 而返回阴影区域。这样, 弹性稳定性条件确定了材料所能达到的真实应力空间, 仅从弹性角度就可描述土体这类材料所表现出来的“屈服”特性。而线弹性模型的弹性刚度为常数, 不存在弹性稳定性问题, 因此无法仅从弹性方面来描述这类现象。值得一提, 首先本文采用的弹性势允许材料发生弹性失稳, 后文将看到,

这样便可以模拟土体的应变软化等行为; 其次, 虽然这里根据弹性稳定性规定了一个真实的应力空间, 该空间与弹塑性理论模型的屈服面所包含的应力空间类似, 但是 TTM 可以采用更一般的各个应力分量来表示土体的应力状态 (这与主应力空间不同), 便于考虑主应力的旋转影响。

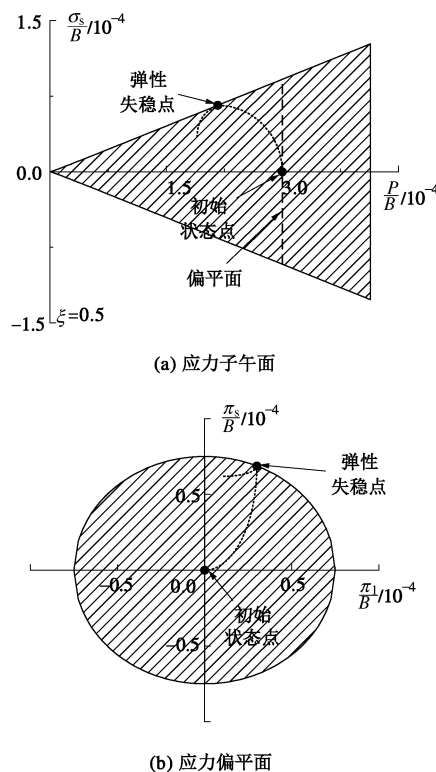
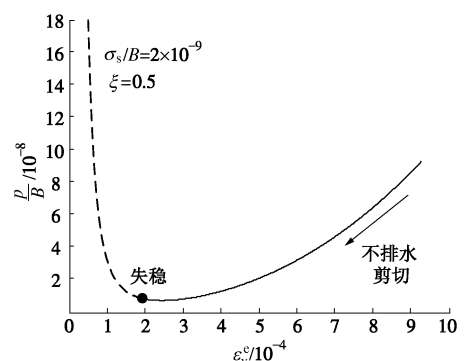


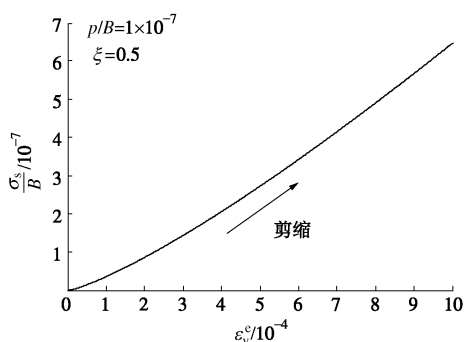
图 3 弹性稳定的应力空间

Fig. 3 Stress spaces divided by elastic stability condition

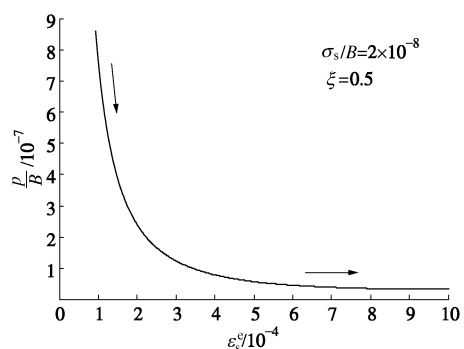
令式 (7) 中某一应力量为常数, 可得到弹性应力 - 应变关系曲线, 如图 4 所示。图 4 (a) 中实线表示材料所能达到真实应力 - 应变状态, 虚线部分是由于发生了弹性失稳而未能达到的状态。该曲线表明, 增加平均应力 p , 总能引起正的弹性体积应变, 即本文模型首先是弹性可压缩的。而实线段的下凸, 表示随平均应力 p 增大, 材料的压缩模量增大, 符合土体的压硬性特征。图 4 (b) 表示剪应力的增加, 也总能引起正的弹性体积应变, 即本文模型还具备弹性剪缩性。从图 4 (c) 中可知, 随着平均应力 p 的减小, 可以导致材料的剪切变形, 说明剪切模量随平均压力减少而减少, 这个特征符合颗粒材料的剪切刚度变化特性。在平均应力 p 的最开始减小过程中, 剪应变的发展比较缓慢, 当平均应力 p 减小到某一值时, 材料的剪切模量衰减, 变形会突然迅速增大。类比材料的受力变形从静止摩擦到滑动摩擦的转变, 可以很好地理解这个变化过程。最后, 图 4 (d) 表示弹性剪应力 - 剪应变的关系。图中的剪应力并不像线弹性和一些其他非



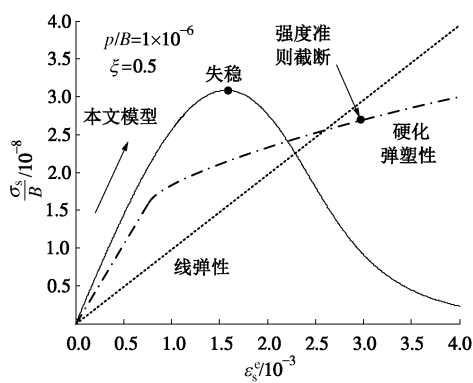
(a) 平均应力 - 弹性体积应变



(b) 剪应力 - 弹性体积应变



(c) 平均应力 - 弹性剪应变



(d) 剪应力 - 弹性剪应变

图4 弹性应力 - 应变曲线

Fig. 4 Elastic stress-strain curves

线性弹性模型一样随着剪应变的增大而一直增大, 而是当到达弹性稳定点后, 剪应力会逐渐衰减。因此该非线性弹性模型可以反映很多试验中观察到的材料应变软化现象, 不符合 Drucker 的稳定性假设, 这也使

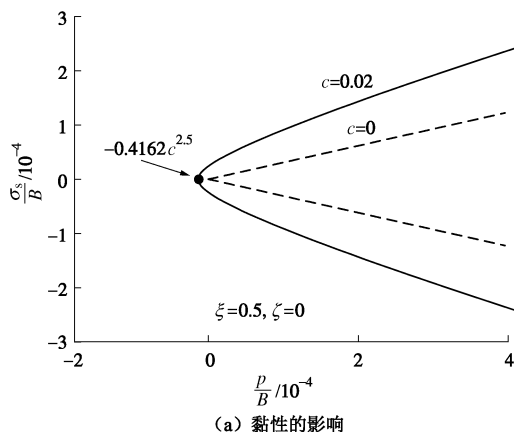
得该模型并不需要添加新的强度准则即可预测材料的强度特征。而硬化弹塑性模型, 由于建立在 Drucker 的稳定性假设基础上, 无法考虑软化行为, 为了表示材料的强度特征, 还必须附加新的强度准则对材料的应力 - 应变行为进行截断。

以上经过非线性修正而得到的非线性弹性模型由于具有上述这些重要的特点, 在用于研究分析谷仓、砂堆等固体颗粒堆积体的静力问题时, 取得了满意的结果^[21-23]。然而对于本文所要研究的饱和黏土, 式(6)所示的非线性弹性模型依然存在一些不足: 首先, 饱和黏土具有黏性, 具备一定的受拉能力, 而从图3(a)得知, 式(6)所示的弹性模型不能考虑材料的受拉, 因此需要进行黏性修正。其次, 岩土体是脆性材料, 其应力偏平面呈“压强拉弱”的特征, 图3(b)所示的应力偏平面不符合土体的这种特征。基于以上考虑, TTM 对式(6)进行了相应的修正, 最终取如下形式的弹性势能函数:

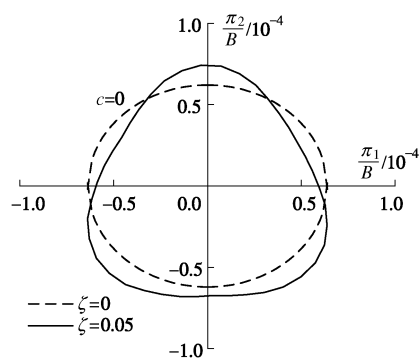
$$\omega_e = B(\varepsilon_v^e + c)^{1.5} \left[(\varepsilon_v^e)^2 + \xi(\varepsilon_s^e)^2 + \zeta \frac{(\varepsilon_{III}^e)^5}{(\varepsilon_s^e)^3} \right]. \quad (11)$$

式中 c 为反映饱和黏土黏性的无量纲参数, 该参数的引入, 使得本文模型具有反映饱和黏土受拉的能力 (图5(a)); 为了表征土体的拉压强度不同的特征, 这里引入了偏弹性应变张量第三应变不变量 ε_{III}^e (其中 $\varepsilon_{III}^e = \sqrt{3} e_{ij}^e e_{jk}^e e_{ki}^e$) 的影响, ζ 为无量纲的模型参数。这样使得应力偏平面由圆变为曲边三角形 (图5(b)), 与熟悉的 Mohr-Coulomb 和 Lade 等屈服面模型类似。这样, 根据式(11)最终得到的弹性应力为

$$\pi_{ij} = \frac{\partial \omega_e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = 1.5B(\varepsilon_v^e + c)^{0.5} [(\varepsilon_v^e)^2 + \xi(\varepsilon_s^e)^2 + \zeta \frac{(\varepsilon_{III}^e)^5}{(\varepsilon_s^e)^3}] \delta_{ij} + 2B(\varepsilon_v^e + c)^{1.5} \varepsilon_v^e \delta_{ij} + B(\varepsilon_v^e + c)^{1.5} [2\xi - 3\zeta \frac{(\varepsilon_{III}^e)^5}{\varepsilon_s^e}] e_{ij}^e + \frac{5}{3} B\zeta (\varepsilon_v^e + c)^{1.5} \frac{(\varepsilon_{III}^e)^2}{(\varepsilon_s^e)^3} [3e_{ik}^e e_{kj}^e - (\varepsilon_s^e)^2 \delta_{ij}] \quad (12)$$



(a) 黏性的影响



(b) 第三应变不变量的影响

图 5 黏性和偏弹性应变张量第三不变量的影响修正

Fig. 5 Modifications due to influences of cohesion and third invariant of elastic strain deviator tensor

另外, 土体在排水压密过程(固结)中, 其密度变化较大, 其对土体刚度和强度的影响不容忽视, TTM 为了考虑这一影响, 将模型参数 B 表示为土体干密度 ρ_d 的函数:

$$B = B_0 \exp(b_1 \rho_d) \quad (13)$$

式中, B_0 (kPa) 和 b_1 ($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$) 均为模型参数。研究表明, 这种引入土体密度变化影响的做法, 使得模型能够反映超固结比 OCR 等的影响, 合理模拟土体不排水剪切行为^[11]。在排水条件下, 土体的干密度根据质量连续方程来确定, 而本文研究只考虑不排水条件, 此时土体的干密度为常数。

1.3 非弹性应变

(1) 弹性弛豫率

当受到外力作用时, 会激发饱和土体堆积体内无规则的颗粒熵运动, 从而引起非弹性变形, 或弹性弛豫, 其应变率大小可以按照以下时间弛豫模型来确定^[14]:

$$Y_{ij} = e_{ij}^e / \tau_s + \varepsilon_v^e \delta_{ij} / \tau_v \quad (14)$$

可见, 这里的弹性弛豫率 Y_{ij} 等同于弹塑性理论中的塑性应变增量。在小应变条件下, 总应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 满足:

$$\frac{d}{dt} \varepsilon_{ij}^e = \dot{\varepsilon}_{ij} - Y_{ij} \quad (15)$$

τ_s 和 τ_v 为弛豫时间, 分别表示在一定的外界应变率干扰条件下, 偏弹性应变 e_{ij}^e 和弹性体积应变 ε_v^e 经弹性弛豫重新趋于平衡态(弹性应变恒定不变)所需的时间。TTM 将该弛豫时间定义“颗粒熵温度” T_g 的函数:

$$\left. \begin{aligned} 1/\tau_s &= \lambda_s T_g^{0.455} \\ 1/\tau_v &= \lambda_v T_g^{0.455} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中, λ_s 和 λ_v 为模型参数, 文献[11]推荐的幂指数 0.455 能较好地反映饱和土体的非线性和率相关性。式

(16) 表示, 颗粒熵运动越剧烈, 其单位时间内引起的弹性势能的耗散损失越大, 非弹性应变的积累越快。

可见, 这里免去了塑性力学中塑性势函数和流动法则等概念, 也避免了由此带来的经典塑性力学不适用于主应力(或这里的主应变)旋转的的制约条件。

(2) 颗粒熵运动

正如前文所述, 本文是利用弹性弛豫方程来表示非弹性应变的, 因而不需要再像弹塑性力学那样利用塑性势函数和流动法则等。然而本文新引入的状态变量 T_g , 却需要通过引入额外的方程来确定。表征颗粒熵运动剧烈程度的“颗粒熵温度” T_g 的演化规律可以类似为描述熵增过程的输运方程:

$$\rho_d \frac{d}{dt} s_g = R_g / T_g - I \quad (17)$$

式中, s_g 为“颗粒熵比熵”, 即单位质量土体颗粒所具有的“颗粒熵”。与真实的熵增方程相比, 这里多出一项 I 表示“颗粒熵”向真实熵的转化率, 即颗粒熵运动所携带的涨落动能也是耗散的, 随时间逐步转换为体系的热能。

这样, 颗粒层次上类比的发热量 R_g (也就是总的涨落能) 表示为

$$R_g = \sigma_{ij}^g \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (18)$$

式中, 应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 是引起颗粒涨落的耗散力^[14]。 σ_{ij}^g 是与该耗散力对应的耗散流, 表示单位耗散力所引起的能量耗散大小。实际上 R_g 类似于宏观黏滞耗散(两者的耗散力是相同的), 是颗粒涨落运动能。因此, σ_{ij}^g 可以被认为是颗粒熵运动对土体总应力的贡献, 为总应力的涨落部分, 通常情况下较小而可以忽略。事实上, 式(18)即是非平衡态热力学理论中的 Onsager 关系在颗粒层次上的推广应用。而在离非平衡态不远处(如, 剧烈爆炸等极端情况就不适用), Onsager 关系还给出了耗散流与耗散力之间满足线性关系的结论, 可以根据迁移系数来确定二者之间的关系^[24-25]。从真实熵角度来看, I 是由“颗粒熵温度” T_g 所引起的耗散流, 因而耗散流 σ_{ij}^g 和 I 可以表示成相应耗散力的线性函数:

$$\sigma_{ij}^g = \eta_s T_g \dot{\varepsilon}_{ij} + \eta_v T_g \dot{\varepsilon}_v \delta_{ij}, \quad I = \gamma T_g \quad (19)$$

式中 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 为偏应变率张量, $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} / 3$; 系数 $\eta_s T_g$, $\eta_v T_g$ 和 γ 在非平衡态热力学理论中称为迁移系数。其中为保证当“颗粒熵温度” T_g 为零时, 这种颗粒层次上的耗散流为零, 这里将与颗粒黏滞耗散有关的迁移系数简单地展开为 T_g 的线性函数。

这里还要引入颗粒熵运动的能量函数模型^[14](其中 b_0 同样是模型参数):

$$\omega_g = \frac{1}{2} b_0 \rho_s T_g^2 \quad (20)$$

以此来确定“颗粒熵”(这里为“颗粒熵比熵”)和“颗粒熵温度”之间的热力学共轭关系:

$$s_g = \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \omega_g}{\partial T_g} = b_0 T_g \quad (21)$$

那么由式 (17)、(18)、(19) 和 (21) 可得颗粒熵运动方程:

$$b_0 \rho_d \frac{d}{dt} T_g + \gamma T_g = \eta_s \dot{\epsilon}_s^2 + \eta_v \dot{\epsilon}_v^2 \quad (22)$$

式中, $\dot{\epsilon}_s$ 为偏应变率张量的第二不变量, $\sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ji}}$ 。

从式 (22) 可知, 本文模型表示饱和土体一旦受到外界作用 ($\dot{\epsilon}_{ij} \neq 0$, 包括纯主应力旋转的情况), 就会激发无规则的颗粒熵运动, 引起能量耗散损失, 导致弹性弛豫 (式 (14)), 即非弹性应变。另外, 在本文的模型框架下, 土体受到外力作用时, 弹性应变和非弹性应变总是同时发生的, 并不存在一个完全弹性的变形阶段。这样就无需屈服面函数, 免去了弹塑性理论中的加卸载条件, 同时也更符合土体的高耗散性特征。当然, 本文模型也并不排斥土体的弹性变形特征: 在极小或小应变条件下, 颗粒熵运动较弱时, 引起的能量耗散和弹性弛豫较小, 此时土体接近于完全弹性变形, 理论上仅需要本文 1.2 节中颗粒弹性势模型就可以了。

1.4 非共轴性

根据 TTM 模型, 饱和土体的总应力主要为前文已经提到的弹性应力 (也可称为有效 Cauchy 应力), 除此之外, 还有孔隙水压力, 黏滞应力和涨落运动对总应力的贡献 (用 σ_{ij}^g 表示)。TTM 的总应力构成如式 (23) 所示, 其热力学推导见文献[11]:

$$\sigma_{ij} = \pi_{ij} + \sigma_{ij}^v + \sigma_{ij}^g + u \delta_{ij} \quad (23)$$

式中, σ_{ij} , σ_{ij}^v 和 u 分别为总应力, 黏滞应力和孔隙水压力。其中黏滞应力为总应变率的热力学共轭量, 根据 Onsager 关系可以表示为总应变率的线性函数, 那么在拟静力或低速剪切条件下, 黏滞应力较小, 和 σ_{ij}^g 一样可以忽略不计, 此时可知 π_{ij} 即为饱和土体的有效应力。本文依然采用了这种简化。

将式 (12) 和弹性应变 ϵ_{ij}^e 代入式 (2) 可以判断弹性应变 ϵ_{ij}^e 和有效应力 π_{ij} 满足共轴性关系。同样地, 可以判断非弹性应变率 Y_{ij} (式 (14)) 与 π_{ij} 共轴, 这里的 Y_{ij} 等同于弹塑性理论中的塑性应变增量 (不同是前者可以是应变率相关的, 而后者一般是应变率无关的)。可见: 当有效应力中考虑黏滞应力 σ_{ij}^v 和涨落运动项 σ_{ij}^g 时, Y_{ij} 与有效应力或总应力 (孔压不改变主应力方向) 是非共轴; 当对有效应力进行简化而忽略 σ_{ij}^v 和 σ_{ij}^g 时, Y_{ij} 与有效应力或总应力共轴, 这与传统弹塑性理论中有效应力与塑性应变增量方向共轴相一致。通过简单的推论易知, 非弹性应变与有效应力之间是非共轴的 (否则, Y_{ij} 必与非弹性应变共轴, 本文模型并无该约束条件)。

本文模型与众多弹塑性理论模型在共轴性上最大的不同在于, 本文模型不要求有效应力与应力增量是共轴的, 适用于纯主应力旋转的情况; 而正如本文引言所说 (如式 (4)), 弹塑性模型则仅适用于应力和应力增量共轴的条件, 并不适用于纯主应力旋转的情况。

1.5 本构方程

对前面的模型理论框架进行梳理可知, 在不排水条件下, TTM 的本构关系方程主要包含以下 3 部分:

(1) 颗粒熵运动。式 (22) 两边同乘以常系数 $\lambda_v^{1/0.455}$ 得

$$\frac{d}{dt} (\lambda_v^{1/0.455} T_g) + \frac{\lambda_v^{1/0.455} T_g}{m_2 \rho_d} = \frac{m_1^{1/0.455} \dot{\epsilon}_s^2}{m_2 \rho_d} \quad (24)$$

式中, 迁移系数: $m_1 = \lambda_v (\eta_s / \gamma)^{0.455}$, $m_2 = b_0 / \gamma$; 土体干密度 ρ_d 根据颗粒比重 G_s 和初始孔隙比 e_0 确定, $\frac{1000 G_s}{1 + e_0}$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$); 在不排水剪切前, 认为该微分方程状态变量的初始值为零。

(2) 弹性弛豫。由式 (14)、(15) 和 (16) 得

$$\frac{d}{dt} \epsilon_v^e = -3 (\lambda_v^{1/0.455} T_g)^{0.455} \epsilon_v^e \quad (25a)$$

$$\frac{d}{dt} e_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij} - m_3 (\lambda_v^{1/0.455} T_g)^{0.455} e_{ij}^e \quad (25b)$$

式中, 迁移系数: $m_3 = \lambda_s / \lambda_v$ 。该微分方程的初始值由剪切前饱和土体的有效应力确定。

(3) 有效应力 (kPa)。本文经简化后, 认为弹性应力即为饱和土体的有效应力, 因此根据代数方程式 (12) 和 (13) 确定。

本文模型的本构关系方程的求解需要输入的已知条件为应力或应变路径 (即 $\dot{\pi}_{ij}$ 和 (或) $\dot{\epsilon}_{ij}$), 模型参数有: B_0 , b_1 , c , ξ , ζ , m_1 , m_2 和 m_3 。这些模型参数的标定方法可参考文献[12, 13], 在没有足够的标定参数所需的试验数据情况下, 一般由试算法获得, 即本文所用方法。本文模型暂不考虑具有显著本征各向异性和具有明显结构性的黏土问题。

2 纯主应力旋转下累积变形模拟

在地震、交通和波浪荷载等作用下, 土体的应力路径带有显著的主应力方向连续旋转的特性。目前, 实验室常用 HCA 来研究主应力旋转条件下饱和土体的力学性质。如图 6 所示, HCA 通过控制轴力 W , 扭矩 M_T , 以及内外压力 p_i/p_o 来对薄壁空心圆柱的土体试样施加不同的应力。当独立控制这些外力的大小时, 可以实现土体单元上各个应力分量大小变化以及主应力方向的旋转。

严佳佳等利用 HCA 对纯主应力旋转条件下原状杭州黏土的不排水变形特性进行了研究[8]。试验过程中保持主应力大小不变, 仅控制主应力的方向 α 以 $0.2^\circ / \text{min}$

发生连续旋转, 作用在土体试样上的应力分量分别满足以下关系:

$$\sigma_z = p_0 - (b - 0.5)q_0/3 + 0.5q_0 \cos 2\alpha, \quad (26a)$$

$$\sigma_r = p_0 + (2b - 1)q_0/3, \quad (26b)$$

$$\sigma_\theta = p_0 - (b - 0.5)q_0/3 - 0.5q_0 \cos 2\alpha, \quad (26c)$$

$$\tau_{z\theta} = 0.5q_0 \sin 2\alpha. \quad (26d)$$

式中, 土体扭剪前初始应力 $q_0 = \sigma_1 - \sigma_3 = 75$ kPa, $p_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = 150$ kPa, b 为中主应力系数。试验中控制的各个应力分量即主应力随旋转方向的变化如图 7 所示。

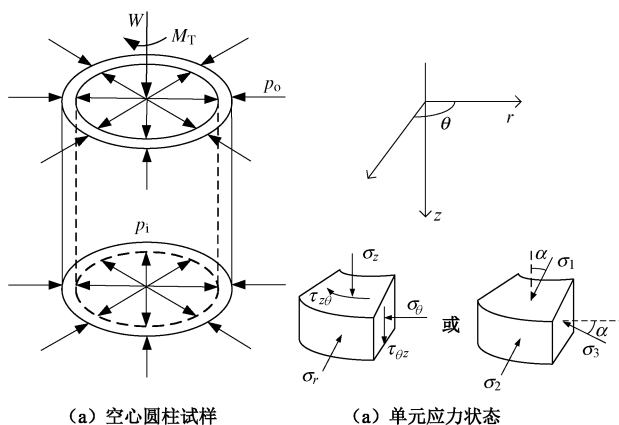
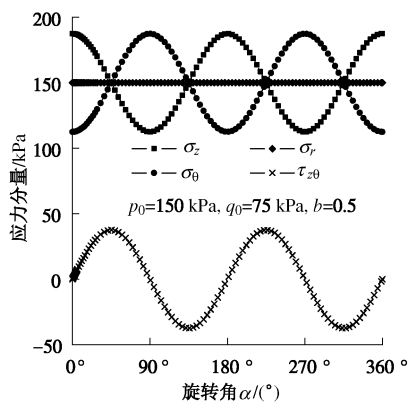
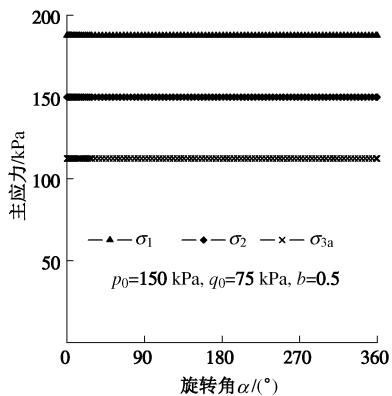


图 6 空心圆柱扭剪试样及单元应力状态

Fig. 6 Hollow cylinder sample and stress on an element in wall of a hollow cylinder sample



(a) 应力分量试验路径



(b) 试验中主应力大小

图 7 纯主应力旋转试验应力路径

Fig. 7 Stress path in pure principal stress rotation tests

图 8 是对该试验中土体各个应变分量变化曲线的模拟对比结果。模型参数为: $B_0 = 0.312$, $b_1 = 0.0123$, $c = 0.0203$, $\xi = 0.576$, $\zeta = 0.0434$, $m_1 = 9$, $m_2 = 0.2$, $m_3 = 5$ 。

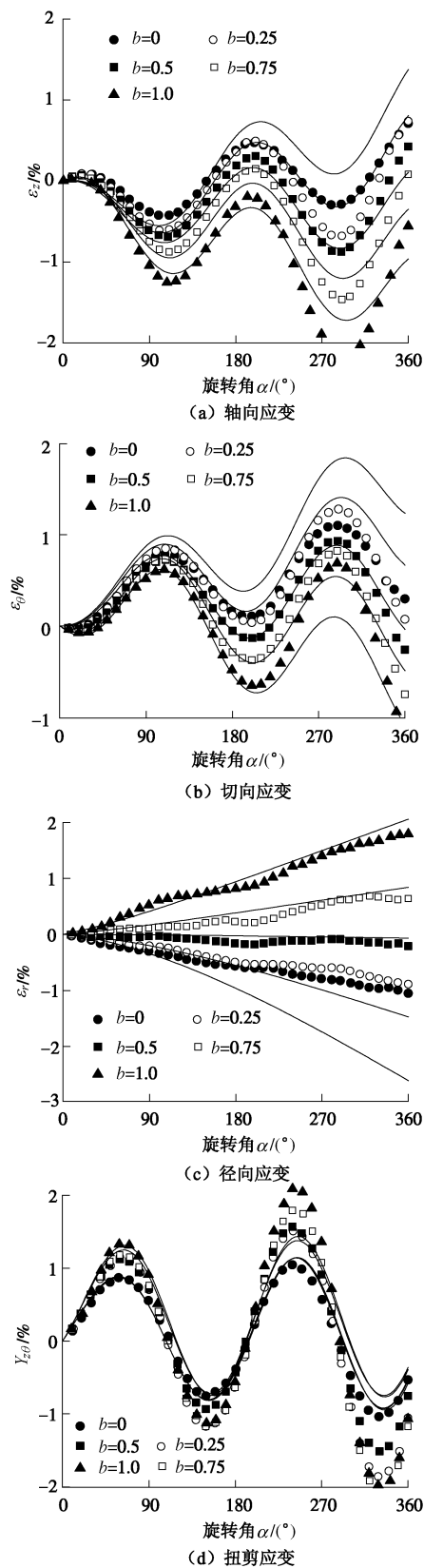


图 8 各应变分量随 α 变化

Fig. 8 Variation of strain components with α

从对比的结果来看, TTM 的预测结果基本符合试验预期结果: 随着纯主应力的旋转, 土体的各个应变分量都产生了不可恢复的非弹性变形累积; 主应力方向旋转结束时, 当中主应力系数 b 从 0 变化到 1 时, 轴向应变累积发展后, 呈现从受拉逐渐过渡到受压的变化趋势, 而切向应变和径向应变与之相反; 中主应力大小对扭剪应变的影响较小, 而模型模拟的结果对这种影响表现更加不明显; 除径向应变随主应力旋转方向角的增加基本呈线性增长外, 其他 3 个应变分量随图 7(a) 中各个应力分量的变化呈周期性循环变化, 并逐渐放大累积; 对比应力分量、应变分量与主应力旋转方向角的关系曲线可知, 其变化规律虽然相似, 但应变峰值的出现较应力峰值滞后约 20° 左右, 对于 TTM 模型来说, 这是应力 - 应变非共轴性的重要体现。TTM 之所以能够反映的纯主应力旋转条件下饱和黏土的变形累积现象, 在于纯主应力的旋转作为外界干扰作用, 会激发该模型中所提到的颗粒熵运动, 实质上是对引起土体内部微观结构的变化定量描述, 从而引起非弹性变形。这也进一步说明从土体颗粒层次上定量描述颗粒间的相互作用或涨落运动对进一步准确描述颗粒固体材料复杂的宏观力学行为的重要性。

图 9 为 $b=0.5$ 的试样的剪应力 - 扭剪应变关系曲线。TTM 模拟的曲线具有明显的滞回圈, 与相应的试验结果类似。滞回圈的出现说明, 在纯主应力旋转过程中, 依然存在较大的能量耗散, 并非弹塑性模型所认为的为弹性变形过程。这里 TTM 模拟的能量耗散主要源自颗粒熵运动使得土体颗粒间弹性接触发生松弛, 从而导致弹性势能耗散损失。

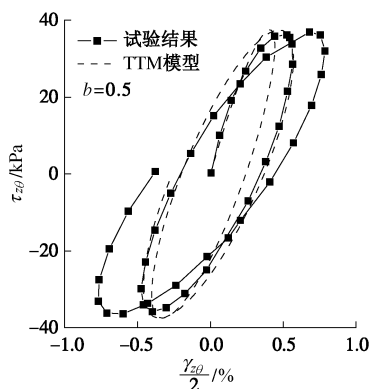


图 9 剪应力 - 扭剪应变曲线

Fig. 9 Shear stress-torsional shear strain curves

3 结 语

大量试验早已证实, 主应力转动和中主应力大小对饱和土体不排水剪切累积变形性质有重要影响。然

而无论岩土弹塑性模型或试验回归模型, 在反映这一基本力学行为时, 或多或少存在不足。本文尝试用基于颗粒物质物理理论——颗粒流体动力学的崭新模型 (TTM) 分析该问题。首先, 着重介绍了 TTM 模型不同于传统弹塑性模型的主要特点, 即不需要屈服函数、塑性势函数、硬化准则和流动法则等, 而是通过引入更符合岩土颗粒物质特点的能量函数以及能量耗散方程, 勾画其能量转换和耗散机制, 从而反映诸如材料强度、非线性硬化、软化以及不可恢复变形等岩土宏观力学行为。其中, 详细讨论了在 TTM 理论框架下, 应力与应变非共轴性问题: 该模型认为土体并不存在一个完全的弹性变形阶段, 而是弹性和非弹性变形总是同时发生。因此, 在任意的纯主应力旋转情况下, 总应变与有效应力或总应力是非共轴的, 而且有效应力与有效应力增量也是非共轴的, 这是传统弹塑性模型不具备的, 但却是符合试验结果的。

本文又基于 TTM 模型, 对某饱和黏土在纯主应力旋转条件下的累积变形特性进行了模型研究。模拟结果表明: 在纯主应力旋转过程中, 土体会产生非弹性变形的累积发展, 累积的应变特征主要受到中主应力大小的影响。同时, 土体的应变相对于其应力具有明显的滞后特征, 这是应力 - 应变非共轴性的重要体现。而扭剪应力 - 应变关系曲线具有明显的滞回圈, 表明该过程中存在能量耗散。研究结果充分表明, TTM 具备了反映饱和软土在纯主应力转动和中主应力变化条件下土体的复杂变形特性, 值得进一步深入发展。

参考文献:

- [1] MATSOUKA H, KOYAMA H, YAMAZAKI H. A constitutive equation for sands and its application to analyses of rotational stress paths and liquefaction resistance[J]. Soils and Foundations, 1985, 25(1): 27 - 42.
- [2] MATSOUKA H, SAKAKIBARA K. A constitutive model for sands and clays evaluating principal stress rotation [J]. Soils and Foundations, 1987, 27(4): 73 - 88.
- [3] MATSOUKA H, SUZUKI Y, MURATA T. A constitutive model for soils evaluating principal stress rotation and its application to some deformation problems[J]. Soils and Foundations, 1990, 30(1): 142 - 154.
- [4] YANG Z X, LI X S, YANG J. Undrained anisotropy and rotational shear in granular soil[J]. Géotechnique, 2007, 57(4): 378 - 384.
- [5] SYMES M J, GENS A, HIGHT D W. Undrained anisotropy and principal stress rotation in saturated sand[J].

- Géotechnique, 1984, **34**(1): 11 – 27.
- [6] NAKATA Y, HYODO M, MURATA H, et al. Flow deformation of sands subjected to principal stress axes rotation [J]. Soils and Foundations, 1998, **38**(2): 115 – 128.
- [7] MIURA K, MIURA S, TOKI S. Deformation behavior of anisotropic dense sand under principal stress axes rotation[J]. Soils and Foundations, 1986, **26**(1): 36 – 52.
- [8] 严佳佳, 周建, 龚晓南, 等. 主应力轴纯旋转条件下原状黏土变形特性研究[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(3): 474 – 481. (YAN Jia-jia, ZHOU Jian, GONG Xiao-nan, et al. Deformation behavior of intact clay under pure principal stress rotation [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(3): 474 – 481. (in Chinese))
- [9] 郑颖人, 孔亮. 岩土塑性力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010. (ZHENG Ying-ren, KONG Liang. Geotechnical plasticity[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2010. (in Chinese))
- [10] 张志超, 程晓辉. 饱和土非等温固结和不排水剪切的热力学本构模型[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(7): 1297 – 1306. (ZHANG Zhi-chao, CHENG Xiao-hui. A thermodynamic constitutive model for non-isothermal consolidation and undrained shear behaviors of saturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(7): 1297 – 1306. (in Chinese))
- [11] 张志超. 饱和岩土体多场耦合热力学本构理论及模型研究[D]. 北京: 清华大学, 2013. (ZHANG Zhi-chao. Research on multi-field coupling thermodynamic constitutive theory and model for saturated geomaterials[D]. Beijing: Tsinghua University, 2013. (in Chinese))
- [12] 陈志辉, 程晓辉. 饱和土体固结压缩和蠕变的热力学本构理论及模型分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(3): 489 – 498. (CHEN Zhi-hui, CHENG Xiao-hui. Thermodynamic constitutive theory and analysis of consolidation compression and creep of saturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(3): 489 – 498. (in Chinese))
- [13] 陈志辉, 程晓辉. 饱和黏土不排水抗剪强度各向异性的热力学本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(3): 836 – 846. (CHEN Zhi-hui, CHENG Xiao-hui. Thermodynamic constitutive model for anisotropic undrained shear strength of saturated clays[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(3): 836 – 846. (in Chinese))
- [14] JIANG Y M, LIU M. Granular solid hydrodynamics[J]. Granular Matter, 2009, **11**(3): 139 – 156.
- [15] DESRUES J, CHAMBON R, MOKNI M, MAZEROLLE F. Void ratio evolution inside shear bands in triaxial sand specimens studied by computed tomography[J]. Géotechnique 1982, **32**(4): 291 – 303.
- [16] CHEN H F, SALEEB A F. Constitutive equations for engineering materials [M]. Amsterdam: Elsevier, 1994: 106.
- [17] SOFONEA M, MATEI A. Mathematical models in contact mechanics[M]. New York: Cambridge University Press, 2012.
- [18] MINDLIN R D, DERESIEWICZ H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces[J]. Journal of Applied Mechanics, 1953, **20**(3): 327 – 344.
- [19] JOHNSON K L, KENDALL K, ROBERTS A D. Surface energy and the contact of elastic solids[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1971, **324**(1558): 301 – 313.
- [20] THORNTON C. Interparticle sliding in the presence of adhesion[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 1991, **24**(11): 1942 – 1946.
- [21] 张庆武, 蒋亦民, 左静, 等. 不同粗糙度平面上静止颗粒堆底的切应力分布[J]. 科学通报, 2010, **55**: 14 – 19. (ZHANG Qin-wu, JIANG Yi-min, ZUO Jing, et al. Tangential stress distribution at the bottom of a static granular pile on the planes of different roughness[J]. Chinese Science Bulletin, 2010, **55**: 316 – 321. (in Chinese))
- [22] 郑鹤鹏, 蒋亦民. Couette 颗粒系统中静态应力和侧压力系数的非线性弹性理论分析[J]. 物理学报, 2008, **57**(12): 511 – 519. (ZHENG He-peng, JIANG Yi-min. A nonlinear elastic analysis of static stress and lateral pressure coefficient for granular Couette systems[J]. Acta Physica Sinica, 2008, **57**(12): 511 – 519. (in Chinese))
- [23] KRIMER D O, PFITZNER M, BRÄUER K, et al. Granular elasticity: general considerations and the stress dip in sand piles[J]. Physical Review E, 2006, **74**(6): 1 – 10.
- [24] DE GROOT S R, MAZUR P. Non-equilibrium thermodynamics[M]. New York: Dover Publications, 1984.
- [25] ONSAGER L. Reciprocal relations in irreversible processes[J]. Physical Review, 1931, **37**(2): 405 – 426.